PROUHET

Théorème segmentaire sphérique (voir t. IX, p. 363)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 208-210

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__208_1>

THÉORÈME SEGMENTAIRE SPHÉRIQUE

(voir t. IX, p. 363) ;

PAR M. PROUHET.

1. Par les trois sommets d'un triangle sphérique, on mène aux côtés respectifs opposés trois arcs de grand cercle se coupant en un point situé dans l'intérieur du triangle ; s, s', s'' sont les segments comptés du point commun d'intersection aux angles, et σ, σ', σ'' les segments correspondants comptés du même point aux côtés ; on a la relation

$$\frac{\sin s \cos \sigma}{\sin(s+\sigma)} + \frac{\sin s' \cos \sigma'}{\sin(s'+\sigma')} + \frac{\sin s'' \cos \sigma''}{\sin(s''+\sigma'')} = 1.$$

(STUBBS.)

Démonstration. Soient ABC le triangle, O le point commun d'intersection. On peut considérer ce point O comme le point d'application de trois forces centrales P, Q, S, appliquées respectivement aux sommets A, B, C ; et R étant la résultante, on aura

$$\frac{\sin \sigma}{\sin(s+\sigma)} = \frac{P}{R}, \quad \frac{\sin \sigma'}{\sin(s'+\sigma')} = \frac{Q}{R}, \quad \frac{\sin \sigma''}{\sin(s''+\sigma'')} = \frac{S}{R};$$

(*) *Ingénieur général de France;* ingénieur qui avait le titre de général.

multipliant respectivement par $\cos\sigma$, $\cos\sigma'$, $\cos\sigma''$, et ajoutant, on obtient

$$\frac{P\cos\sigma + Q\cos\sigma' + S\cos\sigma''}{R} = 1.$$

C. Q. F. D.

Si les arcs partant des sommets divisent le triangle en deux parties équivalentes, on a

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\sigma''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}s''} = 1.$$

2. Le théorème de M. Stubbs peut aussi se démontrer d'une manière très-simple : en faisant passer par le point commun d'intersection un plan tangent à la sphère, et faisant la projection centrale du triangle sphérique sur ce plan, on obtient un triangle rectiligne qui donne, immédiatement,

$$\frac{\operatorname{tang}\sigma}{\operatorname{tang}s + \operatorname{tang}\sigma} + \frac{\operatorname{tang}\sigma'}{\operatorname{tang}s' + \operatorname{tang}\sigma'} + \frac{\operatorname{tang}\sigma''}{\operatorname{tang}s'' + \operatorname{tang}\sigma''} = 1.$$

3. Dans un article très-instructif de M. Collete (t. VIII, p. 435), il s'est glissé une erreur de signe non corrigée dans l'*errata*. Il faut lire

$$\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}C = -\cos\frac{1}{2}c\cos P\,;$$

ce qui est d'ailleurs évident, puisque $\cos P$ est négatif.

Peut-être y aurait-il lieu de faire, pour la géométrie sphérique, ce que Ceva a fait pour la géométrie rectiligne, dans son livre : *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio.*

Note. Les coordonnées d'un point pouvant être considérées comme les composantes d'une force dirigée vers l'origine, M. Möbius a imaginé un algorithme sphérique, d'après cette considération statique, très-commode en beaucoup d'occasions et surtout lorsqu'il s'agit de changer les axes : voir *Uber die grandformen der linien der Dritten ordnung;* c'est-à-dire : *Sur les formes fondamentales des lignes du troisième ordre,* p. 25; Leipzig, 1849; idée que le savant directeur de l'observatoire de Leipzig avait déjà publiee en 1846.