Démonstration de la proposition qu'une courbe du nième degré a, en général, $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles ; d'après M. le professeur C.-G.-J. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 141-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__141_0>

DÉMONSTRATION

De la proposition qu'une courbe du $n^{ième}$ degré a, en général, $\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR C.-G.-J. JACOBI.

[Journal de M. Crelle, tome XL, page 237; 1850 (*)].

---

1. *Notation*. U étant une fonction rationnelle entière algébrique de degré p, U_i représente la somme de tous les termes de degré $p-i$, de sorte que l'on a

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_p,$$

où U_0 est de degré p, U_1 de degré $p-1$, et ainsi de suite.

2. *Lemme*. A étant une fonction rationnelle entière égale au produit des deux autres fonctions rationnelles entières B et C, de sorte que $A = BC$; toute fonction rationnelle entière qui divise A sans avoir de facteur commun avec B, divise nécessairement l'autre facteur C.

3. THÉORÈME. *$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant des fonctions rationnelles algébriques entières en x et y, des degrés marqués par $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$, quantités en progression arithmétique; si l'on a l'équation*

$$\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m = 0,$$

l'équation de condition, nécessaire pour que cette équation ait deux racines égales en h, monte à un degré marqué par $(m-1)(B_0 + B_m)$.

Démonstration. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_m$ les racines; l'équation de condition pour l'existence de deux racines

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome IX, page 295.

égales est

$$\Pi (h_i - h_k)^2 = 0,$$

en désignant ainsi le carré du produit de la différence des racines. Cette fonction rationnelle symétrique des racines peut s'exprimer par une fonction rationnelle entière des quantités

$$\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}, \quad \frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_m}, \ldots, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_m}.$$

Soit α_m^{-p} la plus haute puissance négative de α_m qu'on rencontre dans cette fonction ; en multipliant cette fonction par α_m^p, on obtient une fonction *entière rationnelle homogène* des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et de degré p ; désignons cette dernière fonction par

$$\Delta (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

nous aurons

$$\Delta (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_m^p \Pi (h_i - h_k)^2.$$

Cette fonction Δ n'est divisible par aucun des coefficients $\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; car, si cette divisibilité existait, il s'ensuivrait qu'en égalant le coefficient diviseur à zéro, Δ s'annulerait et l'équation aurait alors des racines égales, ce qui n'est pas nécessairement vrai. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de p ; à cet effet, considérons l'équation suivante réciproque de l'équation donnée

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} g + \alpha_{m-2} g^2 + \ldots + \alpha_0 g^m = 0 ;$$

désignons les racines par $g_1, g_2, \ldots, g_m$, de sorte que

$$g_i = \frac{1}{h_i} ;$$

on a donc

$$\Delta (\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0) = \alpha_0^p \Pi (g_i - g_k)^2 = \alpha_0^p \Pi \frac{(h_i - h_k)^2}{h_i^2 h_k^2}.$$

Le produit Π renferme $\frac{1}{2} m (m - 1)$ facteurs, et le dénominateur de Π est égal au produit de toutes les racines, $h_1, \ldots, h_m$ élevé à la puissance $(2m - 2)$; donc ce dénominateur est égal à $\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_m}\right)^{2m-2}$.

Donc

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0) = \alpha_0^{p-2m+2} \alpha_m^{2m-2} \Pi (h_i - h_k)^2$$

$$= \frac{\alpha_0^{p-2m+2}}{\alpha_m^{p-2m+2}} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m);$$

or, nous avons vu qu'aucune des fonctions Δ n'est divisible par l'un des $m + 1$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$; il faut donc que l'on ait

$$p = 2m - 2.$$

On a donc la valeur cherchée de p, et il vient

$$(1) \qquad \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_m^{2m-2} \Pi (h_i - h_k)^2$$

et

$$\Delta(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) = \Delta(\alpha_m, \ldots, \alpha_0);$$

ainsi Δ est une fonction entière *homogène* des $m + 1$ quantités $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ et de degré $2m - 2$; et pour que l'équation ait deux racines égales, l'on doit avoir $\Delta = 0$, Δ étant débarrassé de tout facteur étranger.

Observation. M. Joachimsthal parvient à la même équation (1) par des considérations analogues (*voir* t. IX, p. 99); il semble que la démonstration de M. Jacobi ne puisse plus s'appliquer à la recherche de la valeur de p, lorsque $\alpha_0 = \alpha_m$.

Supposons que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ représentant des fonctions d'une variable ou de plusieurs variables, de deux par exemple, x et y, de degrés respectivement marqués par B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_m$; si dans l'équation $\Delta = 0$ on remplace $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ respectivement par $\alpha_0 t^{B_0}$, $\alpha_1 t^{B_1}, \ldots,$ $\alpha_m t^{B_m}$, la fonction $\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)$ est de même degré en t, que l'équation $\Delta = 0$ est de degré en x, y.

En effet, si les nombres $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_m$ forment une progression arithmétique dont la raison est C, on a

$$B_i = B_0 + iC,$$

et

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)\\ &= t^{(2m-2)B_0}\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right).\end{aligned}$$

Il faut se rappeler que Δ est une fonction *homogène* de degré $2m - 2$.

Comme h_1, $h_3, \ldots, h_m$ sont racines de l'équation

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \ldots + \alpha_m h^m,$$

il s'ensuit que $h_1 t^{-C}$, $h_2 t^{-C}, \ldots, h_m t^{-C}$ sont racines de l'équation

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 t^{C} h + \alpha_2 t^{2C} h^2 + \ldots + \alpha_m t^{mC} h^m;$$

donc, en vertu de l'équation (1),

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right)\\ &= \alpha_m^{2m-2} t^{m(2m-2)C}\,\Pi\left(h_i t^{-C} - h_k t^{-C}\right)^2;\end{aligned}$$

d'où, faisant sortir t^{-C} de Π,

$$\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1 t^{C}, \alpha_2 t^{2C}, \ldots, \alpha_m t^{mC}\right) = t^{m(m-1)C}\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right),$$

$$\Delta\left(\alpha^0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right) = t^{(m-1)(2B_0 + mC)}\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right).$$

Mais

$$2B_0 + mC = B_0 + B_m,$$

donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\Delta\left(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots, \alpha_m t^{B_m}\right)\\ &= t^{(m-1)(B_0+B_m)}\Delta\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\right);\end{aligned}\right.$$

$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ne contient pas la grandeur t; donc le degré en t du premier membre est $(m-1)(B_0+B_m)$; c'est donc aussi le degré de l'équation $\Delta = 0$ en x, y.

C. Q. F. D.

4. Théorème. *Étant donnée l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré*

$$0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m;$$

si on la transforme, par la substitution de $h = \dfrac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$, *en cette autre équation,*

$$0 = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \ldots + \beta_m g^m,$$

on a

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2 - m} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

$\Delta = 0$ *désignant l'équation de condition pour que l'équation* $0 = F(h)$ *ait deux racines égales.*

Démonstration. Soit $h_i = \dfrac{\gamma' + \delta' g_i}{\gamma + \delta g_i}$ ou $g_i = \dfrac{\gamma' - \gamma h_i}{\delta h_i - \delta'}$: alors $g_1, g_2, \ldots, g_m$ sont racines de l'équation

$$0 = \beta_0 + \beta_1 g + \ldots + \beta_m g^m = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right);$$

en vertu de la formule (1), on a

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \beta_m^{2m-2} \Pi (g_i - g_k)^2,$$

et l'on a évidemment

$$\beta_m = \delta^m F\left(\frac{\delta'}{\delta}\right);$$

il suffit pour cela de faire $g = \infty$. Ensuite on a

$$g_i - g_k = \frac{(\gamma\delta' - \gamma'\delta)(h_i - h_k)}{(\delta' - \delta h_i)(\delta' - h_k)};$$

le dénominateur dans le produit $\Pi(g_i - g_k)$ est donc égal à

$$[(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2),\ldots,(\delta'-\delta h_m)]^{2m(m-1)}$$
$$=\delta^m\left[\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_1\right)\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_2\right),\ldots,\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_m\right)\right]^2$$
$$=\frac{\delta^m}{\alpha_m}\mathrm{F}\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)=\frac{\beta_m}{\alpha_m},$$

car

$$\mathrm{F}(h)=\gamma^m(h-h_1)(h-h_2),\ldots,(h-h_m);$$

ainsi,

$$\Pi(g_i-g_k)^2=(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m(m-1)}\left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{2m-2}\Pi(h_i-h_k),$$

et de là

$$\Delta(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)=\beta_m\Pi(g_i-g_k)^2=(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m(m-1)}$$
$$\times\Delta(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m).$$

C. Q. F. D.

Corollaire. Si le déterminant $\gamma\delta'-\delta'\gamma$ est égal à l'unité, on a

$$\Delta(\beta_0,\ldots,\beta_m)=\Delta(\alpha,\ldots,\beta_m).$$

5. PROBLÈME. *Soient les deux fonctions f et ψ, entières en x et y; on a de plus $f=0$. Trouver, s'il est possible, une fonction entière λ en x, y, telle que le degré de la fonction entière $\psi+\lambda f=\nu$ soit diminué de ε unités.*

Solution. Il est d'abord évident que λf doit être de même degré que ψ; ainsi, le degré de λ est déterminé. D'après la notation ci-dessus (§ 1), écrivons

$$\psi=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots,$$
$$f=f_0+f_1+f_2+\ldots,$$
$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots,$$
$$\nu=\nu_0+\nu_1+\nu_2+\ldots;$$

d'où

$$\nu_0+\nu_1+\nu_2+\ldots$$
$$=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots+(\lambda_0+\lambda_1+\ldots)(f_0+f_1+f_2+\ldots),$$

et de là on tire, ν et ψ étant du même degré,

$$\nu_0 = \psi_0 + \lambda_0 f_0,$$
$$\nu_1 = \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0,$$
$$\nu_2 = \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0,$$
$$\text{etc., etc.}$$

Si le degré de ν doit s'abaisser de ε unités, on devra avoir les identités :

$$o = \psi_0 + \lambda_0 f_0,$$
$$o = \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0,$$
$$o = \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0,$$
$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$o = \psi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} f_0.$$

La première équation montre que ψ_0 doit être divisible par f_0, et le quotient fait alors connaître $-\lambda_0$; la seconde équation montre que $\psi_1 + \lambda_0 f_1$ doit être divisible par f_0, et le quotient donne $-\lambda_1$, et ainsi de suite. Si une de ces divisibilités manque, le problème est impossible; lorsque ces conditions sont remplies, les quotients font connaître les ε fonctions entières $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\varepsilon-1}$, et λ est connu, car l'on a

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} + \lambda_\varepsilon + \lambda_{\varepsilon+1}, \ldots,$$

où l'on peut prendre pour λ_ε, $\lambda_{\varepsilon+1}$, etc., des fonctions entières quelconques de degré inférieur aux ε premières puissances dans λ.

6. Théorème. *Si l'on a deux fonctions entières $f(x, y)$ et $y^k\varphi(x, y)$, telles que le degré de cette dernière fonction puisse être diminué de ε unités au moyen de l'équation $f(x, y) = 0$, et si, de plus, $f_{(0)}$ n'est pas divisible par y, alors le degré de $\varphi(x, y)$ pourra être diminué aussi de ε unités au moyen de la même équation $f(x, y) = 0$.*

Démonstration. Faisons

$$y^k \varphi(x, y) = \psi(x, y);$$

alors

$$\psi_{(0)} = y^k \varphi_0, \quad \psi_1 = y^k \varphi_1, \quad \varphi_2 = y^k \varphi_2, \text{ etc.};$$

donc les ε identités du problème précédent deviennent

$$\begin{aligned}
o &= y^k \varphi_0 + \lambda_0 f_0, \\
o &= y^k \varphi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0, \\
o &= y^k \varphi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
o &= y^k \varphi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \lambda_{\varepsilon-1} \lambda_0.
\end{aligned}$$

Mais f_0 n'étant pas divisible par y^k, il faut, d'après le lemme 2, que λ_0 soit divisible par y^k; et, par le même raisonnement, on déduit de la seconde identité, que λ_1 doit aussi être divisible par y^k, et ainsi de suite; on peut donc poser

$$\lambda_0 = y^k \mu_0, \quad \lambda_1 = y^k \mu_1, \quad \lambda_2 = y^k \mu_2, \ldots, \lambda_{\varepsilon-1} = y^k \mu_{\varepsilon-1},$$

où $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\varepsilon-1}$ sont des fonctions entières de x, y; les identités donnent

$$\begin{aligned}
o &= \varphi_0 + \mu_0 f_0, \\
o &= \varphi_1 + \mu_0 f_1 + \mu_1 f_0, \\
o &= \varphi_2 + \mu_0 f_2 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
o &= \varphi_{\varepsilon-1} + \mu_0 f_{\varepsilon-1} + \mu_1 f_{\varepsilon-2} + \ldots \mu_{\varepsilon-1} f_0;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{gathered}
\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_{\varepsilon-1} \\
+ (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_{\varepsilon-1})(f_0 + f_1 + \ldots) = o,
\end{gathered}$$

par conséquent, dans l'expression

$$\varphi + (\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \mu_{\varepsilon-1}),$$

les ε premières puissances les plus élevées disparaissent.

C. Q. F. D.

7. Ces préliminaires posés, nous pouvons passer au problème à résoudre :

Problème. *Trouver le nombre de tangentes doubles d'une courbe du $n^{ième}$ ordre.*

Solution. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe donnée, de degré n. On rend cette équation homogène en multipliant les termes de degré inférieur à n par des puissances d'une variable z; représentons la fonction qu'on obtient ainsi par $f(x, y, z)$. Si, d'après la notation du § 1, on écrit

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_n,$$

on aura

$$f(x, y, z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots + f_n z^n.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point de la courbe, par lequel passe une tangente, dont nous désignons les coordonnées par p et q; on a

$$\frac{df}{dx}(p - x) + \frac{df}{dy}(q - y) = 0.$$

Faisons

$$p = x + \frac{df}{dy}h, \quad q = y - \frac{df}{dx}h;$$

en donnant à h toutes les valeurs de $+\infty$ à $-\infty$, on obtient toutes les coordonnées de la tangente. Pour tous les points d'intersection de cette tangente avec la courbe, on doit avoir

$$f(p, q, z) = f\left(x + \frac{df}{dy}h,\ y - \frac{df}{dz}h,\ z\right) = 0;$$

posons

$$\frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = c,$$

et

$$f(x + bh,\ y - ah,\ z) = u_2 h^2 + u_3 h^3 \ldots u_n h^n,$$

car les deux premiers termes disparaissent, à cause des deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad b\frac{df}{dx} - a\frac{df}{dy} = 0;$$

la tangente coupe la courbe en $n - 2$ points donnée par l'équation

$$(3)\left\{ 0 = \frac{1}{h^2} f(x + bh, y - ah, z) = u_2 + u_3 h + \ldots + u_n h^{n-2}.\right.$$

Si cette équation a deux racines égales, la tangente devient *double*, c'est-à-dire qu'elle touche la courbe en deux points différents. Alors on doit avoir, comme ci-dessus,

$$\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n) = 0.$$

Cette équation détermine, avec celle-ci,

$$f(x, y, z) = 0,$$

le nombre des tangentes doubles.

Dans l'équation (3), remplaçons h par hy, et se rappelant que l'on a, à cause de l'homogénéité,

$$xa + yb + zc = nf = 0 \quad \text{et} \quad by = -xa - zc,$$

on aura successivement

$$(4)\left\{\begin{aligned} & y^2 u_2 + y^3 u_3 h + y^4 u_4 h^2 + \ldots + y^n u_n h^{n-2} \\ & = \frac{1}{h^2} f(x + ybh, y - yah, z) \\ & = \frac{1}{h^2} f(xA - zch, yA, zA + zah) \\ & = \frac{A^n}{h^2} f\left(x - \frac{zch}{A}, y, z + \frac{zah}{A}\right),\end{aligned}\right.$$

où

$$A = 1 - ah.$$

Faisons

$$(5)\quad f(x - ch, y, z + ah) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v_n h^n.$$

remplaçant h par $\frac{zh}{A}$, on obtient

$$f\left(x - \frac{zch}{A}, y, z + \frac{zah}{A}\right) = \frac{z^2 v_2 h^2}{A^2} + \ldots + \frac{z^n v_n h^n}{A^n};$$

donc, à cause de l'équation (4),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & y^2 u_2 + y^3 u^3 h + \ldots + y^n u_n h^n \\ & = z^2 v_2 A^{n-2} + z\, v_3 A^{n-3} h + z^4 v_4 A^{n-4} h + \ldots + z^n v_n h^{n-2}, \end{aligned}\right.$$

mettant à la place de A sa valeur $1 - ah$, et développant le membre à droite, suivant les puissances croissantes de h, supposons que l'on ait

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & z^2 \beta_2 + z^2 \beta_3 h + z^2 \beta_4 h^2 + \ldots + z^2 \beta_n h^n \\ & = z^2 v\, A^{n-2} + \ldots + z^n v_n h^{n-2}, \end{aligned}\right.$$

alors

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & y_2 u_2 + y_3 u_3 h + y_4 u_4 h + \ldots + y^n u_n h^n \\ & = z^2 \beta + z^2 \beta_3 h + \ldots + z^2 \beta_n h^{n-2}, \end{aligned}\right.$$

et de là

$$(9)\quad y\, u_2 = z^2 \beta_2,\quad y^3 u = z^2 \beta_3,\quad y^n u_n = z^2 \beta_n.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation de la courbe $f = 0$, on peut opérer la transformation des coefficients $y^i u_i$.

Si, dans l'identité (2) employée ci-dessus (p. 144), on remplace respectivement α_i, t, m, B_0, B_m par u_{i+2}, y, $n-2$, 2, n, on obtient

$$\Delta(y^2 u_2, y^3 u_3, \ldots, y^n u_n) = y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n);$$

les équations (9) donnent

$$\Delta(y^2 u_2, y^3 u, \ldots, y^n u_n) = \Delta(z^2 \beta_2, z^2 \beta, \ldots, z^2 \beta_n);$$

donc

$$y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u^2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta(z^2 \beta, z^2 \beta_3, \ldots, z^2 \beta_n).$$

Si, dans l'équation (7), on remplace h par $\frac{1 - ah}{h}$, et qu'on ait égard au corollaire du théorème 4 (p. 146), et puisque ici

$$\gamma\delta' - \gamma'\delta = 1,$$

on a donc

$$\Delta(z^2\beta_2, z^2\beta_3, \ldots, z^2\beta_n) = \Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n),$$

et

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u^2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n).$$

Enfin, comme on a aussi l'équation identique

$$\Delta(z^2 v_2, z^2 v_3, \ldots, z^2 v_n) = z^{(n-3)(n+2)}\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n),$$

donc

$$(10)\quad y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2, u_3, u_n) = z^{(n-3)(n+2)}\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n);$$

on a eu ci-dessus

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2}f(x+bh, y-ah, z) = u_2 + u^3 h + \ldots + u_n h^{n-2}, \\ \frac{1}{h^2}f(x-ch, y, z+ah) = v_2 + v_3 h + \ldots + v_n h^{n-2}. \end{cases}$$

Or, a, b, c sont des fonctions homogènes en x, y, z, chacune de degré $n-1$; donc les coefficients u_{i+2}, v_{i+2} sont des fonctions homogènes de même degré; donc aussi les deux membres de l'équation (10) sont des fonctions homogènes de même degré en x, y, z, car elles sont formées de la même manière avec les fonctions homogènes u_{i+2}, v_{i+3}.

Si, dans l'équation (10), on fait $z=1$, on voit que la fonction $y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)$ peut, au moyen de l'équation $f=0$, devenir $\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n)$, par conséquent s'abaisser de $(n-3)(n+2)$ unités; donc, en vertu du théorème 6 (p. 147), la fonction $\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)$ peut aussi se changer en une fonction Δ' abaissée de $(n-3)(n+2)$ unités.

La proposition 6 ne subsiste qu'autant que tous les termes les plus élevés de f_n ne sont pas divisibles par y, c'est-à-dire que le terme x^n ne manque pas. C'est ce qu'on peut toujours obtenir par un changement d'axes de coordonnées. Dans la seconde des équations (11), désignons le degré de v_{i+2} par B_i, u_2 renferme $b^2 \frac{d^2 f}{dx^2}$; ainsi, B_0 est de même degré que v_2 ou u_2, par conséquent de degré

$$2(n-1)+n-2=3n-4;$$

B_1 est de degré $3(n-1)+n-3=4n-6$, etc., de sorte que les quantités $B_0, B_1, \ldots, B_{n-2}$ forment une progression arithmétique dont la raison est $n-2$, et $B_{n-2}=n(n-1)$. Il suit donc du théorème 3 (p. 141), en y faisant $m=n-2$, que le degré de $\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n)$ est

$$(n-3)(B_0+B_m)=(n-3)(n^2+2n-4);$$

donc le degré de Δ' est

$$(n-3)(n^2+2n-4)-(n-3)(n+2)=(n-2)(n^2-9);$$

ainsi, le système des deux équations

$$f=0, \quad \Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n)=0,$$

peut être remplacé par le système $f=0$, $\Delta'=0$, deux équations dont la première est de degré n et la seconde de degré $(n-2)(n^2-9)$; et chaque système de valeurs de x, y qui satisfait à un système d'équations, satisfait aussi à l'autre.

$n(n-2)(n^2-9)$ systèmes de valeurs satisfont aux équations

$$f=0, \quad \Delta'=0;$$

il n'y a donc que ce nombre de valeurs de x, y qui satisfassent aux équations

$$f=0, \quad \Delta(u_2, \ldots, u_4)=0,$$

valeurs qui rendent $f=0$, et qui, substituées dans l'équation

$$0=u_2+u_3 h+\ldots+u_4 h^{n-2},$$

donnent à cette équation deux racines égales; mais ces valeurs de x, y sont les coordonnées des points de la courbe où la tangente touche encore la courbe en un autre point; de sorte que ces valeurs de x, y sont les coordonnées des points de contact des doubles tangentes. Ainsi ces points sont donnés par l'intersection de la courbe du degré n $(f = 0)$ avec une autre courbe $(\Delta' = 0)$ de degré $(n-2)(n^2-9)$; ainsi *le nombre de ces points de contact est en général* $n(n-2)(n^2-9)$.

Deux de ces points de contact appartiennent toujours à la même tangente; donc le nombre des doubles tangentes est $\frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$. C. Q. F. D.

8. Toute cette démonstration est fondée sur la remarquable équation (10) qui a été déduite de l'équation (4),

$$f(x+ybh, y-yah, z) = (1-ah)^n f\left(x - \frac{zch}{1-ah}, y, z + \frac{zah}{1-ah}\right).$$

Si l'on pose

$$A = 1 - ah, \quad B = 1 + bh, \quad C = 1 + ch,$$
$$A' = 1 - ah, \quad B' = 1 + bh, \quad C' = 1 + ch;$$

ensuite

$$f(x, y+ch, z-bh) = \varphi(h),$$
$$f(x-ch, y, z+ah) = \varphi_1(h),$$
$$f(x+bh, y-ah, z) = \varphi_2(h),$$

on obtient de la même manière que l'on a obtenu l'équation (4), les équations

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_2(yh) = A^n \varphi_1\left(\frac{zh}{A}\right), & \varphi_1(zh) = A'^n \varphi_2\left(\frac{yh}{A'}\right); \\ \varphi(zh) = B^n \varphi_2\left(\frac{xh}{B}\right), & \varphi_2(xh) = B'^n \varphi\left(\frac{zh}{B'}\right), \\ \varphi_1(xh) = C^n \varphi\left(\frac{yh}{C}\right), & \varphi(yh) = C'^n \varphi_1\left(\frac{xh}{C'}\right); \end{array}\right.$$

l'équation (10) a été déduite de la première équation de la première ligne horizontale. On aurait aussi pu la déduire de la deuxième équation de cette même ligne.

On déduit deux équations analogues à l'équation (10) des quatre autres équations. Ces résultats sont renfermés dans le théorème suivant :

THÉORÈME. *Représentons par* $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, *une fonction entière homogène des quantités* $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$, *de degré* $2m-2$, *telle qu'en l'égalant à zéro, elle donne la condition pour que l'équation*

$$\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_m h^m = 0$$

ait deux racines égales ; soit ensuite $f(x, y, z)$ *une fonction entière homogène de* x, y, z *de degré* n; *enfin, posant*

$$\varphi_2(h) = f\left(x + \frac{df}{dy}h, y - \frac{df}{dx}h, z\right) = u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots + u_n h^n,$$

$$\varphi_1(h) = f\left(x - \frac{df}{dz}h, y, z + \frac{df}{dx}h\right) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v_n h^n,$$

$$\varphi(h) = f\left(x, y + \frac{df}{dz}h, z - \frac{df}{dy}h\right) = w_2 h^2 + w_3 h^3 + \ldots + w_n h^n,$$

$$\Delta(u_2, u_3, \ldots, u_n) = \Delta,$$
$$\Delta(v_2, v_3, \ldots, v_n) = \Delta_1,$$
$$\Delta(w_2, w_3, \ldots, w_n) = \Delta_2,$$

où Δ, Δ_1, Δ_2 *sont des fonctions homogènes de* x, y, z *de degré* $(n-3)(n^2+2n-4)$; *alors il résulte de l'équation* $f = 0$ *les proportions*

$$\Delta : \Delta_1 : \Delta_2 = z^{(n-3)(n+2)} : y^{(n-3)(n+2)} : x^{(n-3)(n+2)}.$$

Sur le nombre de points d'inflexion.

10. Soit

$$0 = f\left(x + \frac{df}{dy}h, y - \frac{df}{dx}h, z\right) = u_2 h + u_3 h^2 + \ldots + u_n h^{n-1};$$

si l'on a encore $u_2 = 0$, les coordonnées du point qui satisfont à cette équation et à celle de la courbe $f = 0$ sont les coordonnées d'un point d'inflexion ; la tangente devient osculatrice. Si dans l'équation (6) (p. 151) on fait $h = 0$ et $A = 1$, on obtient

$$y^2 u_2 = z^2 v_2;$$

si l'on fait $z = 1$, la fonction $y^2 u_2$, et par conséquent la fonction u_2 se réduit de *deux unités;* mais u_2 est de l'ordre $3n - 4$; elle peut donc se ramener, à l'aide de l'équation $f = 0$, à une fonction u'_2 de l'ordre $3n - 6$; par conséquent, le nombre de points d'inflexion est $3n(n - 2)$, ainsi que M. Plücker l'a indiqué (*voir* t. IX, p. 293, th. 25).

11. L'équation (6) montre aussi que toutes les fonctions u_3, u_4, etc., peuvent se réduire de deux unités à l'aide de l'équation $f = 0$; car, si dans l'équation (6) on remplace A par $1 - ah$, et comparant les coefficients des mêmes puissances de h, on obtient

$$y^2 u_2 = z^2 v^2, \quad y^3 u_3 = z^3 v_3 - (n - 2) z^2 a v^2 \ldots;$$

faisant $z = 1$, $y^3 u_3$ et aussi u_3 s'abaisse de *deux* unités, et ainsi des autres. On peut aussi obtenir v en u, à l'aide des équations (12).

Sur le nombre de tangentes communes à deux courbes.

12. Ce nombre s'obtient facilement par la théorie des polaires réciproques ; mais on peut le trouver analytiquement par la théorie précédente.

Soient

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les équations de deux courbes de degrés m et n, ou simplement $\varphi = 0$, $f = 0$, x et y étant les coordonnées d'un point P de la courbe f ; faisons derechef

$$\frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = c, \quad p = x + bh, \quad q = y - ah,$$

les valeurs de h donnent les coordonnées courantes de la tangente en P; les valeurs de h qui correspondent aux points où la tangente en P coupe la courbe φ, sont déterminées par l'équation

$$\varphi(p, q, z) = \varphi(x + bh, y - ah, z) = 0.$$

La condition pour que cette équation acquière deux racines égales détermine les points P de la courbe f, qui jouissent de la propriété que les tangentes en ces points touchent aussi la courbe φ; le nombre de ces points est celui des tangentes communes.

Soit

$$\varphi(x + bh, y - ah, z) = u_0 + u_1 b + u_2 h^2 + \ldots + u_m h^m = 0;$$

pour que cette équation ait deux racines égales, on doit avoir

$$\Delta(u_0, u_1, \ldots, u_m) = 0,$$

où Δ désigne une fonction homogène en x, y, z de degré $2m - 2$; on a

$$xa + yb + zc = 0;$$

faisons comme ci-dessus,

$$A = 1 - ah,$$

nous obtiendrons

$$\varphi(x + ybh, y - yah, z) = A^m \varphi\left(x - z\frac{ch}{A}, \quad y, \quad z - z\frac{ah}{A}\right);$$

posons

$$\varphi(x - ch, y, z + ah) = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \ldots + v_m h^m,$$

et opérant comme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} & u_0 + yu_1 h + y^2 u_2 h^2 + \ldots + y^m v_m h^m \\ = {} & v_0 A^m + zv_1 A^{m-1} A h + z^2 v_2 A^{m-2} h^2 + \ldots + z^m v_m h^m \\ = {} & \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 + \ldots + \beta_m h^m. \end{aligned}$$

On a

$$u_0 = \beta_0, \quad yu_1 = \beta_1, \quad y^2 u_2 = \beta_2, \ldots, \quad y^m u_m = \beta_m.$$

et à l'aide du théorème 4,

$$\Delta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) = \Delta(v_0, zv_1, z^2 v_2, \ldots, z^m v_m)$$
$$= \Delta(u_0, y u_1, y^2 u_2, \ldots, y^m u_m);$$

et le théorème 3 donne

$$\Delta(v_0, zv_1, z^2 v_2, \ldots, z^m v_m) = z^{m(m-1)} \Delta(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m),$$
$$\Delta(u_0, yu_1, y^2 u_2, \ldots, y^m u_m) = y^{m(m-1)} \Delta(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

donc

$$y^{m(m-1)} \Delta(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m) = z^{m(m-1)} \Delta(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Cette équation montre qu'en faisant $z = 1$, on peut, à l'aide de l'équation $f = 0$, ramener la fonction $y^{m(m-1)} \Delta(u_0, \ldots, u_m)$, et par conséquent aussi $\Delta(u_0, \ldots, u_m)$, à une autre fonction Δ' dont le degré est diminué de $m(m-1)$ unités.

Désignant le degré de v_ι par B_ι, les nombres $B_0, B_1, \ldots, B_m$ forment une progression arithmétique, et l'on a

$$B_0 = m,$$
$$B_1 = m - 1 + n - 1 = m + n - 2,$$
$$B_2 = m - 2 + 2(n-1) = m + 2n - 4,$$
$$B_m = m(n-1) \quad (\text{car les } v \text{ renferment des } a, b, c, \ldots).$$

La fonction $\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ monte donc au degré $(m-1)(B_0 + B_m) = mn(m-1)$; ainsi la fonction Δ' est du degré $mn(m-1) - m(m-1) = m(m-1)(n-1)$; ainsi les points P de la courbe f, qui ont la propriété énoncée, sont donnés par l'intersection d'une courbe f de degré n et d'une courbe $\Delta' = 0$ de degré $m(m-1)(n-1)$: le nombre de ces points est donc $mn(m-1)(n-1)$; résultat connu par la théorie des polaires réciproques.

Ce Mémoire, de l'illustre et à jamais regrettable analyste, qui complète enfin la théorie des polaires réciproques (*voir* t. IX, p. 295), est suivi d'une Lettre de son savant élève, le professeur Otto Hesse; elle est datée de Kœnisberg, le 30 décembre 1849. Nous la traduisons *in extenso :*

« Je vous suis d'autant plus reconnaissant de ce que vous m'avez communiqué la démonstration relative aux *tangentes doubles,* que cela m'a engagé à faire un dernier effort pour trouver l'équation débarrassée de tous les termes superflus de la courbe qui passe par les points de contact des doubles tangentes pour une courbe du quatrième ordre : je savais d'ailleurs qu'une telle équation doit exister, car je puis indiquer *sept* coniques qui passent par ces points (*), non pas de la manière que ferait présumer le théorème *inexact* de Plücker sur les coniques passant par ces points, mais d'une toute autre manière, trop longue pour être donnée ici. Mon essai a réussi, et voici le résultat : soient $u = 0$ l'équation de la courbe du quatrième ordre; Δ le *déterminant* de la fonction u formée de ses coefficients différentiels du second ordre $u_{11}, u_{22}, \ldots$ (**). Soient ensuite $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots$, les premiers et seconds coefficients différentiels de Δ. Si l'on pose

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{22}\, u_{33} - u_{23}^2, & v_{23} &= u_{13}\, u_{12} - u_{11}\, u_{23}\,; \\ v_{22} &= u_{33}\, u_{11} - u_{13}^2, & u_{31} &= u_{21}\, u_{23} - u_{22}\, u_{31}\,; \\ v_{33} &= u_{11}\, u_{22} - u_{12}^2, & u_{12} &= u_{32}\, u_{31} - u_{33}\, u_{12}, \end{aligned}$$

l'équation cherchée du 14[e] ordre est

$$\begin{gathered} (\Delta_1^2 v_{11} + \Delta_2^2 v_{22} + \Delta_3^2 v_3^2 v_{33} + 2\Delta_2 \Delta_3 v_{23} + 2\Delta_3 \Delta_1 v_{31} + 2\Delta_1 \Delta_2 \Lambda_{12}) \\ - 3\Delta_{11} v_{11} + \Delta_{22} v_{22} + \Delta_{33} v_{33} + 2\Delta_{23} v_{23} + 2\Delta_{31} v_{31} + 2\Delta_{12} v_{12}) = 0. \end{gathered}$$

» Veuillez avoir la bonté de remettre les Mémoires ci-joints à M. G.-R. Crelle. Agréez les vœux des plus sincères pour la nouvelle année, de votre très-dévoué disciple. »

(*) Points qui sont au nombre de cinquante-six.

(**) Voir tome X, page 124.

Observation. C'est M. Hesse qui a introduit la *théorie des homogènes* dans la science. Voici ce que M. Jacobi dit, à l'occasion de cette introduction, dans le Mémoire ci-dessus sur les doubles tangentes : « Les formules » de la Géométrie analytique ont gagné essentiellement » en simplicité et en symétrie, en introduisant la fonc- » tion homogène $f(x, y, z)$ de trois variables x, y, z, » au lieu de la fonction non homogène $f(x, y)$; et sans » cette introduction, plusieurs des plus importantes re- » cherches ne pourraient se faire sans de très-pénibles » longueurs. Les recherches suivantes montreront de » nouveau l'utilité de cet important moyen auxiliaire. »

Ce puissant auxiliaire est encore ignoré en France, pays de l'Europe où l'enseignement mathématique est le plus arriéré, et où des prescriptions *misologues* viennent repousser encore ce maigre enseignement au-dessous de celui de 1650 (*).

M. Poncelet a démontré les théorèmes suivants :

1°. *Une courbe plane* A *de degré* n, *a*, généralement parlant, *pour polaire réciproque, une courbe de degré* $n(n-1)$;

2°. *Si la courbe* A *a* α *points doubles et* β *points de rebroussement, le degré de la courbe* B *est diminué de* $2\alpha + 3\beta$ *unités ;*

3°. *A chaque tangente double de* A *correspond un point double dans* B; *à chaque point d'inflexion de* A *correspond un point de rebroussement dans* B.

Faisons

$$n(n-1) = n';$$

la polaire réciproque de B, d'après le théorème 1, devrait

(*) Au XVII^e siècle, la géométrie segmentaire était enseignée.

être du degré

$$n'(n'-1) = n^4 - 2n^3 + n;$$

toutefois, cette polaire réciproque n'est que du degré n; elle s'abaisse ainsi de $n^4 - 2n^3$ unités : cela ne peut provenir que des points doubles et de rebroussement de la courbe B, ou, ce qui revient au même (théorème 3), des tangentes doubles et des points d'inflexion de la courbe A.

Si α représente le nombre des tangentes doubles, et β le nombre des points d'inflexion, on devra avoir

$$2\alpha + 3\beta = n^4 - 2n^3;$$

or, M. Plücker a démontré que l'on a

$$\beta = 3n(n-2).$$

Il a conjecturé que

$$\alpha = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$$

(*voir* tome IX, page 295); et il a même démontré l'exactitude de la valeur de α pour $n = 4$; dès lors

$$2\alpha + 3\beta = n^4 - 2n^3.$$

M. Jacobi a, le premier, démontré la généralité de la valeur de α. Ainsi, le paradoxe que présentait la théorie des polaires réciproques est complétement expliqué.