DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1851

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 84-90
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__84_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851;

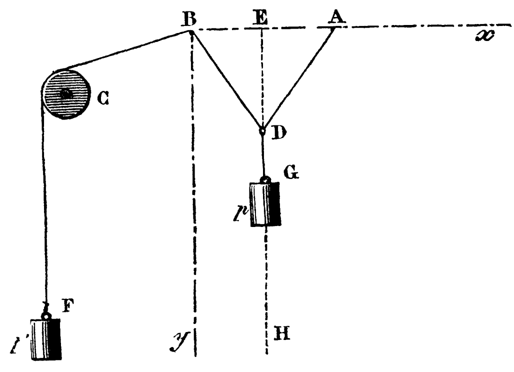
PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Un poids p est suspendu à un anneau D; dans cet anneau passe une corde qui, d'une part, est attachée à un point fixe A, et qui, d'autre part, après avoir passé sur une poulie de renvoi B, va s'enrouler sur un cylindre homogène horizontal C, mobile autour de son axe, et soutient enfin un contre-poids p'.

On fait abstraction du poids, de la roideur et de l'épaisseur de la corde, ainsi que des frottements. La poulie de renvoi B est supposée infiniment petite et à la même hauteur que le point fixe A. Trouver le mouvement du système en supposant qu'il n'y ait pas de vitesse initiale.



Nous supposerons qu'à l'instant où le mouvement commence, les cordes, considérées comme des lignes parfaitement flexibles et inextensibles, sont comprises dans le plan vertical P des centres de gravité des deux poids p, p';

que l'anneau D, considéré comme un point, est au milieu de la partie ADB de la corde AF; enfin, que le mouvement vient de ce qu'on abandonne le poids qui remontera, et que l'on avait retenu jusque-là.

Il suffit, pour répondre à la question, de déterminer le mouvement du point D. Or il est évident, à priori, que ce point ne sortira pas du plan P, et l'on peut démontrer, de plus, qu'il restera sur la verticale EH du milieu de AB. En effet : 1° le mouvement initial de D sera celui d'un point libre, auquel on appliquerait simultanément trois forces, dont la résultante est dirigée suivant EH, l'une égale à la tension de la corde DG, qui est verticale, et les deux autres dirigées suivant DA et DB, égales à la tension de la corde ADBF; 2° si l'on admet que D soit parvenu en D' sur EH, après un certain temps, et que sa vitesse acquise soit dirigée suivant cette droite, on pourra encore considérer ce point comme libre, en lui appliquant trois forces qui seront dans les mêmes conditions que les trois forces dont nous venons de parler, et le mouvement continuera dans la direction EH.

Les axes des coordonnées étant pris comme la figure l'indique, nous désignerons par y l'ordonnée de D, et par y' celle de F, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement.

AB étant représentée par $2a$, on doit avoir

$$y' + 2\sqrt{a^2 + y^2} = const.;$$

d'où l'on tire

$$\delta y' + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\,\delta y = 0$$

et

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2a^2}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Les forces perdues sont représentées : pour le poids p, par

$$\frac{p}{g}\left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

et pour le poids p', par

$$\frac{p'}{g}\left(g - \frac{d^2y'}{dt^2}\right);$$

car les y des centres de gravité de ces poids ne diffèrent respectivement que par des constantes de ceux des points D et F.

On a donc l'équation

$$\frac{p}{p'}\left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(g - \frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' = 0,$$

d'après une règle connue; et l'on en déduit facilement

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(k + \dfrac{y^2}{a^2+y^2}\right)\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{a^2y}{(a^2+y^2)^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 \\ \quad - g\left(k - \dfrac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

en remplaçant $\delta y'$, ainsi que $\frac{d^2y'}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, en posant $\frac{p}{p'} = 4k$.

Comme l'équation (1) ne contient pas t, son ordre s'abaisse en prenant y pour variable indépendante. Si l'on fait pour cela

$$\frac{dt}{dy} = z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = D_y\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{z^3}\cdot\frac{dz}{dy},$$

on a

$$(2)\quad \left(k + \frac{y^2}{a^2+y^2}\right)\frac{dz}{dy} - \frac{a^2y}{(a^2+y^2)^2}z + g\left(k - \frac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}}\right)z^3 = 0$$

Cette équation, qui rentre dans le type connu sous le nom d'*équation de Bernoulli*, devient linéaire en posant

$$\frac{1}{z^2} = u,$$

d'où

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dy}:$$

et l'on a

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} + \dfrac{a^2}{k+1} \cdot \dfrac{2y}{(\beta^2+y^2)(a^2+y^2)} u \\ \quad = \dfrac{2g}{k+1} \cdot \dfrac{k\sqrt{a^2+y^2} - \frac{1}{2}y}{\beta^2+y^2} \sqrt{a^2+y^2}, \end{cases}$$

si l'on fait

$$\frac{a^2 k}{k+1} = \beta^2.$$

Par la comparaison de l'équation (3) avec le type

$$\frac{du}{dy} + \mathrm{Y} u = \mathrm{Y}_{,},$$

dont l'intégrale est

$$u = e^{-\int \mathrm{Y}\,dy}\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Y}_{,} e^{\int \mathrm{Y}\,dy}.dy\right).$$

on trouve facilement qu'il faut faire

$$e^{-\int \mathrm{Y}\,dy} = \frac{a^2+y^2}{\beta^2+y^2}.$$

et

$$\int \mathrm{Y}_{,} e^{\int \mathrm{Y}\,dy}.dy = \frac{g}{k+1}\left(2ky - \sqrt{a^2+y^2}\right),$$

afin d'avoir l'intégrale de l'équation (3), qui est

$$u = \frac{g}{k+1} \cdot \frac{a^2+y^2}{\beta^2+y^2}\left(\mathrm{C}_{,} + 2ky - \sqrt{a^2+y^2}\right),$$

si l'on met $\dfrac{\mathrm{C}_{,} g}{k+1}$ au lieu de C.

Mais, $\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{u}}$; donc on a

$$(4)\quad dt = \pm \frac{\sqrt{k+1}}{g} \cdot \sqrt{\frac{\beta^2 + y^2}{a^2 + y^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C_{,} + 2ky - \sqrt{a^2 + y^2}}},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où le point D descend, et le signe inférieur à celui où il remonte, puisque dt doit être positive.

On ne peut intégrer l'équation (4) sous forme finie; mais il est possible de reconnaître quel sera le mouvement du point D, par la discussion de cette équation.

Il convient de déterminer, premièrement, la constante arbitraire $C_{,}$; or, en désignant par y_0 la valeur initiale de y, on voit qu'il faut prendre

$$C_{,} = \sqrt{a^2 + y_0^2} - 2ky_0,$$

pour que $\frac{dy}{dt}$ soit initialement nulle, et nous supposerons, dans ce qui suit, que $C_{,}$ a cette valeur.

Les poids p et p' resteraient en équilibre, si l'on avait

$$p = \frac{2p'y_0}{\sqrt{a^2 + y_0^2}} = p_{,};$$

par conséquent, on devra examiner successivement les deux hypothèses : $p > p_{,}$ et $p < p_{,}$.

1°. Soit $p > p_{,}$. Le poids p l'emportera, de sorte que l'on doit prendre le signe $+$ dans le second membre de l'équation (4).

Si l'on pose

$$C_{,} + 2ky - \sqrt{a^2 + y^2} = z,$$

d'où

$$\frac{dz}{dy} = 2k - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} > 0$, car $p > p_{,}$ revient à $2k > \frac{y_0}{\sqrt{a^2 + y_0^2}}$:
et y augmentant à partir de y_0, $\frac{dz}{dy}$ décroît, car $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$ augmente.

Si $2k > 1$, c'est-à-dire $p > 2p'$, ce qui emporte $p > p_{,}$, $\frac{dz}{dy}$ ne peut devenir négative, car on a toujours $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} < 1$; et z croît indéfiniment avec y, car

$$2ky - \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{(4k^2 - 1)y - \frac{a^2}{y}}{2k + \sqrt{\frac{a^2}{y} + 1}}.$$

D'après cela, $\frac{dt}{dy}$ tend vers zéro, car $\beta^2 < a^2$, et, conséquemment, $\sqrt{\frac{\beta^2 + y^2}{a^2 + y^2}}$ est toujours moindre que 1.

Dans ce cas, comme on pouvait le prévoir, le mouvement descendant du point D continuera tant que la longueur de la corde AF le permettra, et la vitesse de ce point croîtra toujours.

Si $2k < 1$, c'est-à-dire lorsque p est compris entre $2p'$ et $p_{,}$, $\frac{dz}{dy}$ devient négative quand y dépasse la valeur

$$\frac{2ak}{\sqrt{1 - 4k^2}} = \frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}},$$

et z, après avoir augmenté depuis zéro jusqu'à la valeur

$$C_{,} - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

diminue, puis redevient nulle pour la valeur

$$[\alpha] \qquad y = \frac{4k\sqrt{a^2 + y_0^2} - (1 + 4k^2)\, y_0}{1 - 4k^2},$$

qui donne $\frac{dy}{dt} = 0$.

Dans ce cas, le point D ne peut atteindre, en descendant, la position déterminée par cette valeur de y, puisque sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ décroît indéfiniment, en même temps qu'il s'en rapproche indéfiniment.

2°. Soit $p < p_{\prime}$. Le poids p' l'emportera, et, par conséquent, on doit prendre le signe — dans le second membre de l'équation (4).

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} < 0$, et, y diminuant à partir de y_0, $\frac{dz}{dy}$ croît et change de signe quand y devient inférieure à $-\frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}}$ (cette valeur est moindre que y_0, dans le cas dont il s'agit maintenant, tandis qu'elle est plus grande que y_0 dans celui dont nous nous sommes occupés en dernier lieu). Comme $dy < 0$, dz est de signe contraire à $\frac{dz}{dy}$; donc z augmente depuis zéro jusqu'à

$$C_{\prime} - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

qui répond à la précédente valeur de y, puis diminue ensuite jusqu'à zéro, qui répond à la valeur [α].

D, en remontant, tend d'après cela vers la position déterminée par la valeur [α] de y; mais sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ tend simultanément vers zéro, et, par conséquent, cette position est une limite que D ne saurait atteindre.