Théorème de Pascal et ses conséquences ; d’après MM. Steiner, Plucker, Otto Hesse, Cayley, Kirkman, Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 163-176
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__163_0>

THÉORÈME DE PASCAL ET SES CONSÉQUENCES;

D'APRÈS MM. STEINER, PLUCKER, OTTO HESSE, CAYLEY, KIRKMAN, SALMON.

(*Voir* Journal de M. Crelle, tome XLI, page 60; 1850; en français, par M. Cayley.)

---

1. *Notation.* Nous désignons les six sommets d'un hexagone par les six lettres a, b, c, d, e, f;
ae est la droite qui va de a en e, et ainsi des autres;
$ae.df$ est le point d'intersection des droites ae, df, et ainsi des autres;
$abcdef$ est l'hexagone allant de a en b, de b en c, de c en d, de d en e, de e en f et de f en a.

2. On peut réunir les six sommets d'un hexagone par quinze droites ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, etc.

Points p. Ces quinze droites se coupent en quarante-cinq points, en excluant les sommets de l'hexagone.

Nous désignons chacun de ces quarante-cinq points par p, lettre initiale du nom de Pascal.

Observation. Il peut se faire que trois de ces droites se coupent en un seul point; alors, au lieu de donner trois points p, elles ne donnent qu'un seul point.

3. Six points peuvent devenir les sommets de soixante hexagones. En effet, soit l'hexagone $abcdef$; les lettres b, c, d, e, f fournissent cent vingt permutations; mais le polygone $abcdef$ est le même que le polygone $afedcb$; chaque polygone étant *double*, il n'existe donc que soixante hexagones différents.

4. THÉORÈME DE PASCAL. *Un hexagone étant inscrit dans une conique, les trois systèmes de côtés opposés fournissent chacun un point p; les trois points sont en*

ligne droite; et, réciproquement, si les trois points p ainsi obtenus sont en ligne droite, l'hexagone est inscriptible dans une conique.

Démonstration. Droites P. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème segmentaire de Desargues sur le triangle coupé par une conique. (*Voir* HAILLECOURT, tome VII, page 83. Pour la démonstration analytique, *voir* ROGUET, tome III, page 304, et LEBESGUE, tome VIII, page 139.) Il est évident qu'à chacun des soixante hexagones correspond une droite différente. Nous désignons chacune de ces droites par la lettre P.

5. THÉORÈME. *Par chaque point p passent toujours quatre droites* P *et pas davantage.*

Démonstration. Formons les quatre hexagones

abcdef,
abfdec,
abcedf,
abfedc;

les côtés opposés *ab*, *de* sont les mêmes dans les quatre hexagones, et l'on n'en peut former un cinquième ayant la même disposition; donc, etc.

Il s'ensuit que les quarante-cinq points *p* sont distribués sur les soixante droites P, et chaque point est *quadruple*, pour ainsi dire.

6. Les soixante hexagones se divisent en trente groupes ayant chacun en commun quatre côtés; les deux hexagones

abcdef,
abcdfe,

ont en commun les côtés *ab*, *bc*, *cd* consécutifs et *ef* non consécutif; et les deux droites P, correspondant à ces hexagones, se coupent dans le point *p* donné par l'intersection de *bc* et *ef*.

7. On peut former six hexagones ayant en commun trois côtés non successifs, savoir :

(1) *abcdef*,
(2) *abdcfe*,
(3) *abefdc*,
(4) *abefcd*,
(5) *abfecd*,
(6) *abfedc*;

les cinq derniers hexagones n'ont que trois côtés non successifs en commun avec le premier, les côtés *ab*, *cd*, *ef*.

8. Si deux hexagones ont en commun trois côtés non successifs, les six autres côtés forment un troisième hexagone. Soient les deux hexagones *abcdef*, *abdcfe*; ils ont en commun *ab*, *cd*, *ef*; les six autres côtés non communs, *bc*, *de*, *ae*, *bd*, *cf*, *af*, forment l'hexagone *aedbcf*, et ces trois hexagones, pris deux à deux, ont en commun trois côtés non successifs.

9. Premier théorème de M. Steiner. *Soient les trois hexagones*

$$
(A)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
abcdef; & ab.de; & cd.af; & ef.bc; & P; \\
abefcd, & ab.cf; & cd.be; & ef.ad; & P'; \\
adebcf; & de.cf; & af.be; & ad.bc; & P'';
\end{array}\right.
$$

les trois hexagones, pris deux à deux, ont trois côtés non successifs en commun; les trois droites P, P', P'', *qui correspondent à ces hexagones, se rencontrent en un même point.*

Démonstration. A côté de chaque hexagone, écrivons les trois points *p* correspondants; et, allant de gauche à droite, désignons les points de la droite

P par α, β, γ;
P' par α', β', γ';
P'' par α'', β''; γ'';

il est évident que la droite

$\alpha\alpha'$ est le prolongement de ab;
$\beta\beta'$ est le prolongement de cd;
$\alpha\alpha''$ est le prolongement de de;
$\beta\beta''$ est le prolongement de af;
$\alpha'\alpha''$ est le prolongement de cf;
$\beta'\beta''$ est le prolongement de be

Ces six droites forment l'hexagone *abedcf*, dont les trois points p sont $ab.cd$; $de.af$; $be.cf$. Donc, dans les deux triangles $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, les côtés $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$; $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$; $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ se coupent respectivement en trois points qui sont sur la droite P de l'hexagone *abedcf*; ainsi, les trois droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ ou P, P', P'' se coupent en un même point (*voir* page 115, question 254). C. Q. F. D.

A l'hexagone *abcdef*, nous avons joint l'hexagone (4) du n° 7; si l'on y joint un des quatre autres hexagones, le raisonnement précédent n'a plus lieu. Ainsi, l'hexagone *abcdef* étant donné, les deux autres qu'il y faut joindre sont déterminés. Les soixante hexagones se divisent donc en vingt groupes; chaque groupe renferme trois hexagones, dont les droites P convergent vers le même point. Nous désignons chacun de ces vingt points par la lettre s. Chaque droite P contient trois points p et un point s; tout point p est *quadruple* et tout point s est *triple*.

Ainsi, pour que les trois droites P de trois hexagones se rencontrent en un même point, il faut que, pris deux à deux, ces hexagones aient trois côtés non successifs en commun. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante.

Appelons *système conjugué* le système des trois hexagones A.

Observation. Le second polygone du système A peut s'écrire ainsi, *adcfeb*. On voit alors que le troisième polygone se déduit du second, comme le second du premier.

10. Théorème de M. Plucker. *Les droites* P *des hexagones*

(1)	*abcdef*,	P′,
(2)	*abdcfe*,	P″,
(3)	*abefdc*,	P‴,

et les côtés ab, ef, cd forment un hexagone inscriptible dans une conique.

Désignons la droite P de (1) par P′; de (2) par P″ et de (3) par P‴. Formons un hexagone avec les six côtés successifs P′, *ab*, P″, *ef*, P‴, *cd*. (O);

l'intersection de P′ et *ef* est la même que *ef*.*bc*,
l'intersection de P″ et *cd* est la même que *cd*.*ae*;
l'intersection de P‴ et *ab* est la même que *ab*.*df*.

Or ces trois intersections sont sur la droite P de l'hexagone *abcdfe*; donc l'hexagone (O) est inscriptible dans une conique.

Observation. Cette conique n'est pas la même que la conique donnée; mais la droite P, relative à cette seconde conique, est une droite P de la première conique.

Second théorème de M. Steiner. *Les quatre points s correspondant aux quatre systèmes conjugués*,

$$(A)\quad \left\{\begin{matrix} abcdef, & (a_1) \\ abefcd, & (a_2) \\ afcbed, & (a_3) \end{matrix}\right\}(\alpha),$$

$$(B)\quad \left\{\begin{matrix} acbedf, & (b_1) \\ acdfbe, & (b_2) \\ aedcbf, & (b_3) \end{matrix}\right\}(\beta),$$

$$(C)\quad \left\{\begin{matrix} adecbf, & (c_1) \\ adbfec, & (c_2) \\ afedbc, & (c_3) \end{matrix}\right\}(\gamma),$$

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{array}{ll} aedbcf, & (d_1) \\ aecfdb, & (d_2) \\ abcedf, & (d_3) \end{array}\right\}(\delta),$$

sont sur une même droite.

Désignons les droites P du système (A) par a_1, a_2, a_3; celles du système (B) par b_1, b_2, b_3, etc., et les quatre points s correspondants par α, β, γ, δ. Formons les trois hexagones avec les côtés successifs

$$a_1,\ af;\ b_1,\ de;\ c_1,\ bc;$$
$$a_3,\ af;\ b_3,\ de;\ c_3,\ bc;$$
$$a_1,\ c_3;\ b_1,\ a_3;\ c_1,\ b_3.$$

D'après le théorème précédent, le premier hexagone est inscriptible dans une conique; d_3 est la droite P de cet hexagone; le second hexagone est aussi inscriptible dans une conique, et d_1 en est la droite P, et ces deux hexagones ont les mêmes six sommets; car l'intersection de a_1 et bc est le point $bc.ef$; et l'intersection de c_3, bc est aussi le même point $bc.ef$: ainsi les six sommets a_1, bc; bc, c_1; c_1, de; de, b_1; b_1, af; af, a_1; sont les mêmes que les sommets c_3, bc; bc, a_3; b_3, de; de, c_3; a_3, af.

Or le troisième hexagone a les mêmes sommets que les deux précédents; car a_1 et c_3 se coupent au point $bc.ef$, qui est le même que $bc.a_1$, et ainsi des autres; donc le troisième hexagone est aussi inscriptible, et, par conséquent, les points a_1, a_3; b_1, b_3; c_1, c_3 sont sur une même droite; donc les points α, β, γ sont sur une même droite, de même β, γ, δ; donc les quatre points α, β, γ, δ sont sur une même droite.

Cette démonstration et celle du premier théorème (9) sont de M. Plücker.

11. *Droites* S. Nous désignons ces droites par la lettre S;

les vingt points s sont distribués quatre à quatre sur une même droite; comme chaque point s est commun à trois droites, il s'ensuit qu'il existe quinze droites S correspondant aux quinze manières de réunir les sommets de l'hexagone (2); ainsi, par chaque point s passent trois droites P et trois droites S.

12. Théorème de M. Otto Hesse. *Soit* O *un point où se réunissent trois droites* S, *et soient* α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', *les autres points s qui se trouvent respectivement sur la première, la deuxième et la troisième droite* S; *les points* α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'', *sont les sommets de trois triangles. Les intersections des côtés homologues des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, *donnent trois points s situés sur une droite* S; *de même les intersections respectives des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$; *les trois nouvelles droites* S *se rencontrent en un point* O' *qui est aussi un point s; les points* O *et* O' *sont conjugués relativement à la conique. Cette figure renferme quinze droites, savoir : les trois droites* S *données, les neuf côtés des triangles et les trois droites* S *qui s'en déduisent; et vingt points, savoir : les dix points s donnés et les dix points qui s'en déduisent; ce sont les quinze droites* S *et les vingt points s; ces vingt points forment dix couples, et les points de chaque couple sont conjugués relativement à la conique.*

Démonstration. A trouver.

13. Théorème de M. Kirkman. *Les trois droites* P *des hexagones*

$$\begin{array}{ll} abcdef, & P_1, \\ abefdc, & P_2, \\ acbedf, & P\ , \end{array}$$

convergent vers le même point.

Démonstration. Les trois points

$A = af.cd$; $B = ab.de$; $C = bc.ef$, déterminent la droite P_1,
$A' = be.cd$; $B' = ac.ef$; $C' = ab.df$, déterminent la droite P_2,
$A'' = be\ af$; $B'' = bc.df$; $C'' = ac.de$, déterminent la droite P_3,

où le signe $=$ exprime que le point A, par exemple, est l'intersection des lignes af, cd, et ainsi des autres.

Les points A, A', A''; B, B', B''; C, C', C'', sont les sommets de trois triangles.

Combinons A avec C :

le côté AA' se confond avec la droite cd,
le côté AA'' se confond avec la droite df,
le côté A'A'' se confond avec la droite be,

le côte CC' se confond avec la droite P de l'hexagone *aefdcb*,
le côte CC'' se confond avec la droite *acbdef*,
le côté C'B'' se confond avec la droite *acfdeb*.

Ainsi,

le point $AA'.CC' = cd.ae$,
le point $AA''.CC'' = af.bd$,
le point $A'A''\ C'C'' = be.cf$.

Ces trois points sont sur la droite P de l'hexagone *afcdbe*; donc les trois droites P_1, P_2, P_3, passent par le même point (*voir* page 115, question 254).

En combinant A avec B, on trouve que les trois points sont sur la droite P de *afbecd*; les deux droites P des hexagones

afcdbe,
afbecd,

donnent un point s.

14. *Points* k. Nous désignons par la lettre k les points qu'on trouve par ce théorème. Il y a cette différence entre les points s et k : un point s est donné par le système

abcdef,
abefcd,
adebcf.

Remplaçant le premier polygone par le second, on a le système

abefcd,
abcdef,
adebcf,

le même que le précédent. On trouve encore le même système en prenant le troisième hexagone pour le premier; de sorte que les soixante hexagones ne donnent que vingt points *s*, tandis qu'un point *k* est donné par le système

abcdef,
abefdc,
acbedf.

Prenant le second hexagone pour le premier hexagone, on a le système

abefdc,
abdcef,
acbedf,

système différent du premier et donnant un autre point *k*. Il existe donc soixante points *k*.

15. Théorème de M. Cayley. *Les trois points k corpondant aux systèmes*

$$\left.\begin{matrix} abcfed \\ abedfc \\ acbefd \end{matrix}\right\} k_1,$$

$$\left.\begin{matrix} abcdfe \\ abfedc \\ acbfde \end{matrix}\right\} k_2,$$

$$\left.\begin{matrix} abcedf \\ abdfec \\ acbdef \end{matrix}\right\} k_3,$$

sont en ligne droite.

Démonstration. Droites C. Ayant égard aux vingt-sept points p des neuf droites P de ces neuf hexagones, on voit que

le point k_1 est le même que le point $B'B''.C'C''$ \
le point k_2 est le même que le point $B\,B'.C\,C'$ du theorème précédent. \
le point k_3 est le même que le point $B\,B''.C\,C''$

Or ces trois derniers points sont sur une même droite (13); donc les trois points k sont sur une même droite, que nous désignerons par la lettre C; ainsi, les soixante points k sont distribués sur vingt droites C.

16. Théorème de M. Salmon. *Chaque droite* C *passe par un point s.*

Démonstration. Nous avons vu ci-dessus (13) que la droite qui renferme les points k_1, k_2, k_3, passe par un point s; ainsi, d'après ce théorème, chaque point s est le point de rencontre de trois droites P et d'une droite C.

17. *Droites* K. Second théorème de M. Kirkman. *Il existe quatre-vingt-dix droites* K, *contenant chacune deux points k et un point p.*

Démonstration. Soient le point k_1 donné par le système

$$\begin{array}{ll} abcdef, & B'', \\ abefdc, & A'', \\ acbedf, & C''; \end{array}$$

le point k_2 donné par le système

$$\begin{array}{ll} adebcf, & C', \\ adcfbc, & A', \\ acdcbf, & B', \end{array}$$

et le point p donné par

$$bc.de;$$

le point $bc.de$ est l'intersection des trois droites

$$\begin{array}{rl} acbfed, & A, \\ bc, & B, \\ de, & C; \end{array}$$

A est la droite P de l'hexagone correspondant :

le point AA′ est le même que $ad.bf$,
le point BB′ est le même que $bc.ae$,
le point AA″ est le même que $ac.ef$,
le point BB″ est le même que $bc.ef$,
le point A′A″ est le même que $cd.be$,
le point B′B″ est le même que $af.ed$;

AA′ .BB′ est la droite P de l'hexagone $adcbfe$,
AA″ .BB″ est le côté ef,
A′A″.B′B‴ est le côté cd.

Or ces trois droites se rencontrent au même point $ef.cd$; donc, d'après le théorème connu (question 254), les trois points k_1, k_2, p se rencontrent en un même point.

En changeant b en c et c en b, le point p reste le même; à chaque point p correspondent donc deux droites K : il existe donc quatre-vingt-dix droites K; par le même point p passent donc quatre droites P et deux droites K.

Observations. $cb.ed$ et $bc.de$ donnent la même droite K, et de même $cb.de$ et $bc.ed$.

18. Au résumé, le théorème de Pascal présente de remarquables :

1°. Quarante-cinq points p, vingt points s, soixante points k;

2°. Soixante droites P, quinze droites S, vingt droites C, quatre-vingt-dix droites K;

3°. Par chaque point p passent quatre droites P et deux droites K;

4°. Par chaque point s passent trois droites P et une droite C;

5°. Par chaque point k passent trois droites K.

19. M. Catalan nous a communiqué les théorèmes suivants, qu'il a consignés dans une *Application d'Algèbre à la Géométrie*, ouvrage lithographié non achevé.

THÉORÈME I. *Lorsqu'un hexagone est inscrit à une* *conique, les six points de concours des côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, sont les sommets d'un hexagone circonscriptible à une autre conique.*

Théorème II. *Quand un hexagone est circonscrit à une conique, les droites menées par les sommets, qui ne sont ni consécutifs ni opposés, sont les côtés d'un hexagone inscriptible à une autre conique.*

Théorème III. *Lorsque des hexagones* H, H′ *sont, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second; si l'on prolonge dans* H *les côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, et si l'on joint dans* H′ *les sommets qui ne sont ni consécutifs ni opposés, on obtient, d'une part, les sommets d'un hexagone h circonscriptible à une conique c, et, de l'autre, les côtés d'un hexagone h′ inscriptible dans une conique c′; le point de concours des droites qui joignent les sommets opposés de l'hexagone h est, relativement à la conique donnée* C, *le pôle de la droite sur laquelle sont situés les points de concours des côtés opposés de l'hexagone h′, et les deux hexagones h et h′ sont polaires réciproques relativement à cette même conique.*

20. *Note bibliographique.* Pascal, ayant à peine dix-sept ans, a publié son théorème en 1640. Cet opuscule de huit pages in-8°, intitulé : *Essai sur les coniques,* était complétement oublié lorsque Bossut le réimprima dans l'édition des OEuvres complètes de Pascal, qu'il donna en 1779. Ce même opuscule commence le tome IV de la nouvelle édition des OEuvres complètes, que donna Berth... en 1819. Le théorème y est simplement énoncé sous la forme de lemme I (page 2); le nom d'*hexagramme mystique* ne s'y trouve pas. On ne connaît ce nom que par une lettre de Leibnitz, datée de Paris, 30 août 1676, et adressée à Perrier, neveu de Pascal, conseiller à Cler-

mont-Ferrand. Cette lettre est à la fin du tome V de la nouvelle édition. On avait remis à Leibnitz tous les manuscrits scientifiques de Pascal, mort le 19 août 1662.

Une pièce portait pour inscription : *Generatio coni sectionum seu projectio peripheriæ, tangentium et secantium circuli in quibuscumque oculi, plani et tabulæ positionibus.*

Leibnitz dit que Pascal développe ici les propriétés fondamentales d'une certaine figure composée de six lignes droites, et qu'il nomme *hexagrammatum mysticum*. D'après cette indication, il est probable que c'est la méthode perspective qui a conduit Pascal à son théorème. En effet, la proposition est évidente lorsqu'il s'agit d'un hexagone inscrit dans un cercle et ayant les côtés opposés parallèles. La mise en perspective de cette figure donne le théorème général. Desargues avait déjà émis l'idée si féconde de considérer le parallélisme comme une convergence vers l'infini, et de ramener par la perspective les distances infinies à des distances finies : c'est même ce qui avait fait croire à Descartes que l'*hexagramme* pourrait bien appartenir à Desargues. Leibnitz ajoute que tous les écrits de Pascal étaient prêts pour l'impression et éminemment dignes de l'impression. On ignore ce qui a empêché la famille de suivre ce conseil. La publication de ces précieux travaux aurait hâté les progrès de la géométrie segmentaire. Les manuscrits sont détruits, ou gisent dans quelque lieu inexploré.

Le travail de M. Kirkman est inséré dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1850.

MÉMOIRES RELATIFS A L'HEXAGRAMME.

Journal de CRELLE.

PLUCKER, tome V, page 268; 1829.
PLUCKER, tome IX, page 411; 1833.

Plucker, tome XI, page 26; 1834.

Hesse (Otto), tome XXIV, page 36.

Jacobi (A.), lieutenant, tome XXXI, page 178; 1846.

Un historique sur le théorème. Plucker, tome XXXIV, page 337; 1846.

Möbius, tome XXXVI, page 216; 1848.

Cayley, tome XLI, page 66; 1850, en français.

Cayley, tome XLI, page 84; 1850, en français.

Hesse (Otto), tome XLI, page 269; 1851.

Anonyme, tome VI, page 310; 1830.

Annales de Gergonne.

Darraude (J.-B.), tome XIV, page 29; 1823.

Gergonne, tome IV, page 78; 1813.

Sturm, tome XVI, page 265; 1825.

Gergonne, tome XVIII, page 214; 1827.

Steiner, XVIII, page 319; 1827.

(Premiers énoncés rectifiés depuis par M. Plücker.)