

A. NÉVROUZIAN

Théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 312-314

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__312_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

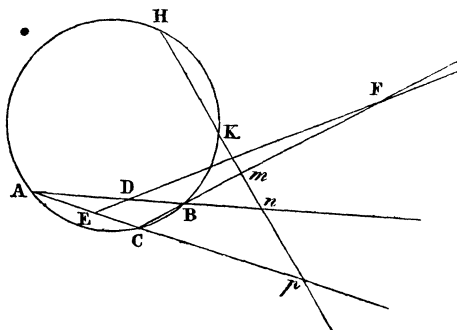
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ;

PAR M. A. NÉVROUZIAN (Arménien),

Élève, en spéciales, du lycée Louis-le-Grand, institution Sainte-Barbe.

Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle, si, par deux points H, K de la circonférence, on fait passer trois cercles tangents, respectivement, aux trois côtés du triangle, de manière que les points de contact des deux premiers soient sur les côtés AB, AC, et le point de contact du troisième, sur le prolongement du troisième côté BC ; les trois points de contact D, E, F seront en ligne droite.



Démonstration. Appelons m, n, p les points où la corde HK rencontre les trois côtés du triangle ABC.

On a, à l'égard du point D,

$$\overline{nD}^2 = nA \cdot nB, \quad \text{ou} \quad \frac{nA}{nD} = \frac{nD}{nB};$$

d'où je tire

$$\frac{nA - nD}{nA} = \frac{nD - nB}{nD},$$

c'est-à-dire

$$\frac{DA}{nA} = \frac{BD}{nD}, \quad \text{ou} \quad \frac{DA}{DB} = -\frac{nA}{nD}.$$

On a de même, sur le côté AC,

$$\frac{EC}{EA} = -\frac{pC}{pA},$$

et, sur le côté CB,

$$\frac{FB}{FC} = -\frac{mF}{mC}.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, on a

$$\frac{DA \cdot EC \cdot FB}{DB \cdot EA \cdot FC} = -\frac{nA}{nD} \cdot \frac{pE}{pA} \cdot \frac{mF}{mC}.$$

Il faut prouver que le second membre est égal à $+1$.

Or

$$\overline{nD}^2 = nA \cdot nB; \quad \overline{pE}^2 = pA \cdot pC; \quad \overline{mF}^2 = mB \cdot mC;$$

d'où

$$\frac{\overline{nD}^2}{nA} = \frac{nB}{nA}; \quad \frac{\overline{pE}^2}{pA} = \frac{pC}{pA}; \quad \frac{\overline{mF}^2}{mC} = \frac{mB}{mC};$$

donc

$$\frac{nA}{nD} \cdot \frac{pE}{pA} \cdot \frac{mF}{mC} = \pm \sqrt{\frac{nA}{nB} \cdot \frac{pC}{pA} \cdot \frac{mB}{mC}}.$$

Or, le produit sous le radical est égal à $+ 1$, parce que les trois points m, n, p sont en ligne droite; il vient donc

$$\frac{nA}{nD} \cdot \frac{pE}{pA} \cdot \frac{mF}{mC} = \pm 1.$$

L'inspection de la figure montre que le signe du second membre doit être $-$, parce que les deux rapports $\frac{nA}{nD}, \frac{pE}{pA}$ sont positifs, et le troisième $\frac{mF}{mC}$ négatif. Il en résulte l'équation

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FB}{FC} = + 1;$$

ce qui prouve que les points E, D, F sont en ligne droite.
C. Q. F. D.