NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. NÉVROUZIAN

Théorème de géométrie

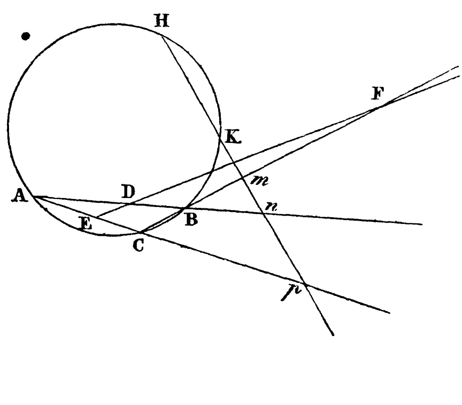
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__312_1>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. A. NÉVROUZIAN (Arménien),
Élève, en spéciales, du lycée Louis-le-Grand, institution Sainte-Barbe.

Un triangle ABC *étant inscrit dans un cercle, si, par deux points* H, K *de la circonférence, on fait passer trois cercles tangents, respectivement, aux trois côtés du triangle, de manière que les points de contact des deux premiers soient sur les côtés* AB, AC, *et le point de contact du troisième, sur le prolongement du troisième côté* BC; *les trois points de contact* D, E, F *seront en ligne droite.*



Démonstration. Appelons m, n, p les points où la corde HK rencontre les trois côtés du triangle ABC.

On a, à l'égard du point D,

$$\overline{nD}^2 = nA.nB, \quad \text{ou} \quad \frac{nA}{nD} = \frac{nD}{nB};$$

d'où je tire

$$\frac{nA - nD}{nA} = \frac{nD - nB}{nD},$$

c'est-à-dire

$$\frac{DA}{nA} = \frac{BD}{nD}, \quad \text{ou} \quad \frac{DA}{DB} = -\frac{nA}{nD}.$$

On a de même, sur le côté AC,

$$\frac{EC}{EA} = -\frac{pC}{pA},$$

et, sur le côté CB,

$$\frac{FB}{FC} = -\frac{mF}{mC}.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, on a

$$\frac{DA.EC.FB}{DB.EA.FC} = -\frac{nA}{nD}\cdot\frac{pE}{pA}\cdot\frac{mF}{mC}.$$

Il faut prouver que le second membre est égal à $+1$.

Or

$$\overline{nD}^2 = nA.nb; \quad \overline{pE}^2 = pA.pC; \quad \overline{mF}^2 = mB.mC;$$

d'où

$$\frac{\overline{nD}^2}{\overline{nA}^2} = \frac{nB}{nA}; \qquad \frac{\overline{pE}^2}{\overline{pA}^2} = \frac{pC}{pA}; \qquad \frac{\overline{mF}^2}{\overline{mC}^2} = \frac{mB}{mC};$$

donc

$$\frac{nA}{nD}\cdot\frac{pE}{pA}\cdot\frac{mF}{mC} = \pm\sqrt{\frac{nA}{nB}\cdot\frac{pC}{pA}\cdot\frac{mB}{mC}}.$$

Or, le produit sous le radical est égal à $+1$, parce que les trois points m, n, p sont en ligne droite; il vient donc

$$\frac{nA}{nD}\cdot\frac{pE}{pA}\cdot\frac{mF}{mC}=\pm 1.$$

L'inspection de la figure montre que le signe du second membre doit être $-$, parce que les deux rapports $\frac{nA}{nD}$, $\frac{pE}{pA}$ sont positifs, et le troisième $\frac{mF}{mC}$ négatif. Il en résulte l'équation

$$\frac{DA}{DB}\cdot\frac{EC}{EA}\cdot\frac{FB}{FC}=+1;$$

ce qui prouve que les points E, D, F sont en ligne droite. C. Q. F. D.