FÉLIX LAROCHE

Théorème de collinéation sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 295-296

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__295_1>

THÉORÈME DE COLLINÉATION SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. FÉLIX LAROCHE.

4. THÉORÈME. (*Fig.* 14, *Pl. II.*) *Soient* A, A_1, A_2 *les sommets d'un triangle et* O *un point dans le plan du triangle; en* O, *on élève à* OA *une perpendiculaire qui va*

rencontrer le côté opposé $A_1 A_2$ *en* B; *on détermine d'une manière analogue* B_1 *sur* AA_2 *et* B_2 *sur* AA_1; *les trois points* B, B_1, B_2 *sont en ligne droite.*

Démonstration. Désignons par ρ, ρ_1, ρ_2 les lignes OA, OA_1, OA_2;

Par δ, δ_1, δ_2 les lignes OB, OB_1, OB_2;

Par p, p_1, p_2 les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés opposés aux sommets A, A_1, A_2.

Dans les deux triangles AOB_2, BOA_2, les angles AOB_2, BOA_2 sont supplémentaires comme ayant les côtés perpendiculaires; ce qui donne

$$\frac{AB_2 . p_2}{BA_2 . p} = \frac{\rho\,\delta_2}{\rho_2\,\delta}.$$

On trouve de même,

$$\frac{A_1 B . p}{B_1 A . p} = \frac{\rho_1\,\delta}{\rho\,\delta_1},$$

$$\frac{A_2 B_1 . p_1}{B_2 A_1 . p_2} = \frac{\rho_2\,\delta_1}{\rho_1\,\delta_2};$$

d'où

$$AB_2 . A_1 B . A_2 B_1 = BA_2 . B_1 A . B_2 A_1;$$

donc, par le théorème sur les segments, les trois points B, B_1, B_2 sont en ligne droite.

Note. Dans le plan du triangle $AA_1 A_2$, traçons une ellipse; par le point O, menons une droite conjuguée de OA_1 relativement à la conique, et qui rencontre en B le côté $A_1 A_2$. Déterminons de même les points B_1, B_2 sur les côtés AA_2, AA_1 : d'après la méthode des projections symétriques, les trois points B, B_1, B_2 seront en ligne droite.

Le théorème de collinéation existe-il pour une conique quelconque? Existe-t-il sur la sphère?