PH. BRETON DE CHAMP

Suite de la question 31

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 130-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__130_0>

SUITE DE LA QUESTION 31

(Voir t. VIII, p. 61),

PAR M. PH. BRETON (DE CHAMP).

Solution générale.

La surface que nous avons discutée ci-dessus est du troisième ordre, et il a fallu donner une forme particulière à son équation pour satisfaire à la condition proposée. Dans les degrés supérieurs, en prenant toujours l'axe des x pour la droite appartenant à la surface, l'équation de cette dernière doit évidemment être de la forme

$$y\psi(x, y, z) + z\varpi(x, y, z) = 0,$$

ψ et ϖ étant des fonctions entières des coordonnées x, y, z. En effet, si l'on suppose $y = 0$, $z = 0$, l'équation est satisfaite quelque valeur qu'on attribue à x, de sorte que l'axe des abscisses appartient, comme on le demande, à la surface.

L'équation

$$(y - bx - \beta)\psi(x, y, z) + (z - cx - \gamma)\varpi(x, y, z) = 0$$

appartient de même à une surface sur laquelle la droite $y = bx + \beta$, $z = cx + \gamma$ est située tout entière. Il s'agit maintenant de voir si cette droite est la seule qui se trouve dans ce cas.

Soit m le degré de la surface, posons généralement $y = b'x + \beta'$, $z = c'x + \gamma'$, et cherchons à faire que la droite représentée par ces équations se trouve sur la surface. Le résultat de la substitution, ordonné par rapport aux puissances descendantes de x, sera de la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

et il faut que cette équation soit satisfaite quelle que soit la valeur de x, ce qui exige qu'on ait

$$(\mathrm{A}) \quad A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, A_{m-1} = 0, \quad A_m = 0.$$

De là $m+1$ conditions entre les paramètres de l'équation proposée et les quatre quantités inconnues b', c', β', γ'. En éliminant ces dernières, il restera $m-3$ conditions entre les paramètres connus.

Les équations d'où dépendent b', c', β', γ' pouvant s'élever au degré m, chacune de ces quantités est susceptible de présenter, d'après le théorème de Bezout, m^4 valeurs. Si m est pair, m^4 le sera aussi, et le nombre des systèmes de valeurs réelles des inconnues sera également pair. Donc il y aura, en général, plusieurs droites sur la surface donnée, puisque, d'après la forme de son équation, elle en admet déjà une. Ces droites pourront se confondre dans le cas des racines égales, et alors on aura une surface de degré pair satisfaisant à la question.

D'après l'hypothèse admise sur la forme de l'équation proposée, il existe au moins un système de valeurs de b', c', β', γ' qui satisfait aux équations (A); donc les $m-3$ conditions qui restent après avoir éliminé ces inconnues, sont satisfaites identiquement, et, par suite, ne peuvent servir à limiter le nombre des solutions. C'est donc à rendre égales entre elles toutes les racines réelles s'il y en a nécessairement plusieurs, ou à n'en laisser subsister qu'une seule, qu'on doit tendre dans la recherche des surfaces sur lesquelles il n'est possible de tracer qu'une seule droite, sans se préoccuper des équations de condition qui semblent devoir se présenter nécessairement. On disposera des signes des paramètres et de leurs grandeurs, comme nous l'avons fait pour une surface du troisième degré, de telle sorte qu'il n'y puisse être tracé qu'une seule droite, ou plusieurs qui se réduisent à une seule, de même que dans le cas des racines égales.