NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VERHULST

Note sur l'extraction de la racine carrée ou cubique à moins d'une demi-unité près, et sur le degré d'approximation avec lequel il faut calculer les nombres incommensurables dont on veut extraire la racine carrée ou cubique, pour que l'erreur du résultat reste au-dessous d'une limite donnée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 46-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__46_0>

NOTE

sur l'extraction de la racine carrée ou cubique à moins d'une demi-unité près, et sur le degré d'approximation avec lequel il faut calculer les nombres incommensurables dont on veut extraire la racine carrée ou cubique, pour que l'erreur du résultat reste au-dessous d'une limite donnée.

PAR M. VERHULST,
Professeur à Bruxelles.

Soit N un nombre donné, commensurable ou non; a, le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans N; $R = N - a^2$ le reste de l'extraction de la racine a. Si cette racine est approchée à moins d'une demi-unité près, on doit avoir

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ d'où } R < a + \frac{1}{4};$$

condition que l'on peut vérifier à la simple inspection de a, et que M. Bourdon a déjà mentionné dans la note qui termine son Traité d'arithmétique.

Il existe une condition analogue pour la racine cubique. Elle est moins simple, à la vérité; mais comme l'extraction de cette racine est une opération assez laborieuse, il ne faut pas dédaigner les moyens de l'abréger.

Soit N, R et a des nombres analogues aux précédents, la condition dont il s'agit sera

$$N < \left(a + \frac{1}{2}\right)^3,$$

ou

$$R < \frac{3a^2}{2} + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8} \ldots\ldots \qquad (1)$$

Sur quoi nous ferons observer que par le procédé pour l'extraction de la racine cubique rapporté dans notre *Leçon d'arithmétique*, la quantité $3a^2$ s'obtient par une simple addition de trois nombres, dont deux se trouvent déjà écrits et dont le troisième n'a que deux chiffres.

L'inégalité (1) sera satisfaite *à fortiori*, si l'on a

$$\frac{3a^2}{2} > R;$$

alors la racine a sera approchée à moins d'une demi-unité près. Dans le cas contraire, on aura

$$R > \frac{3a^2}{2} + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8},$$

ou, ce qui revient au même,

$$R + \frac{1}{4}a > \frac{3a^2}{2} + a + \frac{1}{8}. \ldots \qquad (2)$$

Cette inégalité sera satisfaite *à fortiori* si l'on a la suivante

$$R > \frac{3a^2}{2} + a + 0.125,$$

très-facile à vérifier et qui fera généralement connaître s'il faut ajouter une demi-unité à la racine a. Ce n'est que dans des cas bien rares qu'il faudra recourir à l'inégalité (2), au moyen de laquelle toute incertitude doit disparaître.

Nous croyons devoir ajouter que le problème que nous venons de résoudre a pour but principal de faciliter la solution de deux autres très-importants dans la théorie des approximations numériques. Voici l'énoncé du premier :

Soit x *un nombre incommensurable*, a *sa valeur approchée à moins de* e *près*, $\frac{1}{\gamma}$ *l'approximation avec laquelle on a extrait la racine carrée ou cubique de* a; *assigner la limite de l'erreur que comporte le résultat.*

Nous prendrons pour point de départ la formule générale

$$\sqrt[m]{a+e} < \sqrt[m]{a} + \frac{e}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}},$$

et nous traiterons d'abord le cas où $m=2$; elle donne alors

$$\sqrt{a+e} < \sqrt{a} + \frac{e}{2\sqrt{a}}.$$

Soit r la racine de a approchée à moins de $\frac{1}{\gamma}$ près, on a

$$\sqrt{a} < r + \frac{1}{\gamma},$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{a+e} < r + \frac{1}{\gamma} + \frac{a}{2\sqrt{a}}, \quad \sqrt{a+e} - r < \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{2\sqrt{a}},$$

et, à plus forte raison, pour un nombre incommensurable x compris entre a et $a+e$

$$\sqrt{x} - r < \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, la différence entre la racine vraie et la racine calculée sera moindre que $\frac{1}{\gamma} + \frac{e}{2\sqrt{a}}$, expression dans laquelle on pourra remplacer $\sqrt{a}$ par r ou par toute autre limite inférieure. Nous désignerons en général par $\frac{1}{\delta}$ la différence dont on vient de parler. D'après ce qui précède, on a, dans le cas de la racine carrée,

$$\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{2\sqrt{a}} \ldots\ldots \tag{3}$$

et l'on trouve de la même manière quand il s'agit de la racine cubique

$$\frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Le second problème est l'inverse du précédent. Il a pour énoncé : *Avec quelle approximation faut-il calculer le nombre incommensurable* x, *pour qu'en extrayant à moins de* $\frac{1}{\gamma}$ *près la racine carrée ou cubique de sa valeur approchée* a, *l'erreur ne surpasse pas* $\frac{1}{\delta}$.

Commençons par le cas de la racine carrée. On remarquera qu'en vertu de l'inégalité (3), plus e est petit, plus $\frac{1}{\delta}$ doit l'être : par conséquent, si l'on remplace e par e', $\frac{1}{\delta}$ par $\frac{1}{\delta'}$, et qu'on prenne $e' < e$, $\frac{1}{\delta'}$ sera moindre que $\frac{1}{\delta}$. D'où il suit que, si le nombre incommensurable x est compris entre a et $a+e'$, l'erreur du résultat tombera au-dessous de $\frac{1}{\delta}$. Or, pour déterminer cette limite e', il suffira de poser l'équation

$$\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}=\frac{e'}{2\sqrt{a}},$$

d'où l'on tire :

$$e'=2\sqrt{a}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right); \tag{4}$$

et pour la racine cubique :

$$e'=3\sqrt[3]{a^2}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\gamma}\right). \tag{5}$$

Dans la plupart des applications, l'erreur totale $\frac{1}{\delta}$ est de la forme $\frac{1}{10^n}$, et le nombre x est supérieur à l'unité. Il est avantageux pour lors de prendre $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^n}$, car les formules (4) et (5) donnent toutes $\frac{1}{10^n}$ pour limite de e, quand on y substitue aux quantités $\sqrt{a}$ et $\frac{3}{2}\sqrt{a^2}$ leur limite inférieure, l'unité. De là ce théorème :

Pour obtenir la racine carrée ou cubique d'un nombre incommensurable, supérieur à l'unité, à moins d'une unité décimale de l'ordre n, *il suffit de calculer ce nombre avec la même approximation, et d'opérer l'extraction de racine à moins d'une demi-unité de cet ordre.*

L'extraction de racine des nombres incommensurables n'a pas été omise par M. Guilmin, dans l'excellente *Note* sur les approximations numériques, qu'il a publiée dans ces *Annales* (t. I, p. 249), et qu'il a reproduite depuis, avec quelques changements, dans son *Cours d'Arithmétique*. Mais il s'est contenté d'en référer aux règles connues, et ces règles ont l'inconvénient d'exiger le calcul des nombres incommensurables avec une précision beaucoup plus grande qu'il ne faut, et d'interdire par là l'usage des tables de logarithmes.

Proposons-nous, par exemple, de calculer, à moins d'un demi-millième près, la quantité

$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}} :$$

la théorie ordinaire enseigne qu'il faut chercher la racine cubique de 2 avec *huit décimales*, y ajouter 1, puis extraire avec quatre décimales la racine carrée de la somme. D'après le théorème précédent, il suffit de calculer la racine cubique de 2 à moins d'un dix-millième près, et d'extraire la racine carrée de $1 + \sqrt[3]{2}$, à moins de 0.00005. Par conséquent, ces deux opérations pourront s'effectuer très-facilement par les logarithmes.