Nouvelles annales de mathématiques

Breton de Champ

Lettre à M. Terquem sur les rosettes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 369-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__369_0>

LETTRE A M. TERQUEM SUR LES ROSETTES.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Monsieur, dans les observations, si bienveillantes d'ailleurs pour moi, dont vous avez fait suivre la note de M. Brassine sur les rosettes (p. 211), vous attribuez à Waring l'honneur d'en avoir donné la théorie. Je crois, permettez moi de le dire, que c'est aller beaucoup trop loin. Waring a bien indiqué, dans le problème XV de son ouvrage intitulé *Curvarum algebraicarum proprietates* (2e édition, 1772, p. 56), le moyen d'obtenir l'équation qui a pour racines les segments interceptés sur les rayons d'une rosette, par une courbe algébrique. Mais il faut remarquer d'abord que cet auteur ne fait qu'indiquer les calculs à effectuer, et ensuite n'énonce aucune de ces propositions où l'on voit les segments former des fonctions qui conservent une valeur constante pendant que la rosette tourne, la courbe étant fixe. Or c'est là ce qui constitue, à proprement parler, la théorie des rosettes dans ce qu'elle a de plus intéressant. Peut-on croire, s'il avait connu ces théorèmes, qu'il les eût passés sous silence ?

Le procédé de Waring consiste à substituer dans l'équation en x, y de la courbe, pour x et pour y, les expressions $x=\rho\cos\frac{\alpha}{m}$, $y=\rho\sin\frac{\alpha}{m}$, $2m$ étant le nombre des rayons et ρ le segment ; il élimine l'angle $\frac{\alpha}{m}$ au moyen de la relation

$$\cos\frac{\alpha}{m}=\frac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha+\sqrt{-1}\,.\sin\alpha}+\frac{1}{2}\sqrt[m]{\cos\alpha-\sqrt{-1}.\sin\alpha};$$

et par suite les coefficients de l'équation obtenue, après qu'on a fait disparaître les quantités irrationnelles, sont des fonctions rationnelles, mais généralement fractionnaires, de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$. On aperçoit sans peine que l'équation ainsi formée, $\rho^p + A_1\rho^{p-1} + A_2\rho^{p-2} + \ldots = 0$, n'est pas identique avec celle dont on a besoin pour établir la théorie des rosettes. Par exemple, pour $m = 1$, la courbe étant du second degré, soient ρ'_1, ρ'_2 les segments interceptés sur le premier rayon, et ρ_1'', ρ_2'' ceux du deuxième rayon. On a

$$A_1 = \rho_1'\rho_2' + \rho_1'\rho_1'' + \rho_1'\rho_2'' + \rho_2'\rho_1'' + \rho_2'\rho_2'' + \rho_1''\rho_2''.$$

Comment isoler la fonction $\frac{1}{\rho_1'\rho_2'} + \frac{1}{\rho_1''\rho_2''}$ pour démontrer qu'elle conserve une valeur constante? Vous voyez qu'on est conduit à des coefficients dont la composition ne permet pas toujours d'établir les théorèmes les plus simples.

En faisant, au contraire, $x = \rho\cos\alpha$, $y = \rho\sin\alpha$, dans l'equation du degré n,

$$u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

où u_i est une fonction homogène et entière de x, y du degré i, on trouve :

$$v_n\rho^n + v_{n-1}\rho^{n-1} + v_{n-2}\rho^{n-2} + \ldots + v_2\rho^2 + v_1\rho + u_0 = 0;$$

v_i étant homogène et du degré i en $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Donc en posant $\rho = \frac{1}{r}$, l'équation

$$r^n + \frac{v_1}{u_0}r^{n-1} + \frac{v_2}{u_0}r^{n-2} + \ldots + \frac{v_{n-2}}{u_0}r^2 + \frac{v_{n-1}}{u_0}r + \frac{v_n}{u_0} = 0,$$

qui a pour racines les puissances -1 de ρ, a pour coefficient de r^i une fonction entière, homogène, du degré i, de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$; et par suite toute fonction symétrique du degré i de ces puissances s'exprime aussi par une fraction entière du degré i, de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

Or, si l'on fait la somme des valeurs d'une telle fonction pour la série des $2m$ angles,

$$\alpha,\quad \alpha+\frac{2\pi}{2m},\quad \alpha+2\,.\frac{2\pi}{2m}\ldots\alpha+(2m-1)\frac{2\pi}{2m},$$

on obtient une quantité indépendante de α, toutes les fois que m est plus grand que i. Cet énoncé renferme toute la théorie des rosettes *circulaires*.

Considérons présentement dans l'espace une surface quelconque et un groupe ou faisceau de rayons menés d'un point fixe aux sommets d'un polygone régulier elliptique (inscrit dans une ellipse, de manière que ses côtés correspondent à des secteurs équivalents), je dis que la même propriété aura lieu, pourvu que l'on ait soin de multiplier chaque puissance -1 de ρ par la longueur du rayon correspondant. Soit R cette longueur, prenons pour origine des coordonnées le point fixe, et supposons les axes des x et des y parallèles à ceux de la courbe. Les équations de celle-ci peuvent être mises sous la forme $x=\mathrm{A}+a\cos\omega$, $y=\mathrm{B}+b\sin\omega$, $z=\mathrm{C}$, a, b, A, B, C étant des constantes, et ω une variable auxiliaire telle que pour la série

$$\omega,\quad \omega+\frac{2\pi}{m},\quad \omega+2\,\frac{2\pi}{m}\ldots\omega+(m-1)\frac{2\pi}{m},$$

on a les sommets d'un polygone régulier elliptique de m côtés. Soit encore alors

$$u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_2+u_1+u_0=0\,;$$

l'équation de la surface u_i étant comme ci-dessus du degré i, mais en x, y, z. Les coordonnées d'un point quelconque de cette surface sont évidemment $\frac{\rho}{\mathrm{R}}(\mathrm{A}+a\cos\omega)$, $\frac{\rho}{\mathrm{R}}(\mathrm{B}+b\sin\omega)$, $\frac{\rho}{\mathrm{R}}\mathrm{C}$. Donc, en les substituant dans l'équation ci-dessus, on a une transformée où le coefficient de $\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}}\right)^i$ est *au* *plus* du degré i en $\sin\omega$, $\cos\omega$; donc, etc. Cette conclusion, bien plus générale que la précédente, renferme ce qu'on pourrait appeler la théorie des rosettes coniques.

Voici un théorème assez curieux qu'on en déduit : *Soit un polyèdre régulier ellipsoïdal* (c'est-à-dire qui devient régulier quand l'ellipsoïde devient une sphère) ; *si l'on suppose des droites menées du centre de l'ellipsoïde aux sommets de ce polyèdre, et prolongées jusqu'à une surface quelconque, les sommes des valeurs inverses des segments, de leurs carrés et de leurs produits deux à deux dans chaque direction sont constantes pour les polyèdres de même espèce circonscrits au même ellipsoïde.*

Pour le dodécaèdre et l'icosaèdre on peut s'élever jusqu'à la quatrième puissance.

Il est bien évident qu'on obtiendrait des résultats analogues en faisant passer les rayons du faisceau par les points que déterminent les équations

$x = \varphi(\sin\omega, \cos\omega)$, $y = \psi(\sin\omega, \cos\omega)$, $z = \varpi(\sin\omega, \cos\omega)$;

φ, ψ, ϖ étant les signes de trois fonctions entières, lorsqu'on donne à l'argument les valeurs

$$\omega, \quad \omega + \frac{2\pi}{m}, \quad \omega + 2 \cdot \frac{2\pi}{m} \dots \omega + (m-1)\frac{2\pi}{m},$$

m étant plus grand que le degré de la fonction que l'on considère. Toute la difficulté est de définir géométriquement ces nouveaux systèmes ; j'en donnerai quelques exemples dans une prochaine lettre.