E. CATALAN

Théorème de statique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 294-298
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__294_1>

THEORÈME DE STATIQUE.

PAR E. CATALAN.

THEORÈME. *La fonction des forces, désignée habituellement* par $LX + MY + NZ$, *représente le sextuple de la somme des* *tétraèdres ayant pour arêtes opposées les droites qui représentent en grandeur et en direction les forces* P, P′, P″, ... *ces droites étant prises deux à deux.*

Nommons x, y, z les coordonnées rectangulaires du point d'application de la force P, et α, β, γ les angles que fait avec les trois axes la direction de cette force. Nous aurons

$$X=\Sigma P\cos\alpha,\ Y=\Sigma P\cos\beta,\ Z=\Sigma P\cos\gamma,$$
$$L=\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta),\ M=\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma),$$
$$N=\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha),$$
$$\text{et } V=LX+MY+NZ$$
$$=(\Sigma P\cos\alpha).\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)$$
$$+(\Sigma P\cos\beta)\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)$$
$$+(\Sigma P\cos\gamma)\,\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha).$$

D'abord, la partie de V qui se rapporte uniquement à la force P est

$$P^2[(y\cos\gamma-z\cos\beta)\cos\alpha+(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\cos\beta$$
$$+(x\cos\beta-y\cos\alpha)\cos\gamma];$$

quantité nulle d'elle-même. De même pour les parties de la fonction V qui proviennent des forces P′, P″ prises *isolément.*

En second lieu, la partie de V qui résulte de la combinaison de deux forces différentes P et P′ a pour valeur ·

$$PP'[(y'\cos\gamma'-z'\cos\beta')\cos\alpha+(z'\cos\alpha'-x'\cos\gamma')\cos\beta$$
$$+(x'\cos\beta'-y'\cos\alpha')\cos\gamma]+PP'[(y\cos\gamma-z\cos\beta)\cos\alpha'$$
$$+(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\cos\beta'+(x\cos\beta-y\cos\alpha)\cos\gamma']$$
$$=PP'[(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-$$
$$\cos\gamma'\cos\alpha)+(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)]$$

Or, il est facile de reconnaître que la quantité entre parenthèses représente le produit de la plus courte distance d des droites P, P′ par le sinus de l'angle formé par ces droites ; donc

$$V=\Sigma PP'd\sin(P,P').$$

Enfin, l'on sait que le tétraèdre qui aurait P, P' pour arêtes opposées, a pour volume $\frac{1}{6}$ PP'd sin (P,P'). Le théorème est donc démontré.

Corollaire. *Si deux systèmes de forces se font équilibré, la somme des tétraèdres construits sur les forces du premier système, prises deux à deux comme arêtes opposées, est équivalente à la somme des tétraèdres construits sur les forces du second système.*

En effet, soient X, Y, Z, L, M, N les composantes et les moments relatifs au premier système, et soient X', Y', Z', L', M', N' les mêmes quantités relativement au second système. Les six équations d'équilibre deviennent ici évidemment

$$X+X'=0,\ Y+Y'=0,\ Z'+Z'=0,$$
$$L+L'=0,\ M+M'=0,\ N+N'=0$$

Conséquemment, $LX+MY+NZ=L'X'+M'Y'+N'Z'$ (*).

Note. Le célèbre mémoire de M. Minding (V, p. 185 au bas) est connu depuis longtemps en France ; il est déjà cité dans les Comptes rendus 1835, 2e s., p. 282, et en 1837, d'après cette mention, par M. Chasles (*Hist. des méthodes*, p. 555) ; mais écrit en allemand, le contenu est toujours inconnu. On y trouve le beau théorème qu'on vient de lire : je crois même que ses 172 équations épuisent toutes les interprétations qu'on peut déduire des équations d'équilibre. On sait que M. Möbius a travaillé sur le même thème, et dans sa *Statique*, ouvrage ex-professo, et dans un mémoire sur la composition des rotations infiniment petites, inséré dans le Journal de Crelle (XVIII, p. 189, 1838). En voici quelques théorèmes :

1° Lorsque quatre forces sont en équilibre, toute droite qui rencontre trois des forces rencontre la quatrième. Cette

(*) M. Chasles est arrive à ce corollaire, et à un grand nombre de théorèmes très-élegants, dans un memoire publie dans le Journal de Liouville, tome XII, page 213.

proposition est connue : on m'a même dit qu'elle a été professée par M. Richard, dans le cours d'une si haute instruction qu'il fait depuis longues années au collége Louis-le-Grand (1).

2° Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que *six*, il est toujours possible de trouver des forces, lesquelles agissant suivant ces droites se fassent équilibre ; lorsque le nombre de droites est moindre que six, il faut certaines conditions.

4° Lorsqu'un corps peut se mouvoir autour de six axes *indépendants*, il peut prendre un déplacement quelconque, c'est-à-dire tourner autour d'un axe quelconque.

4° On peut toujours décomposer une force en six directions données par les arêtes d'un tétraèdre.

5° Étant donnés les corps A_1, A_2, A_3. ... A_n ; les corps A_1 et A_2 peuvent tourner autour d'un axe fixe commun ; les

(1) *Collége Louis-le-Grand*, aujourd'hui *Lycée Descartes*. Lorsqu'une institution a acquis sous un certain nom une celebrité séculaire, ce nom devient un titre de proprieté que doivent respecter ceux qui, n'adherant pas aux doctrines du bagne, respectent la proprieté. En géneral changer sans necessite les noms des édifices, des lieux publics, est un acte barbare, anti-historique, detruisant la chaîne des traditions du passe, sans apporter aucune garantie pour l'avenir. *Nihil sub sole novum*, dit l'Ecclesiaste ; ce qui est surtout vrai en fait de folies. Ce bouleversement de nomenclature etait aussi la manie de notre première république, ce qui ne l'a pas empêchee d'avoir une existence éphemère et de mourir *per euthanasiam* sous les etreintes d'un soldat corse. Pourquoi changer le mot français college, si connu, si populaire, contre le mot pedantesque *lycée*, qui n'a pas même le merite de l'exactitude ; car, chez les Grecs, la jeunesse etait eduquée dans les *gymnases*, et il y en avait dans toutes les cités, tandis que le *lycée* n'etait pas un college, mais un etablissement particulier à la ville d'Athènes, et qu'Aristote a rendu celèbre, tout comme Laharpe a jeté de l'éclat sur un etablissement de même nom et de même destination à Paris. D'ailleurs nous ne saurions assez nous pénetrer de cette idee : rien n'est moins républicain que l'esprit servile d'imitation, dût-on imiter des republicains ; et ici ce n'est pas même le cas, car les lycees sont de création impériale ; ils ont succede, non pas aux colléges royaux, mais aux *écoles centrales*, institutions éminemment républicaines, et qu'on aurait portées à une haute perfection, en renforçant la partie littéraire, qui etait trop peu developpee. Cette organisation presentait l'avantage de rendre impossible toute lutte entre l'instruction publique et les opinions religieuses. C'est ce que dit Lacroix dont personne ne conteste la compétence. Du reste, qu'on reprenne les noms anciens, ainsi que le veut le bon sens, ou que l'on conserve les nouveaux, là n'est pas le point important. Il faudrait améliorer les modes d'enseignement, et c'est ce qu'on ne fera pas. Tout pour la forme, rien pour le fond, c'est notre devise. Tm.

corps A_2 et A_3 autour d'un autre axe fixe commun et ainsi de suite jusqu'à A_{n-1} et A_n. Supposons maintenant qu'on rende fixe le corps A_1, il est évident que A_3 peut prendre plus de positions diverses dans l'espace que A_2; A_4 plus que A_3; mais le premier corps qui peut prendre une position quelconque dans l'espace tout comme s'il était libre, c'est le corps A_7, et *à fortiori* les suivants. Le savant géomètre fait à ce sujet une curieuse observation. La jambe de l'écrevisse à laquelle sont attachées les serres est formée de six pièces liées entre elles et au corps par six axes de rotation; de sorte que pendant que le corps se repose, la partie extrême de la jambe est entièrement libre. Du reste, le bras de l'homme, depuis l'épaule jusqu'aux phalanges, présente une construction presque analogue.