Sur l'extraction d'une racine du binôme $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. D'après M. J. Plana, à Turin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 271-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__271_1>

SUR L'EXTRACTION

d'une racine du binôme $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, *d'après M. J. Plana, à Turin* (Crelle, t. XVII, p. 331, 1837), *en français.*

I. Soient $A^2=a$, $B^2=b$; A^2 et B^2 sont deux nombres rationnels entiers, et $A^2>B^2$; il s'agit d'extraire la racine de degré n du binôme $A\pm B$; j'écris $\sqrt[n]{A\pm B}=\dfrac{x\pm y}{2\sqrt[2n]{p}}$ et on regarde p comme un nombre entier, ainsi que les carrés x^2 et y^2. Ceci admis, on a nécessairement les deux équations:

$$\sqrt[n]{A+B}=\frac{x+y}{2\sqrt[2n]{p}}\,;\quad \sqrt[n]{A-B}=\frac{x-y}{2\sqrt[2n]{p}}\,;$$

d'où

$$x^2-y^2=4\sqrt[n]{(A^2-B^2)p}\,;\; x^2+y^2=2[\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}].$$

Soit

$$A^2-B^2=2^a.3^{a'}.5^{a''}.7^{a'''}\dots,$$

et prenons :

$$p=2^{n-a}.3^{n-a'}.5^{n-a''}.7^{n-a'''}\dots,$$

on aura :

$$(A^2-B^2)p=(2.3.5.7\dots)^n=r^n;$$

par là les nombres entiers p et r sont connus. Posons :

$$z=\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\sqrt[n]{(A-B)^2p}, \qquad (1)$$

on déduit :

$$x=\sqrt{z+2r};\ y=\sqrt{z-2r} \text{ et } \sqrt[n]{A\pm B}=\frac{\sqrt{z+2r}\pm\sqrt{z-2r}}{2\sqrt[2n]{p}};$$

il faut donc pour que cette extraction soit possible que z soit un nombre entier.

Faisons :

$$\frac{\alpha}{2}=(A^2+B^2)p;\quad \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}=2pAB;$$

ou bien :

$$\alpha=2p(A^2+B^2);\quad \beta=p^2(A^2-B^2)^2=r^{2n};$$

alors

$$z=\sqrt{\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}}.$$

Cette forme nous apprend que z est racine d'une équation de Moivre de degré n, et on aura pour déterminer a l'équation

$$\alpha=z^n-nr^2z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}z^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}z^{n-4}\dots \qquad (2)$$

Si n est impair, le second membre est divisible par z, et r doit être un facteur du nombre entier α; pour le trouver rapidement, on calcule avec une table de logarithmes les deux parties de la valeur de z de l'équation (1), en ayant soin de faire ce calcul avec plusieurs chiffres décimaux ; ensuite on voit si l'addition de ces deux nombres donne un nombre entier avec une grande approximation, et l'équation (2) servira à vérifier ce nombre. Ce procédé sert aussi à indiquer l'impossibilité de l'extraction de la racine demandée, en donnant une fraction fort éloignée de l'unité pour la somme des deux parties décimales.

Si n est pair, le second membre de l'équation (2) est divisible par z^2; en sorte que, en admettant qu'elle eût des racines commensurables, on en pourrait tirer une valeur entière pour z^2; mais alors la racine de ce nombre, s'il n'est pas un carré parfait, ne serait pas un nombre entier; ce qui empêcherait d'avoir pour x^2 et y^2 des nombres entiers.

Exemples :

$$\sqrt[5]{5\sqrt{5}+11}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{16}};\quad \sqrt[7]{139\sqrt{3}+91\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}.$$

II. Newton a, le premier, traité cette question et donné une règle (*Arithmétique universelle*, t II, p. 116-121, de la traduction de Beaudeux, 1802).

Euler a élevé des objections contre cette règle dans son mémoire intitulé : *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus* (Comm. Petrop., XIII, 1751). Le but du travail du célèbre professeur de Turin est de montrer que les objections sont fondées et à quoi elles tiennent.