DE PISTORIS

Sur les normales aux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 246-251

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__246_1>

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES,

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine d'artillerie.

I. Si d'un point quelconque N (*fig.* 41) ayant (α, β) pour coordonnées, on mène des normales à la parabole $y^2=2px$, on sait qu'il peut y avoir jusqu'à trois normales, et que les coordonnées de leurs pieds sont déterminées par l'équation du troisième degré :

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0. \qquad (1)$$

L'équation de la circonférence de cercle passant par les pieds des normales sera $(x-A)^2+(y-B)^2=R^2$; combinant cette équation avec celle de la parabole $y^2=2px$, et éliminant x, on a l'équation du quatrième degré :

$$y^4+4p(p-A)y^2-8p^2B.y+4p^2(A^2+B^2-R^2)=0 \quad (2)$$

qui aura trois racines y_1, y_2, y_3 identiques avec celles de l'équation (1); et comme les seconds termes manquent dans les équations (1) et (2), il est facile d'en conclure que la quatrième racine y_4 de l'équation (2) est égale à zéro. Donc

La circonférence de cercle passant par les pieds des trois normales à une parabole, issues d'un même point, passe aussi par *le sommet de la courbe*, et réciproquement *si l'on fait passer une circonférence de cercle par le sommet d'une parabole et rencontrant la courbe en trois autres points, les normales en ces trois points iront concourir en un point unique.*

(*) De là résulte un moyen très-simple pour mener les normales à une parabole par un point donné, quelle que soit la position de ce point. Et en effet, si de l'équation (2) on fait disparaître la racine $y_4 = 0$, on aura l'équation :

$$y^3 + 4p(p-\text{A})y^2 - 8p^2\text{B} = 0 \qquad (3)$$

et l'équation (3) étant identique à l'équation (1), puisqu'elles ont mêmes racines y_1, y_2, y_3, on en déduira :

$$2p(p-\alpha) = 4p(p-\text{A}) \text{ et } 2p^2\beta = 8p^2\text{B},$$

d'où
$$\text{A} = \frac{p+\alpha}{2} \text{ et } \text{B} = \frac{\beta}{4}.$$

Par conséquent le centre de la circonférence de cercle passant par les pieds des normales issues du point N, se détermine par une construction on ne peut plus simple, et son rayon $\text{R} = \sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}$ est connu, puisque la circonférence passe par le sommet de la parabole.

Il est facile de démontrer que la somme des rayons vecteurs aboutissant aux pieds des normales est égale au double de l'abscisse du point N, diminué du quart du paramètre :

$$\text{FA} + \text{FB} + \text{FC} = 2\alpha - \frac{p}{2}.$$

Si le point N était situé sur l'axe de la parabole, outre la méthode générale, il existerait d'après cela un moyen encore bien plus simple pour construire les normales : du foyer F comme centre, on décrirait un arc de cercle avec FN pour rayon ; en joignant au point N les points où cet arc de cercle rencontre la parabole, on aurait deux normales ; la troisième est évidemment l'axe lui-même.

(*) Voir t. V, p. 673.

II. Dans le cas de l'ellipse, ce ne sont plus trois normales seulement, mais quatre, qu'on peut mener par un point donné; l'une de ces normales étant déterminée, les trois autres sont faciles à construire par une construction analogue à celle que nous venons d'indiquer pour la parabole.

(*Fig.* 42) Soient donc N le point duquel on se propose de mener des normales à l'ellipse, ND l'une de ces normales, (x_4, y_4) les coordonnées de son pied D, et (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des pieds A, B, C des trois autres normales.

Des équations (A) et (B) (t. VI, p. 367), on déduit évidemment :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{2a^2\alpha}{c^2}, \text{ et } x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{4a^2.p_4}{c^2};$$

d'où, en ajoutant : $\quad x_4=\frac{a^2}{c^2}(\alpha-2p_4),$

et par suite $\quad p_4=\frac{\alpha}{2}-\frac{c^2}{2a^2}x_4;$

on aura de même $\quad q_4=\frac{\beta}{2}+\frac{c^2}{2b^2}y_4.$

Une construction très-simple permettra donc de déterminer le centre O_4 de la circonférence de cercle passant par les pieds A, B, C des normales, et le centre étant connu, la circonférence de cercle sera facile à décrire, puisqu'elle doit passer par le point D', diamétralement opposé au point D.

Il existe quatre circonférences de cercle passant par trois des pieds des quatre normales NA, NB, NC, ND, issues du même point N. Si l'on distingue par (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3), et (p_4, q_4) les coordonnées des centres, on a les résultats suivants :

$$p_1+p_2+p_3+p_4=\alpha;\quad q_1+q_2+q_3+q_4=\beta.$$

III. Ce qui vient d'être dit pour l'ellipse s'applique égalementment à l'hyperbole; il n'y a plus qu'à changer b^2 en $-b^2$. Mais dans le cas de l'hyperbole équilatère, les résultats se simplifient beaucoup; ainsi l'on a :

$$p_4=\frac{\alpha}{2}-x_4,\ \text{et}\ q_4=\frac{\beta}{2}-y_4;$$

on a aussi les expressions très-simples :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\alpha;\ y_1+y_2+y_3+y_4=\beta.$$

Si, considérant actuellement l'équation

$$4a^2p_1^2+4b^2q_1^2+2c^2R_1^2-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)=2a^2(4p_1^2-\alpha^2)$$

(t. VI, p. 368), on y change b^2 en $-a^2$ pour passer de l'ellipse au cas de l'hyperbole équilatère, on parviendra, en faisant attention que $R_1^2=p_1^2+q_1^2-a^2-r_1^2$, à ce résultat remarquable :

$$r_1^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}.$$

Donc *dans une hyperbole équilatère les circonférences de cercle passant par trois des pieds des quatre normales issues d'un même point, ont toutes quatre même rayon.*

La grandeur de ce rayon est indépendante de la grandeur de l'axe de l'hyperbole; elle ne dépend que de la distance du point duquel sont menées les normales au centre de la courbe.

Cas particuliers. (*Fig.* 44.) Si le point N est situé en N′ sur l'axe transverse, la construction des normales est très-facile et plus simple; on prend $OP=\frac{\alpha}{2}=\frac{ON'}{2}$, et l'on élève une perpendiculaire au point P; si elle rencontre la courbe en A et Q, les droites N′A, N′Q seront deux normales : construction identique, si le point N est situé sur l'axe non transverse. On peut remarquer ce théorème.

Dans une hyperbole équilatère, les portions d'une même normale comprises entre les axes sont égales. Ainsi :

$$AN' = AN''.$$

Si le point N est situé sur la courbe même, en A par exemple, on mène le diamètre AOA' ; du point R au milieu de oA, comme centre, et avec OR pour rayon, on décrit une circonférence qui rencontre la courbe en un second point S, différent du point A' ; la droite AS est une normale.

Il existe une relation assez simple entre les distances du centre de l'hyperbole équilatère aux centres des quatre cercles et au point N. On a en effet :

$$\overline{Oo_1}^2 + \overline{Oo_2}^2 + \overline{Oo_3}^2 + \overline{Oo_4}^2 = \overline{ON}^2 ;$$

on a aussi :

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{ON}^2,$$

et enfin :

$$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 + \overline{NC}^2 + \overline{ND}^2 = 2\overline{ON}^2.$$

On a ce théorème toujours dans le cas de l'hyperbole équilatère.

Les pieds des quatre normales issues d'un même point sont tels que la droite joignant deux quelconques d'entre eux est perpendiculaire à la droite joignant les deux autres. Ainsi, par exemple, AD est perpendiculaire à BC ; démonstration facile fondée sur le théorème 150 de Joachimstal (t. VI, p. 241).

L'expression $np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 2(a^2 + b^2)$ (t. VII, p. 117) a également lieu, mais elle se réduit à zéro, c'est-à-dire que dans l'hyperbole équilatère on a :

$$np + n'p' + n''p'' + n'''p''' = 0$$

à cause de

$$b^2 = -a^2.$$

Enfin q, q', q'', q''' exprimant les distances du centre de l'hyperbole équilatère aux normales, il est facile de démontrer la relation :

$$nq + n'q' + n''q'' + n'''q''' = 0.$$

Cette relation est dans le cas de l'ellipse :

$$2\alpha\beta \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = nq + n'q' + n''q'' + n'''q'''.$$

Note. 1° Les pieds des normales menées par un point à une conique sont sur une hyperbole équilatère ; donc lorsque cette conique est aussi une hyperbole équilatère, les deux courbes passant par les quatre mêmes points, l'un de ces points est le point de *rencontre* du triangle formé par les trois autres (t. II, p. 43).

2° Le cercle circonscrit à un triangle et les trois cercles qui passent par le point de *rencontre* et deux des sommets sont égaux (t. II, p. 544).

3° Le cercle des *neuf* points passant par les deux centres des deux hyperboles équilatères, on a onze points sur la même circonférence. (Mention.)