NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEGALLAIS

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 234-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__234_0>

QUESTION D'EXAMEN (Tome VI, page 328),

PAR M. LEGALLAIS,
élève du collège militaire de La Flèche.

Trouver le lieu des projections d'un sommet d'une section conique sur toutes ses tangentes.

L'équation $y^2 = 2px + nx^2$ représente l'une quelconque des trois sections coniques rapportée à l'axe focal et à l'un des sommets situés sur cet axe.

Soit (x', y') un point quelconque de la courbe; posons l'équation de la tangente en ce point, celle de la perpendiculaire menée à cette tangente par l'origine, et la condition qui exprime que le point (x', y') est sur la courbe, j'aurai trois relations :

$$y'^2 = 2px' + nx'^2 \qquad (1)$$

$$yy' = p(x + x') + nxx' \qquad (2)$$

$$y = -\frac{y'}{p + nx'}x \qquad (3)$$

entre lesquelles il suffit évidemment d'éliminer x' et y' pour avoir l'équation du lieu demandé. Des deux dernières, on tire :

$$x' = -p\frac{x^2 + y^2}{n(x^2 + y^2) + px}, \quad y' = -p.\frac{py}{n(x^2 + y^2) + px};$$

portant ces valeurs dans la relation (1) et opérant toutes les réductions, on trouve définitivement pour équation générale du lieu géométrique cherché :

$$n(x^2 + y^2)^2 + 2px(x^2 + y^2) + p^2y^2 = 0 \text{ (*)}. \qquad (4)$$

(*) Voir t. IV, p. 426

Il faut maintenant discuter cette équation en donnant successivement à n et à p les valeurs qui conviennent pour les trois courbes.

Pour $n=0$, la discussion est assez simple; mais, dans les autres cas, elle devient plus embarrassante par suite de la complication des termes et des radicaux; c'est pourquoi nous préférons passer à l'équation polaire. En employant les formules de transformation $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, on obtient :

$$n\rho^2+2p\rho\cos\omega+p^2\sin^2\omega=0. \qquad (\beta)$$

Passons à la discussion dans les trois cas :

1° *Parabole.* $n=0$ L'équation (α) donne alors $y^2=-\dfrac{x^3}{x+\frac{p}{2}}$,

et l'équation (β) $\rho=\dfrac{p\sin^2\omega}{2\cos\omega}$. Sous l'une quelconque de ces deux formes, on reconnaît facilement la cissoïde ayant pour sommet et pour axe transverse le sommet et l'axe transverse de la parabole, et pour asymptote la directrice de cette courbe; il est inutile de nous y arrêter. (V. t. IV, p. 431.)

2° *Ellipse.* Supposons d'abord qu'il s'agisse du sommet de gauche A' (*fig.* 31), alors $n=-\dfrac{B^2}{A^2}$, $p=\dfrac{B^2}{A}$, et l'équation (β) devient :

$$\rho^2=2A\rho\cos\omega-B^2\sin^2\omega=0.$$

ou, résolvant :

$$\rho=A\cos\omega\pm\sqrt{B^2+c^2\cos^2\omega}, \quad c^2=A^2-B^2.$$

A chaque valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ, parmi lesquelles il y en a toujours une positive et une négative, attendu que $A\cos\omega$ est moindre que le radical

$$\omega=0, \ \rho=A\pm A=2A, \ 0.$$

ω croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le signe $+$ du radical donne les valeurs positives de ρ, et ces valeurs vont en décroissant, car $\cos\omega$ décroît; mais tous les points déterminés ainsi sont situés hors de l'ellipse, car à une même valeur de ω correspondent ces deux rayons vecteurs : savoir, pour la courbe actuelle, $\rho' = A\cos\omega + \sqrt{B^2 + c^2\cos^2\omega}$, et, pour l'ellipse, $\rho'' = 2A\cos\omega\dfrac{B^2}{B^2 + c^2\sin^2\omega}$, et il est facile de voir que $\rho' - \rho''$ est > 0. Le signe — du radical donne les valeurs négatives de ρ, qui vont en croissant quand ω croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \pm B$, ce qui donne les deux sommets H et I du rectangle construit sur les axes de l'ellipse.

Il est inutile de pousser plus loin cette première discussion. L'évidente symétrie autour du grand axe de l'ellipse, et l'obligation de passer par les points A et A', indiquent déjà sensiblement la forme représentée dans la figure 31 ; pour plus de détails, passons à la discussion de la tangente. L'angle α qu'elle a fait avec le rayon vecteur, est donnée par la formule $\tan\alpha = \rho\dfrac{d\omega}{d\rho}$, et, dans une équation quelconque, $F(\omega,\rho) = 0$, $\dfrac{d\omega}{d\rho} = -\dfrac{F'(\rho)}{F'(\omega)}$. On a donc ici :

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{A\rho\cos\omega - \rho^2}{A\rho\sin\omega - B^2\sin\omega\cos\omega}.$$

Pour $\omega = 0$, avec $\rho = 2A$, c'est-à-dire pour le point A, $\text{tang}\,\alpha = \infty$; donc à ce point la tangente est la même que la tangente à l'ellipse. Pour $\omega = 0$, avec $\rho = 0$, on a d'abord $\text{tang}\,\alpha = \frac{0}{0}$. Afin d'interpréter ce résultat, mettons $\text{tang}\,\alpha$ sous la forme :

$$\frac{-\sqrt{\dfrac{B^2}{A^2\cos^2\omega} + \dfrac{c^2}{A^2}}}{\text{tang}\,\omega - \dfrac{B^2\sin^2\omega}{A^2\cos^2\omega + A\sqrt{B^2 + c^2\cos^2\omega}}};$$

on voit que la tangente en A est également la même que la tangente à l'ellipse. Ceci achève de déterminer la forme exacte.

Il est évidemment inutile de recommencer pour un autre sommet de l'ellipse l'examen qui vient d'être fait ; la symétrie montre que pour le point B, par exemple, le lieu aurait la forme de la fig. 32.

3° *Hyperbole* (*fig.* 33). Supposons qu'il s'agisse du sommet de droite Aρ, alors $n=\frac{B^2}{A^2}$, $p=\frac{B^2}{A}$, et l'équation (β) devient

$$\rho^2+2A\rho\cos\omega+B^2\sin^2\omega=0,$$

ou

$$\rho=-A\cos\omega\pm\sqrt{-B^2+c^2\cos^2\omega}.$$

Nous remarquons d'abord une particularité que n'avaient point offert les cas précédents, c'est que ω a des limites ; en effet, pour que le radical soit réel, il faut que $c^2\cos^2\omega$ soit $>B^2$, ou que $\cos\omega$ soit $>\frac{B}{c}$. Ayant mené par le point A les perpendiculaires $\overline{AH}$ et $\overline{AH'}$ sur les asymptotes, et les ayant prolongées indéfiniment en $\overline{IHF}$ et I'H'F', les rayons vecteurs doivent être menés dans l'angle FAF' ou dans l'angle IAI', pour donner des points de la courbe. D'ailleurs, pour $\omega<\frac{\pi}{2}$, il est évident que les deux valeurs de ρ sont négatives.

Nous voyons donc que la courbe est tout entière comprise dans l'intérieur du triangle IAI', ce à quoi on devait s'attendre, d'après les propriétés des asymptotes.

Continuons donc la discussion, en faisant croître ω de H'Ax à π.

La courbe doit passer par les points A, H, H', et être dans l'intérieur de l'angle HAH' ; cela nous porte déjà à croire que dans cet intervalle elle tourne sa convexité vers AA'.

A chaque valeur de ω correspondent deux valeurs de ρ, qui sont de même signe, et qui vont, l'une en croissant, l'autre en décroissant, à mesure que ω approche de π.

$\omega = \pi$, $\rho = 2A, 0$, on retrouve les deux sommets A, A'.

$\cos\omega = -\frac{B}{c}$, $\rho = \frac{AB}{c}$; on retrouve les deux points H et H'.

Cherchons la tangente ; en répétant les calculs faits ci-dessus, on trouve :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho^2 + A\rho\cos\omega}{B^2\sin\omega\cos\omega - A\rho\sin\omega}.$$

Par hypothèse, ω est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et ρ est > 0; donc le dénominateur est négatif ; le signe de tang α dépend donc du signe du numérateur. On voit donc que tang α est > 0 quand ρ est $< A\cos\omega$, et < 0 quand ρ est $> A\cos\omega$. En interprétant ce résultat, on trouve que, dans la partie de la courbe voisine du point A, la convexité est tournée vers AA', et qu'au contraire, dans la partie voisine du point A', c'est la concavité qui est tournée vers cette ligne ; et évidemment le changement du sens de courbure a lieu au point H', car c'est là le point de séparation entre les rayons vecteurs par lesquels ρ est $< A\cos\omega$ et ceux pour lesquels ρ est $> A\cos\omega$.

Au point H', il est facile de vérifier que la tangente est AH'; au point A et au point A', la tangente est la même que la tangente à l'hyperbole.

L'ensemble de ces renseignements et la symétrie nécessaire autour de AA' assignent au lieu la forme représentée *fig.* 33.

Note. Pour être complète, cette discussion devrait porter sur les points où les tangentes sont parallèles aux axes principaux, ce qu'on obtient en faisant α égal à ω et à $\frac{\pi}{2} - \omega$; mais la détermination est plus commode en se servant des coordonnées rectangulaires ; dans l'hyperbole, il faut, en outre, fixer les points où la tangente est parallèle aux asymptotes.

Les lignes qu'on obtient en projetant un point fixe sur les tangentes à une conique, sont très-importantes en analyse et en physique, dans la théorie des ondes. Les Allemands désignent ce genre de lignes par un seul mot, qui signifie courbe des *pieds des perpendiculaires.* Ne pourrions-nous pas, pour le même usage, employer l'expression ligne *podaire*, et surface *podaire*, quand il s'agit de la projection d'un point fixe sur les plans tangents d'une surface ? Ainsi on dirait que l'onde lumineuse de Fresnel est la surface polaire réciproque (par rapport à un ellipsoïde) de la surface podaire du centre de cet ellipsoïde ; la *podaire* du sommet d'une parabole est une cissoïde. La podaire du centre d'une hyperbole équilatère est une cassinoïde. La podaire d'un foyer est un cercle dans les coniques à centre et une droite dans la parabole, et en général la ligne ou les surfaces podaires d'un point quelconque, est une ligne ou une surface de quatrième degré où les termes du quatrième degré forment un carré parfait.