LE GALLAIS

Lieu géométrique. Question proposée comme sujet de composition pour l'École polytechnique en 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 227-229

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__227_1>

LIEU GÉOMÉTRIQUE.

Question proposée comme sujet de composition pour l'École polytechnique en 1847 (V. t. VI, p. 327),

PAR M. LE GALLAIS,
élève du collége de La Flèche.

1° (*fig.* 34) Du sommet A de l'angle droit BAC on mène une droite quelconque ; des points B et C on abaisse les perpendiculaires BP, CQ, trouver le lieu des points M de ces droites pour lesquels :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP} \times \overline{AQ}.$$

En employant les coordonnées polaires, la solution de ce problème est d'une extrême simplicité. Prenons $\overline{AC}$ pour axe polaire ; la droite, menée à volonté par le point A, est déterminée par l'angle θ qu'elle fait avec $\overline{AC}$, et les points B et C par leurs distances a et b au point A dans des directions fixes; le point M aura pour coordonnées l'angle θ et la longueur variable ρ correspondante. Cela posé, on veut avoir

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}.\overline{AQ};$$

or $$\overline{AP} = a \sin\theta,\ \overline{AQ} = b \cos\theta.$$

L'équation du lieu demandé est donc

$$\rho^2 = ab \sin\theta \cos\theta.$$

La discussion de cette équation est facile. D'abord on voit que $\sin\theta \cos\theta$ doit être positif; donc la courbe n'existe que dans les intervalles où le sinus et le cosinus de θ sont de même signe, c'est-à-dire dans l'angle droit BAC et dans son opposé par le sommet, et nullement dans les angles $\widehat{BAC'}$ et $\widehat{CAB'}$; outre que cela est d'accord avec l'énoncé même, la seule inspection de la figure rend cette conclusion évidente. En second lieu, la forme même de l'équation montre que toute valeur positive de ρ correspond à une valeur négative parfaitement égale et située sur le prolongement, d'où il suit que le point A est un centre de figure et de symétrie, de sorte que la connaissance de la branche comprise dans l'angle BAC suffira pour que la courbe soit complétement explorée; cette branche elle-même étant symétrique par rapport à la bissectrice, puisqu'à chaque couple ($\sin\theta$, $\cos\theta$) correspond le couple équivalent ($\cos\theta'$, $\cos\theta'$), θ étant $< \frac{\pi}{4}$, et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{4}$. Faisons donc croître θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$, alors 2θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et par conséquent $\sin\theta \cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$, croît de 0 à $\frac{1}{2}$, et croît par degrés continus. La courbe passe donc par le point A, est continue et s'éloigne de plus en plus du point A jusqu'à ce qu'elle rencontre la bissectrice en D.

D'après ce qui précède, sa forme est donc maintenant complétement déterminée; pour achever de dissiper toute incertitude, il suffit de chercher la direction de la tangente en quelques points. En appelant α l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur, on sait qu'elle est déterminée par la formule $\tang\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$, ρ' étant la dérivée de ρ; or la dérivée de $\sin 2\theta$ est $2\cos 2\theta$, donc on a à la fois $\rho^2 = \frac{ab}{2}\sin 2\theta$, $2\rho\rho' = ab\cos 2\theta$, ou $\frac{\rho}{\rho'} = \tang 2\theta$; ainsi $\tang\alpha = \tang 2\theta$. On trouve ainsi le tableau suivant :

$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$,
$\alpha = 0$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = 0$.

La courbe est donc tangente en deux côtés de l'angle BAC, et en D à une perpendiculaire à la bissectrice.

Note. C'est une lemniscate de Bernoulli; l'équation de l'hyperbole étant $2xy - ab = 0$. (V. t. IV, p. 427.) Tm.