Nouvelles annales de mathématiques

Paul Serret

Solution de la question 171

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 101-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__101_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 171 (t. VI, p. 455).

PAR M. PAUL SERRET.

Théorème. $abcd$, ABCD étant deux tétraèdres, les six sommets b, c, d, B, C, D demeurant fixes, on donne la relation

$$\frac{ab}{AB}=\frac{ac}{AC}=\frac{ad}{AD}=\text{constante}=\frac{1}{m}.$$

Si le sommet a décrit une surface algébrique, divisée par le plan bcd en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une surface du même degré, divisée de même par le plan BCD en deux parties égales et symétriques (Jacobi).

Démonstration. Sans changer la nature de la surface décrite par le sommet A, on peut faire coïncider les plans bcd, BCD, et de plus les disposer de manière que les directions des côtés bc, BC coïncident et qu'ils aient leurs milieux au même point o, que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires, bc étant l'axe des x, et le plan bcd étant le plan des xy.

Soient $ob=oc=a$; b, c les coordonnées du point α sur le plan xy.

Soient $oB=oC=\alpha$; β, γ les coordonnées du point D sur le plan xy.

Soient x, y, z les coordonnées du point a, dans l'une quelconque de ses positions, et soient x', y', z' les coordonnées du point A dans la position correspondante.

L'équation de la surface décrite par le point a sera de la forme

(1) $$\varphi(x, y, z^2) = 0\,;$$

et l'on aura, d'après l'énoncé de la question, les trois égalités suivantes :

(2) $$(x'-\alpha)^2+y'^2+z'^2=m^2(x-a)^2+m^2y^2+m^2z^2\,;$$

(3) $$(x'+\alpha)^2+y'^2+z'^2=m^2(x+a)^2+m^2y^2+m^2z^2\,;$$

(4) $$(x'-\beta)^2+(y'-\gamma)^2+z'^2=m^2(x-b)^2+m^2(y-c)^2+m^2z^2.$$

Retranchant (3) de (2), on obtient : $4\alpha x'=4m^2ax$, d'où

(a) $$x=nx', \text{ en posant } n=\frac{\alpha}{m^2a}.$$

Retranchant (4) de (2), on obtient :

$$2(\beta-\alpha)x'+2\gamma y'+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=2m^2(b-a)x+$$
$$+2m^2cy+m^2(a^2-b^2-c^2).$$

Or de cette égalité en y, remplaçant x par sa valeur (a), on tirera une égalité de cette forme

(b) $$y=Ax'+By'+C.$$

Enfin, remplaçant x et y par leurs valeurs (a) et (b) dans l'équation (2), on en tire :

(c) $$z^2=Mz'^2+Ny'^2+Px'y'+Qx'^2+Ry'+Sx'+T.$$

Donc enfin, en remplaçant x, y, z^2 par leurs valeurs (a), (b), (c) dans l'équation (1), nous aurons :

(5) $$\varphi(nx',\ Ax'+By'+c\,,\ Mz'^2+\text{etc...})=0$$

pour l'équation de la surface décrite par le point A. Or cette equation est du même degré que l'équation (1), et, comme cette dernière, elle ne contient que des puissances paires de z^2, d'où il suit que, en outre, le lieu des points A est divisé par le plan BCD en deux parties égales et symétriques. Donc le théorème est démontré.