

Université de Dublin ; 1846 ; programme d'agrégation

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 6 (1847), p. 329-339

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__329_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE DUBLIN; 1846 (*V. t. V*, p. 515).

Programme d'agrégation (Socius, — 1847) ()*.

MATHÉMATIQUES.

M. Graves, professeur.

1. Donner une méthode géométrique pour mener une tangente à une ligne plane du troisième ordre par un point pris sur la courbe.

2. La même construction donne le cercle osculateur.

3. On peut faire les mêmes constructions pour une courbe plane d'ordre quelconque.

4. On peut déterminer de la même manière, pour une surface d'ordre quelconque, et le plan tangent et le cercle qui oscule les lignes de courbure en un point quelconque.

5. Propriété remarquable des cordes menées d'un point donné aux points où le cercle osculateur rencontre la courbe.

6. Un théorème quelconque sur les asymptotes rectilignes des courbes du *n^{ième}* ordre étant démontré, il en résulte de suite un théorème plus général sur les tangentes dont les points de contact sont en ligne droite : par exemple, on sait que toutes les hyperboles qui ont à l'infini quatre points de contact avec une ligne du troisième ordre, ont le même centre, et que les trois centres répondant aux trois asymptotes sont sur une même droite. Quelle est la propriété générale analogue des tangentes?

(*) Programme en latin; cette agrégation correspond probablement à notre agrégation pour les facultés et dont le programme doit paraître en 1848.

7. Dans les courbes sphériques, la distinction entre les branches hyperboliques et paraboliques n'existe pas.

8. Étant donnée l'équation d'une courbe en coordonnées rectilignes, comment cherche-t-on la nature du point singulier situé à une distance infinie ?

9. ξ et η étant les segments *réiproques* qu'une tangente à une courbe fait sur les axes rectangulaires, l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré entre ξ et η est une courbe de la $n^{\text{ième}}$ classe, c'est-à-dire une courbe qui est la polaire réciproque d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ degré.

10. Cette équation peut généralement se mettre sous la forme $PQR\dots + \mu\Omega_{n-2} = 0$; ou les fonctions $PQR\dots$ en nombre n sont du 1^{er} degré; Ω_{n-2} est une fonction de l'ordre $n - 2$ et μ une constante.

11. Interprétation géométrique des équations $P = 0$; $Q = 0$; $R = 0$; etc. $\Omega_{n-2} = 0$.

12. Étant donnée l'équation d'une courbe de troisième classe sous la forme $PQR + \mu S^3 = 0$, on demande l'interprétation géométrique des équations $P = 0$; $Q = 0$; $R = 0$; $S = 0$.

13. Le théorème remarquable de Cotes sur les transversales coupant une ligne du $n^{\text{ième}}$ ordre dérive de la considération des derniers termes de l'équation entre les coordonnées rectilignes; un théorème analogue existe pour les lignes de la $n^{\text{ième}}$ classe.

14. Dans un triangle sphérique, on donne la base et l'angle opposé; quelle relation existe entre les variations des côtés?

15. Le même théorème existe pour un triangle formé sur une surface quelconque par trois lignes géodésiques (les plus courtes).

16. Mêmes données; quelle est la relation entre les variations des angles à la base?

17. Déduire de la relation entre les variations des côtés la

formule fondamentale pour la comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce.

18. Mêmes données; quelle relation existe entre les variations des côtés et la variation de la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base ?

19. De ce théorème, on déduit de suite la relation fondamentale entre trois fonctions elliptiques de la seconde espèce.

20. Interprétation géométrique de cette formule par des arcs elliptiques. Que signifie le terme $c' \sin \mu \sin \varphi \sin \psi$?

21. φ et ψ étant les amplitudes des deux arcs complémentaires dans l'ellipse, on demande la relation entre les diamètres de l'ellipse qui font des angles φ et ψ avec le petit axe.

22. La fonction $\sin am(u)$ est périodique, que u soit réel ou imaginaire.

23. De là, les fonctions elliptiques sont douées d'une double périodicité, une réelle et l'autre imaginaire, pourvu que le module soit réel.

24. On sait que les fonctions complètes de troisième espèce dépendent des deux autres espèces. On peut déduire de là, sans peine, le théorème de Legendre sur les fonctions complètes de première et deuxième espèce qui ont des modules conjugués.

25. Les fonctions de troisième espèce, à paramètres logarithmiques, peuvent être réduites à des fonctions à deux arguments.

26. Développement en série de la fonction θ .

27. Développement en série de la fonction $F(c, \varphi)$, suivant les sinus des multiples de φ .

28. Développement de $F(c)$, suivant les puissances du module.

29. Qu'y a-t-il de remarquable dans l'équation différentielle entre $F(c)$ et b ?

30. Quelle courbe est vulgairement proposée pour représenter les fonctions elliptiques de première espèce ?

31. Quelle est la courbe sphérique dont l'arc représente une fonction de troisième espèce ?

32. Quel doit être le cône pour que l'arc de la courbe sphérique représente une fonction de première espèce ?

33. Ou une fonction de seconde espèce ?

34. Quelle sera la courbe sphérique si l'axe principal intérieur du cône est un diamètre de la sphère ? quelle fonction elliptique représente-t-elle ?

35. L'une et l'autre courbe peuvent facilement se déduire de la section sphéro-conique.

36. Deux surfaces confocales du second ordre se coupent orthogonalement ; quelle est la propriété corrélatrice des surfaces ayant le même centre et les mêmes plans directeurs ?

37. Suivant quelles lignes se coupent de telles surfaces ?

38. Dans quelles surfaces du second degré les lignes de courbure sont-elles planes ?

39. Quelle que soit la surface, si la ligne de courbure est plane, l'angle entre ce plan et un plan tangent, mené par un point de la ligne, est invariable.

40. La détermination de la ligne géodésique sur la surface de l'ellipsoïde dépend d'une équation différentielle du second ordre. Quelle est l'interprétation géométrique de l'intégrale première ?

41. Toutes les lignes géodésiques partant d'un ombilic convergent vers l'ombilic opposé.

42. Tous les arcs géodésiques joignant deux ombilics opposés sont de même longueur.

43. La somme ou la différence de deux arcs géodésiques partant de deux ombilics vers un point quelconque d'une même ligne de courbure est invariable.

44. Il existe un théorème général pour des lignes géodé-

siques menées d'un point quelconque à une ligne de courbure donnée et rencontrant une seconde ligne de courbure.

45. Deux arcs géodésiques touchent des lignes de courbures données et se coupent orthogonalement; quel est le lieu du point d'intersection?

46. Si on développe $f(x)$ dans une série procédant suivant les sinus ou cosinus des multiples de x , comment faut-il former les coefficients?

47. Quel développement doit-on choisir pour qu'il soit vrai pour des valeurs de x comprises entre π et $-\pi$?

48. Ce développement subsiste-il encore lorsque $f(x)$ devient discontinue pour une valeur particulière $x = a$?

49. Comment peut-on connaître les caractères de la convergence de cette série?

50. Quelle est la limite de l'intégrale $\int_x^{\beta} \frac{\sin(i\omega)}{\sin \omega} d\omega$, i croissant indéfiniment?

51. De là, la valeur ultime de l'intégrale $\int_x^{\beta} f(\omega) \frac{\sin i\omega}{\sin \omega} d\omega$.

52. Quelle est la valeur de cette intégrale lorsque $f(\omega)$ devient discontinue pour $\omega = 0$?

53. Quelle est la position d'une courbe dont l'ordonnée est égale à une série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de x ?

54. Comment faut-il transformer la formule pour une série procédant suivant les sinus et cosinus de x multiple, quand on adopte les limites $-l$ et $+l$?

55. On peut déduire des mêmes formules une expression triple de $f(x)$ sous forme d'intégrale double.

56. L'ordonnée d'une ligne brisée peut s'exprimer en fonction de l'abscisse.

57. En cherchant la fonction de la variable x qui est comprise entre les limites

$$x = -1; \quad x = +1,$$

nous tombons sur une intégrale définie digne de remarque.

58. Donner la démonstration de la formule

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k f(a) da}{k^2 + (a-x)^2} = f(x)$$

qui a lieu k diminuant indéfiniment.

59. Dédire de là le théorème de Fourier.

60. Le théorème de Fourier peut s'étendre aux fonctions à plusieurs variables.

61. Dans la transformation de l'intégrale double, que devons-nous substituer à la place de l'élément $dx dy$?

62. Donner une explication géométrique de ce changement.

63. Usage des intégrales définies dans la solution de l'équation différentielle du $n^{i\text{ème}}$ ordre.

64. La solution d'une telle équation différentielle peut s'écrire sous forme d'une intégrale multiple.

65. Si les coefficients sont constants, l'intégrale multiple peut se transformer dans une somme d'intégrales simples.

66. Si les constantes sont les coefficients d'une équation algébrique ayant des racines égales, comment faut-il changer la forme de l'une et de l'autre solution?

Note. On voit, d'après ce programme, que dans la savante université irlandaise, les études analytiques et géométriques sont portées à la hauteur du niveau actuel; en effet, l'analyse et la géométrie sont pour ainsi dire les deux yeux de la science, et c'est l'éborgner que de vouloir l'emploi exclusif d'une de ces méthodes; mais nous comprenons, sous le nom de géométrie, non pas celle qui est emprisonnée depuis tant de siècles dans le système cellulaire des coniques, mais la science qui s'occupe des propriétés générales de l'espace, telle qu'elle est enseignée aujourd'hui en Sorbonne, sous le nom de géométrie *supérieure*. par un de ses plus célèbres promoteurs

On regrette de ne trouver ici aucune question sur une théorie acquérant de jour en jour plus d'importance, sur la théorie des nombres. C'est une lacune qui, on peut l'espérer, ne subsistera pas toujours.

PHYSIQUE (*).

M. Mac Cullagh, professeur.

1. Donner l'expression de l'action du soleil et de la lune sur la mer dans un lieu donné.
2. Par quel calcul Newton détermine-t-il la hauteur de la mer par la théorie dite de l'équilibre?
3. Déterminer la hauteur de l'eau, ayant égard à sa densité.
4. Comment le coefficient de la hauteur de l'eau dépend-il de la densité de l'eau?
5. Par quelle expérience connaît-on la densité moyenne de la terre? Décrire l'expérience de Cavendish et donner les éléments du calcul.
6. Exprimer la hauteur totale de l'eau dans la théorie de l'équilibre, en coordonnées astronomiques.
7. Trois espèces de termes à remarquer dans cette expression; quelles oscillations ces termes déterminent-ils?
8. Expression de l'oscillation semi-diurne.
9. Pourquoi le retard des marées de jour en jour, diminue-t-il des syzygies aux quadratures, et augmente-t-il des quadratures aux syzygies?
10. Dans la théorie dynamique de Laplace, quelle est l'hypothèse sur la forme et la profondeur de la mer? D'où vient la nécessité de cette hypothèse?

(*) Sous ce nom, on comprend la mécanique et l'astronomie.

11. Comment, dans cette hypothèse, faut-il former les équations du mouvement des eaux ?

12. Intégrales particulières données par Laplace.

13. Quelle est l'oscillation diurne en hauteur ? Dans quel cas est-elle nulle ?

14. Quel est l'effet des marées sur la précession des équinoxes ?

15. Comment faut-il calculer la précession des équinoxes ?

16. Si les trois moments principaux d'un corps sont égaux, son mouvement de rotation n'est pas sensiblement changé par l'attraction d'un corps éloigné.

17. D'après quelle loi la vitesse de rotation change-t-elle, si le corps se refroidit ou s'échauffe ?

18. L'équation générale d'équilibre d'un système de points, telle qu'elle est donnée par Lagrange, combien comprend-elle de conditions ?

19. Quel sens Lagrange attribue-t-il aux facteurs dans cette équation ?

20. Si le corps est continu, il y a deux espèces de conditions et deux espèces de forces appliquées.

21. Equation générale de l'équilibre en ce cas.

22. Comment faut-il traiter cette équation, si elle renferme des conditions différentielles ?

23. Combien peut-on se donner de conditions indéterminées ?

24. Dans les problèmes de mécanique et dans les problèmes de géométrie qui dépendent du calcul de variation, on fait usage de *multiplicateurs* ; sont-ils de même nature dans l'un et l'autre cas ?

25. En quoi diffèrent les variations des coordonnées dans ces deux genres de questions ?

26. Combien y a-t-il d'équations finales indéfinies dans les questions de mécanique ? Combien en géométrie ?

27. Quelle est l'équation d'équilibre d'un fil flexible ou inflexible d'après Lagrange?
28. Que signifie le *facteur* dans cette équation?
29. Si ce fil est appliqué contre une surface donnée, comment faut-il traiter la question?
30. Déterminer dans ce cas la réaction de la surface,
31. Quelle est l'équation d'équilibre d'un fluide incompressible d'après Lagrange?
32. Comment en déduit-on les équations ordinaires de l'équilibre d'un fluide?
33. Comment Navier emploie-t-il l'équation générale de la dynamique pour exprimer l'équilibre d'un corps solide, homogène, élastique?
34. Dans cette équation, le moment des forces internes du solide élastique est une fonction de six quantités différentielles (intégrale sextuple).
35. Le changement de distances entre les particules voisines dépend de ces six quantités.
36. L'expression du moment des forces internes est-elle la même lorsque le corps n'a pas la même élasticité dans toutes les directions?
37. Dans un corps solide homogène, peuvent se propager deux espèces de vibrations. Quelle est la relation entre les vitesses de ces propagations?
38. L'éther lumineux dans un corps cristallisé étant troublé, trouver le moment δV des forces internes; quelle est la forme générale de V ?
39. Définition des axes principaux d'un cristal.
40. Une onde plane se propageant dans un cristal, trouver la loi de propagation.
41. Démontrer que les vibrations se font dans le plan de l'onde.

42. Comment détermine-t-on analytiquement la direction des vibrations dans le plan de l'onde?

43. Que signifie cette condition, géométriquement? Existe-t-il deux directions?

44. Quelle est la vitesse de propagation dans l'une et l'autre direction?

45. En quoi ces lois s'accordent-elles avec la théorie de Fresnel? en quoi en diffèrent-elles?

46. D'où Fresnel conclut-il que les vibrations du rayon polarisé sont normales au plan de polarisation? Au vrai, ne sont-elles pas parallèles à ce plan?

47. Les vibrations sont toujours perpendiculaires au rayon dans la théorie dynamique, et pas de même dans la théorie de Fresnel.

48. Comment faut-il définir la surface des ondes?

49. Comment Huyghens démontre-t-il la loi de Snellius (*)?

50. Quelle est la loi de la réfraction dans un milieu cristallisé? comment la démontre-t-on?

51. Ces lois peuvent se déduire de la forme des intégrales particulières.

52. Comment la loi de Snellius est-elle démontrée par Newton? Quelle est la vitesse de propagation selon Newton?

53. Comment Newton explique-t-il le phénomène de la réflexion totale?

54. Dans ce cas comment, dans la théorie ondulatoire, démontre-t-on l'absence de tout rayon réfracté?

55. Quel est ainsi le mouvement propagé dans le second milieu? En chercher les lois.

56. Trouver les conditions à observer dans la surface commune aux deux milieux.

*) Loi de réfraction de Descartes.

57. Ces conditions peuvent s'énoncer brièvement.

58. Il existe encore une autre condition, mais qui est renfermée dans celle-là.

59. D'après ces conditions, il résulte que la *phase* n'est pas changée, s'il existe un rayon réfracté.

60. Si la réflexion est totale, la *phase* est-elle changée par la réflexion ?