

MOUTIER

## Solution de la question 124

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 6 (1847), p. 221-223

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1847\\_1\\_6\\_\\_221\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__221_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1847, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

SOLUTION DE LA QUESTION 124 (t. V, p. 376).

**PAR M. MOUTIER,**  
élève au Collège de Versailles.

---

(Fig. 41.) Soit  $oMP$  un triangle dont le sommet fixe  $o$  est sur une droite fixe  $oL$  située dans le plan du triangle, on a :

$$oP=1; \quad MP=\sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \cos(MoP-2oMP) = \cos MoL.$$

Le lieu du point  $M$  est une lemniscate, et la tangente en  $M$  passe par le centre du cercle circonscrit au triangle  $oPM$ .

(Secret.)

Je prends  $o$  pour pôle ;  $oL$  pour axe polaire, et j'appelle  $\omega, \rho$  les coordonnées du point  $M$  ; on a alors

$$\cos MoP \cos 2oMP + \sin MoP \sin 2oMP = \cos \omega.$$

Or, dans le triangle  $MoP$  .

$$\cos MoP = \frac{\rho^2 - 1}{2\rho}; \quad \cos oMP = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho\sqrt{2}};$$

et par suite  $\sin \text{MoP} = \frac{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}}{2\rho}$ ;  $\sin \text{oMP} =$ , etc.;  
reportant ces valeurs dans la précédente équation, et réduisant

$$\rho^4 - 4\rho^3 \cos \omega + 4\rho^2 - 1 = 0,$$

équation polaire d'une lemniscate ayant pour axe, l'axe polaire; le centre V a pour rayon vecteur  $\text{oV} = 1$ ; et les sommets  $s$  et  $s'$ ,

$$\text{os}' = 1 + \sqrt{2}; \quad \text{os} = \sqrt{2} - 1, \text{ etc.}$$

Soit  $c$  le centre du cercle circonscrit au triangle  $\text{oPM}$ , et  $\text{cD}$  perpendiculaire sur le milieu de  $\text{oM}$ ; alors

$$\text{cD} = \sqrt{\text{cM}^2 - \frac{\rho^2}{4}};$$

mais, d'après la formule  $\text{R} = \frac{abc}{4s}$ ,

$$\text{cM} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2\rho \sin \text{MoP}} = \frac{\rho\sqrt{2}}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}},$$

et 
$$\text{cD} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\rho^2 - 3}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}}.$$

En désignant par  $k$  un certain accroissement du rayon vecteur, et par  $h$  l'accroissement correspondant de l'angle :

$$\limite \left( \frac{h}{k} \right) = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^3 \sin \omega}.$$

Si donc je mène la sous-tangente polaire du point M :

$$\text{oT} = \rho \lim \left( \frac{h}{k} \right) = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^2 \sin \omega}$$

Or, il est aisé de vérifier que

$$\frac{\rho(\rho^2 - 3)}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}} = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^3 \sin \omega},$$

c'est-à-dire que  $2cD = oT$ ; donc les trois points  $M$ ,  $c$ ,  $T$  sont en ligne droite; donc enfin la tangente à la lemniscate au point  $M$  passe par le centre du cercle circonscrit au triangle  $oPM$ .

---