NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOUTIER

Solution de la question 124

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 221-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__221_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 124 (t. V, p. 376).

PAR M. MOUTIER,
elève au College de Versailles.

(*Fig.* 41.) Soit oMP un triangle dont le sommet fixe o est sur une droite fixe oL située dans le plan du triangle, on a :

$$oP=1\,;\quad MP=\sqrt{2}\,,\quad \text{et}\quad \cos(MoP-2oMP)=\cos MoL.$$

Le lieu du point M est une lemniscate, et la tangente en M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle oPM.

(Serret.)

Je prends o pour pôle ; oL pour axe polaire, et j'appelle ω, ρ les coordonnées du point M ; on a alors

$$\cos MoP \cos 2oMP + \sin MoP \sin 2oMP = \cos\omega.$$

Or, dans le triangle MoP ·

$$\cos MoP = \frac{\rho^2-1}{2\rho}\,;\quad \cos oMP = \frac{\rho^2+1}{2\rho\sqrt{2}}\,;$$

et par suite $\sin MoP = \dfrac{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}}{2\rho}$; $\sin oMP =$, etc.; reportant ces valeurs dans la précédente équation, et réduisant

$$\rho^4 - 4\rho^3 \cos\omega + 4\rho^2 - 1 = 0,$$

équation polaire d'une lemniscate ayant pour axe, l'axe polaire ; le centre V a pour rayon vecteur $oV = 1$; et les sommets s et s',

$$os' = 1 + \sqrt{2}\,; \quad os = \sqrt{2} - 1, \text{ etc.}$$

Soit c le centre du cercle circonscrit au triangle oPM, et cD perpendiculaire sur le milieu de oM ; alors

$$cD = \sqrt{\overline{cM}^2 - \frac{\rho^2}{4}}\,;$$

mais, d'après la formule $R = \dfrac{abc}{4s}$,

$$cM = \frac{\rho\sqrt{2}}{2\rho \sin MoP} = \frac{\rho\sqrt{2}}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}},$$

et

$$cD = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\rho^2 - 3}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}}.$$

En désignant par k un certain accroissement du rayon vecteur, et par h l'accroissement correspondant de l'angle :

$$\text{limite}\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^4 \sin\omega}.$$

Si donc je mène la sous-tangente polaire du point M :

$$oT = \rho^2 \lim\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^2 \sin\omega}$$

Or, il est aisé de vérifier que

$$\frac{\rho(\rho^2 - 3)}{\sqrt{6\rho^2 - \rho^4 - 1}} = \frac{4\rho^2 - \rho^4 - 3}{4\rho^3 \sin\omega},$$

c'est-à-dire que $2cD = oT$; donc les trois points M, c, T sont en ligne droite ; donc enfin la tangente à la lemniscate au point M passe par le centre du cercle circonscrit au triangle oPM.