NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Mémoire sur la résolution de deux équations à deux inconnues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 135-150

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__135_0>

MÉMOIRE

sur la résolution de deux équations à deux inconnues.

PAR M. OSSIAN BONNET,
Répetiteur à l'École polytechnique.

(Suite. Voyez page 54.)

—

§ 2. *Démonstration des deux lemmes sur lesquels repose la résolution de deux équations à deux inconnues.*

1er LEMME. *Soient* A, B, C *trois fonctions de deux variables* x *et* y *vérifiant la relation*

$$(1)\quad A = BM + C,$$

M *étant aussi une fonction de* x *et de* y, *je dis que les solutions du système* $A = 0$, $B = 0$ *sont les mêmes que celles du système* $B = 0$, $C = 0$, *ou comme nous sommes convenus de l'écrire pour abréger, que*

$$[A, B] = [B, C].$$

D'abord il est évident que si un système de valeurs de x et de y, $x = \alpha$, $x = \beta$ annulent A et B, ces mêmes valeurs annuleront B et C, et réciproquement ; ce qu'il importe donc de démontrer, c'est qu'une solution commune aux deux systèmes, a dans les deux le même degré de multiplicité. Appelons y_n, y_p, ... y_r, les valeurs de x tirées de l'équation $B = 0$, qui se réduisent à α quand on y fait $y = \beta$, si nous portons successivement ces valeurs à la place de x dans la relation (1), il viendra

$$\begin{array}{l} A_n = C_n \\ A_p = C_p \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ A_r = C_r. \end{array}$$

en appelant A_n, A_p, ... A_r ce que devient A pour

$x = y_n, y_p, \ldots y_r$, et C_n, C_p, ... C_r, ce que devient C pour les mêmes hypothèses. De là nous tirons

$$A_n A_p \ldots A_r = C_n C_p \ldots C_r.$$

Or le degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$ du premier membre indique le degré de multiplicité de la solution $x=\alpha, y=\beta$ dans le système $A=0$, $B=0$, et celui du second membre le degré de multiplicité de la même solution dans le système $B=0$, $C=0$: ces deux degrés de multiplicité sont donc égaux.

2e Lemme. *Tout système de deux équations de la forme* $AB=0$, $C=0$, *peut être remplacé par les deux systèmes* $A=0$, $C=0$, *et* $B=0$, $C=0$; *en d'autres termes*,

$$[AB, C] = [A, C] + [B, C].$$

Il est évident d'abord qu'un système de valeurs de x et de y, $x=\alpha$, $y=\beta$, qui annulent AB et C, doivent nécessairement annuler A et C, ou B et C, et réciproquement. Ce qu'il suffit donc de démontrer, c'est qu'en appelant ν, ν', ν'' les degrés de multiplicité respectifs de la solution $x=\alpha$, $y=\beta$ dans les trois systèmes ($AB=0$, $C=0$), ($A=0$, $C=0$), ($B=0$, $C=0$), on a toujours $\nu=\nu'+\nu''$. Appelons $y_n, y_p, \ldots y_r$ les valeurs de x tirées de l'équation $C=0$, qui se réduisent à α quand on y fait $y=\beta$; substituons successivement ces racines à la place de x dans A et dans B, et soient A_n, $A_p \ldots A_r$, B_n, $B_p \ldots B_r$ les résultats obtenus; ν sera égal au degré d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$, du produit

$$A_n B_n A_p B_p \ldots A_r B_r,$$

et ν' et ν'' aux degrés d'infiniment petit par rapport à $y-\beta$, des produits

$$A_n A_p \ldots A_r$$

et

$$B_n B_p \ldots B_r.$$

D'après cela, il est bien évident que $\nu=\nu'+\nu''$, comme il fallait le démontrer.

§ 3. *Méthode rigoureuse pour ramener la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues à celle de plusieurs systèmes composés d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues.*

Soient $A=0$, $B=0$ les deux équations proposées. Appliquons aux premiers membres, que nous supposons débarrassés de tous leurs facteurs fonctions de x, fonctions de y et fonctions de x et y, le procédé connu du plus grand commun diviseur; si $q, q_1, q_2 \ldots q_n$ et $Rr, R_1r_1, R_2r_2 \ldots R_{n-1}r_{n-1}, r_n$ sont les quotients et les restes successifs, et $c, c_1, c_2 \ldots c_n$ les fonctions de y par lesquelles on a dû multiplier les dividendes pour obtenir des quotients entiers par rapport à y, nous aurons la suite des relations

$$(1)\qquad \begin{cases} cA = Bq + Rr \\ c_1B = Rq_1 + R_1r_1 \\ c_2R = R_1q_2 + R_2r_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_nR_{n-2} = R_{n-1}q_n + r_n. \end{cases}$$

Or la première relation nous donne, en vertu du premier lemme (§ 2),

$$[cA,B] = [B,Rr],$$

d'où, en vertu du second lemme (§ 2) :

$$[A,B] + [c,B] = [B,R] + [r,B],$$

d'où

$$[A,B] = [B,R] + [r,B] - [c,B];$$

de même la seconde relation donne :

$$[B,R] = [R,R_1] + [r_1,R] - [c_1,R],$$

la troisième :

$$[R,R_1] = [R_1,R_2] + [r_2,R_1] - [c_2,R_1],$$

et ainsi de suite; enfin la dernière :

$$[R_{n-2}, R_{n-1}] = [r_n, R_{n-1}] - [c_n, R_n].$$

Ajoutant toutes ces égalités et supprimant les termes communs aux deux membres, il vient :

$$[A,B] = \begin{cases} [r, B] + [r_1, R] + [r_2, R_1] + \ldots + [r_n, R_{n-1}] \\ -[c, B] - [c_1, R] - [c_2, R_1] - \ldots - [c_n, R_{n-1}], \end{cases}$$

ce qui ramène la résolution du système proposé à celle de $2(n+1)$ autres systèmes composés chacun d'une équation à une inconnue et d'une équation à deux inconnues.

§ 4. *Simplification de la méthode précédente. — Démonstration complète du théorème de MM. Labatie et Sarrus.*

Proposons-nous de simplifier les résultats qu'a fournis la méthode précédente, en cherchant à retrancher d'une manière générale et algébrique les solutions $[c, B]$, $[c_1, R]$, $[c_2, R_1]$,... $[c_n, R_{n-1}]$ des solutions $[r, B]$, $[r_1, R]$, $[r_2, R_1]$... ... $[r_n, R_{n-1}]$. Reprenons les relations (1) du paragraphe précédent, et pour simplifier le raisonnement, supposons-y $n = 4$, ce qui les réduira à

$$(1) \quad \begin{cases} cA = Bq + Rr \\ c_1B = Rq_1 + R_1r_1 \\ c_2R = R_1q_2 + R_2r_2 \\ c_3R_1 = R_2q_3 + R_3r_3 \\ c_4R_2 = R_3q_4 + r_4. \end{cases}$$

La première nous donnera, comme on l'a vu plus haut,

$$[A, B] = [B, R] + [r, B] - [c, B].$$

Appelons d le plus grand commun diviseur entre r et c, d divisant exactement r et c, on aura (lemme 2) :

$$[r, B] = \left[\frac{r}{d}, B\right] + [d, B], \quad [c, B] = \left[\frac{c}{d}, B\right] + [d, B],$$

et par conséquent, en substituant dans la dernière relation,

$$[A, B]=[B, R]+\left[\frac{r}{d}, B\right]-\left[\frac{c}{d}, B\right];$$

mais d étant le plus grand commun diviseur entre r et c, les quotients $\frac{r}{d}$ et $\frac{c}{d}$ sont premiers entre eux ; les solutions $\left[\frac{c}{d}, B\right]$ sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r}{d}, B\right]$; cela nous montre que ces dernières solutions sont toutes contenues dans [A, B], et qu'en posant :

$$[A, B]=\left[\frac{r}{d}, B\right]+[A_1, B_1],$$

on a :

$$(2)\quad [A_1, B_1]=[B, R]-\left[\frac{c}{d}, B\right].$$

Considérons la seconde des relations (1). Nous en tirons d'abord :

$$[B, R]=[R, R_1]+[r_1, R]-[c_1, R],$$

d'où, en appelant d_1' le plus grand commun diviseur entre r_1 et c_1, et opérant comme plus haut,

$$[B, R]=[R,R_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'}, R\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right];$$

substituons cette valeur de [B, R] dans l'égalité (2), il viendra :

$$(3)\quad [A_1, B_1]=[R, R_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'}, R\right]-\left[\frac{c}{d}, B\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right];$$

appelons d_1'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{d_1'}{r_1}$ et $\frac{c}{d}$, je dis que l'on aura :

$$[d_1'', R]=[d_1'', B],$$

En effet, divisant les deux membres de la première des égalités (1) par d, il vient :

$$(a)\qquad \frac{c}{d}A=BQ+R\frac{r}{d},$$

ou $Q=\frac{q}{d}$ est entier, puisque $\frac{c}{d}$ et $\frac{r}{d}$ le sont; or d_1'' étant un diviseur de $\frac{c}{d}$, on a (lemme 1) :

$$[d_1'', BQ]=\left[d_1'', R\frac{r}{d}\right],$$

d'où, $\frac{r}{d}$ étant premier avec $\frac{c}{d}$, et par suite avec d_1'',

$$[d_1'', B]+[d_1'', Q]=[d_1'', R],$$

d'où

$$[d_1'', B] \overline{\overline{<}} [d_1'', R];$$

mais d'un autre côté, si l'on divise par d_1' les deux membres de la seconde des équations (1), ce qui donne :

$$(b)\qquad \frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'},$$

on peut en déduire semblablement

$$[d_1'', R] \overline{\overline{<}} [d_1'', B].$$

Nous conclurons de là que

$$[d_1'', B]=[d_1'', R];$$

donc, en remarquant que

$$\left[\frac{r_1}{d_1'}, R\right]=\left[\frac{r'}{d_1'd_1''}, R\right]+[d_1'', R]$$

et

$$\left[\frac{c}{d}, B\right]=\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]+[d_1'', B],$$

on pourra écrire la relation (3) sous la forme :

$$[A_1, B_1]=[R, R_1]+\left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right]-\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]-\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right];$$

et comme les deux quotients $\frac{c_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{dd_1''}$ sont l'un et l'autre premiers avec $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, d'où résulte que les solutions $\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right]$ sont distinctes des solutions $\left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right]$; on peut conclure que ces dernières solutions sont contenues dans $[A_1, B_1]$, et qu'en posant :

$$[A_1, B_1] = \left[\frac{r_1}{d_1'd_1''}, R\right] + [A_2, B_2],$$

on a :

$$(4) \quad [A_2, B_2] = [R, R_1] - \left[\frac{c}{dd_1''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right].$$

Passons à la troisième des égalités (1) ; nous en tirons :

$$[R, R_1] = [R_1, R_2] + [r_2, R_1] - [c_2, R_1],$$

d'où, en appelant d_2' le plus grand commun diviseur entre r_2 et c_2, et opérant comme plus haut :

$$[R, R_1] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Substituons cette valeur de $[R, R_1]$ dans la relation (4), ce qui donne :

$$(5) \quad [A_2, B_2] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right] - \left[\frac{c}{dd_1''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right],$$

et appelons d_2'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, je dis que l'on aura :

$$[d_2'', R_1] = [d_2'', R].$$

En effet, divisant par d_1' les deux membres de la seconde des égalités (1), il vient :

$$(c) \qquad \frac{c_1}{d_1'} B = RQ_1 + R_1 \frac{r_1}{d_1'}.$$

Or d_2'' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'}$, on a :

$$[d_2'', RQ_1] = \left[d_2'', R_1 \frac{r_1}{d_1'}\right];$$

donc

$$[d_2'', R] + [d_2', Q_1] = [d_2'', R_1]$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$ est premier avec $\frac{c_1}{d_1'}$ et par suite avec d_2''; donc

$$[d_2'', R] \overset{=}{<} [d_2'', R_1];$$

d'un autre côté, si l'on divise par d_2' les deux membres de la troisième des égalités (1), ce qui donne :

$$(d) \qquad \frac{c_2}{d_2'} R = R_1 Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'},$$

on pourra dire que d_2'' étant un diviseur de $\frac{r_2}{d_2'}$, on a :

$$[d_2'', R_1 Q_2] = \left[d_2'', \frac{c_2}{d_2'} R\right],$$

d'où

$$[d_2'', R_1] \overset{=}{<} [d_2'', R].$$

Nous conclurons de là

$$[d_2'', R_1] = [d_2'', R];$$

et par conséquent, en remarquant que

$$\left[\frac{r_2}{d_2'}, R_1\right] = \left[\frac{r_2}{d_2' d_2''}, R_1\right] + [d_2'', R_1]$$

et

$$\left[\frac{c_1}{d_1'}, R\right] = \left[\frac{c_1}{d_1' d_2''}, R\right] + [d_2'', R],$$

que l'égalité (5) peut se mettre sous la forme :

$$(6) \quad [A_2, B_2] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2' d_2''}, R_1\right] - \left[\frac{c}{d d_1''}, B\right] - $$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1' d_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Appelons encore d_2''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ et $\frac{c}{dd_1''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_2''', R_1]=[d_2''', B].$$

En effet, entre les deux égalités

$$\frac{c}{d}A=BQ+R\frac{r}{d},$$

$$\frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'},$$

déjà considérées, éliminons R; puis l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_1'' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{c}{d}$, il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''}Q_1A=BQ'+R_1\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1'd_1''},$$

où Q' est entier, puisque $\frac{c}{dd_1''}$, $\frac{r}{d}$ et $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$ le sont. Mais d_2''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''}$, on a :

$$[d_2''', BQ']=\left[d_2''', R_1\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\right];$$

donc

$$[d_2''',B]+[d_2''',Q']=[d_2''', R_1];$$

puisque $\frac{r}{d}$ et $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$ sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''}$ et par suite avec d_2'''; donc

$$[d_2''', B]\overset{=}{<}[d_2''', R_1].$$

D'un autre côté, si l'on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'}B=RQ_1+R_1\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'}R=R_1Q_2+R_2\frac{r_2}{d_2'},$$

et que l'élimination faite, on divise de part et d'autre par

d_2'' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_1}{d_1'}$ et $\frac{r_2}{d_2'}$, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}\frac{c_2}{d_2'}B = R_1Q'' + R_2Q_1\frac{r_2}{d_2'd_2''};$$

et d_2''' étant un diviseur de $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, on verra de même que

$$[d_2''', R_1] \overline{\overline{<}} [d_2''', B].$$

Nous conclurons de là

$$[d_2''', R_1] = [d_2''', B],$$

et par conséquent en remarquant que

$$\left[\frac{r_2}{d_2'd_2''}, R_1\right] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [d_2''', R_1]$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] + [d_2''', B],$$

que l'on peut écrire la relation (6) sous la forme.

$$[A_2, B_2] = [R_1, R_2] + \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] - \\ - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Actuellement les trois quotients $\frac{c_2}{d_2'}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$ sont premiers avec $\frac{r_2}{d'_2d''_2d'''_2}$; donc les solutions $\left[\frac{c_2}{d'_2}, R_1\right]$ $\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right]$ sont distinctes des solutions $\left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right]$. Cela nous montre que ces dernières solutions sont toutes renfermées dans $[A_2, B_2]$, et que l'on peut par conséquent poser

$$[A_2, B_2] = \left[\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}, R_1\right] + [A_3, B_3];$$

ce qui donne :

$$(7)\quad [A_3, B_3] = [R_1, R_2] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right].$$

Passons à la quatrième des relations (1), nous en tirons :

$$[R_1, R_2] = [R_2, R_3] + [r_3, R_2] - [c_3, R_2];$$

d'où, en appelant d_3' le plus grand commun diviseur entre r_3 et c_3, et opérant comme plus haut,

$$[R_1, R_2] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Substituant cette valeur de $[R_1, R_2]$ dans la relation (7), il viendra :

$$(8)\quad [A_3, B_3] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, R\right] -$$

$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Appelons d_3'' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'}$ et $\frac{c_2}{d_2'}$, je dis que l'on aura :

$$[d_3'', R_2] = [d_3'', R_1].$$

Il suffit, en effet, de considérer les deux égalités :

$$\frac{c_2}{d_2'} R = R_1 Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'} R_1 = R_2 Q_3 + R_3 \frac{r_3}{d_3'},$$

obtenues en divisant la troisième des égalités (1) par d_2' et la quatrième par d_3', et de raisonner sur elles comme on l'a déjà fait sur les égalités (a) et (b) ou sur les égalités (c) et (d). La relation

$$[d_3'', R_2] = [d_3'', R_1]$$

permet de mettre l'égalité (8) sous la forme ·

$$(9)\quad [A_1, B_3] = [R_1, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, R_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right]$$
$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Il suffit de remarquer que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'}, R_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, R_2\right] + [d_3'', R_2],$$
$$\left[\frac{c_2}{d_2'}, R_1\right] = \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] + [d_3'', R_1].$$

Appelons encore d_3''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$; je dis que l'on aura :

$$[d_3''', R_2] = [d_3''', R].$$

En effet, entre les deux égalités :

$$\frac{c_1}{d_1'} B = R Q_1 + R_1 \frac{r_1}{d_1'},$$
$$\frac{c_2}{d_2'} R = R_1 Q_2 + R_2 \frac{r_2}{d_2'},$$

éliminons R_1, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_2'', plus grand commun diviseur entre $\frac{r_2}{d_2'}$ et $\frac{c_1}{d_1'}$, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''} Q_2 B = R Q_1' + R_2 \frac{r_2}{d_2'd_2''} \frac{r_1}{d_1'}.$$

Or d_3''' étant un diviseur de $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, on a :

$$[d_3''', RQ_1'] = \left[d_3''', R_2 \frac{r_2}{d_2'd_2''} \frac{r_1}{d_1'}\right];$$

donc

$$[d_3''', RQ_1'] = [d_3''', R_2],$$

puisque $\frac{r_1}{d_1'}$ et $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$ sont premiers avec $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, et par suite avec d_3'''; donc

$$[d_3''', \mathrm{R}] \overset{=}{<} [d_3''', \mathrm{R}_2].$$

D'un autre côté, si on élimine R_1 entre les daux égalités

$$\frac{c_2}{d_2'}\mathrm{R} = \mathrm{R}_1\mathrm{Q}_2 + \mathrm{R}_2\frac{r_2}{d_2'},$$

$$\frac{c_3}{d_3'}\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2\mathrm{Q}_3 + \mathrm{R}_3\frac{r_3}{d_3'},$$

et que, l'élimination faite, on divise de part et d'autre par d_3'' plus grand commun diviseur entre $\frac{c_2}{d_2'}$ et $\frac{r_3}{d_3'}$, il viendra :

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'}\mathrm{R} = \mathrm{R}_2\mathrm{Q}_1'' + \mathrm{R}_3\mathrm{Q}_2\frac{r_3}{d_3'd_3''};$$

et d_3''' étant un diviseur de $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$ et $\frac{c_3}{d_3'}$, on trouvera de même :

$$[d_3''', \mathrm{R}_2] \overset{=}{<} [d_3''', \mathrm{R}].$$

Nous conclurons de là

$$[d_3''', \mathrm{R}] = [d_3''', \mathrm{R}_2],$$

et par conséquent en remarquant que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''}, \mathrm{R}_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, \mathrm{R}_2\right] + [d_3''', \mathrm{R}_2],$$

$$\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''}, \mathrm{R}\right] = \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right] + [d_3''', \mathrm{R}],$$

que l'on peut écrire la relation (9) sous la forme :

$$(10)\ [\mathrm{A}_3, \mathrm{B}_3] = [\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, \mathrm{R}_2\right] - \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, \mathrm{B}\right]$$

$$- \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, \mathrm{R}\right] - \left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, \mathrm{R}_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, \mathrm{R}_2\right].$$

Appelons enfin d_3'''' le plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$ et $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, je dis que l'on aura :

$$[d_3'''', R_2] = [d_3'''', B].$$

Pour le démontrer, entre les deux égalités

$$\frac{c}{dd_1''} Q_1A = BQ' + R_1 \frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''},$$

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''}\frac{c_2}{d_2'} B = R_1Q'' + R_2Q_1\frac{r_2}{d_2'd_2''},$$

éliminons R_1, puis, l'égalité finale obtenue, divisons ses deux membres par d_2''' plus grand commun diviseur entre $\frac{c}{dd_1''}$ et $\frac{r_2}{d_2'd_2''}$, et par Q_1, qui sera facteur à deux et par suite aux trois termes, il viendra :

$$\frac{c}{dd_1''d_2'''} Q''A = BQ_1''' + R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''};$$

or d_3'''' étant un diviseur de $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, on a :

$$[d_3'''', BQ_1'''] = \left[d_3'''', R_2\frac{r}{d}\frac{r_1}{d_1'd_1''}\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}\right];$$

donc

$$[d_3'''', BQ_1'''] = [d_3'''', R_2].$$

puisque $\frac{r}{d}$, $\frac{r_1}{d_1'd_1''}$, $\frac{r_2}{d_2'd_2''d_2'''}$ sont premiers avec $\frac{c}{dd_1''d_2'''}$, et par suite avec d_3'''' ; donc

$$[d_3'''', B] \leqq [d_3'''', R_2],$$

D'un autre côté, si on élimine R entre les deux égalités

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''} Q_2B = RQ_1' + R_2\frac{r_2}{d_2'd_2''}\frac{r_1}{d_1'},$$

$$\frac{c_2}{d_2'd_3''}\frac{c_3}{d_3'} R = R_2Q_1'' + R_3Q_2\frac{r_3}{d_3'd_3''},$$

et que, l'élimination faite, on divise par d_3''' plus grand commun diviseur entre $\frac{r_3}{d_3'd_3''}$ et $\frac{c_1}{d_1'd_2''}$, et par Q_1 facteur commun à tous les termes, il viendra :

$$\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}\ \frac{c_2}{d_2'd_3''}\ \frac{c_3}{d_3'}\ B = R_2Q_1'''' + R_3Q_1'\ \frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''},$$

et d_3'''' étant un diviseur de $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}$, qui d'ailleurs est premier avec $\frac{c_3}{d_3'}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, on trouvera de même :

$$[d_3'''', R_2] \leqq [d_3'''', B];$$

de là nous conclurons

$$[d_3'''', R_2] = [d_3'''', B],$$

et par suite, en remarquant que

$$\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''}, R_2\right] = \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right] + [d_3'''', R_2]$$

et

$$\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''}, B\right] = \left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] + [d_3'''', B],$$

que l'on peut mettre l'égalité (10) sous la forme :

$$[A_3, R_3] = [R_2, R_3] + \left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right]$$
$$-\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right] - \left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]$$
$$-\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right].$$

Actuellement les quatre quotients $\frac{c_3}{d_3'}$, $\frac{c_2}{d_2'd_3''}$, $\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}$, $\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}$ sont premiers avec $\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}$; les solutions $\left[\frac{c_3}{d_3'}, R_2\right]$, $\left[\frac{c_2}{d_2'd_3''}, R_1\right]$, $\left[\frac{c_1}{d_1'd_2''d_3'''}, R\right]$, $\left[\frac{c}{dd_1''d_2'''d_3''''}, B\right]$ sont donc distinctes des solutions $\left[\frac{r_3}{d_3'd_3''d_3'''d_3''''}, R_2\right]$, donc ces dernières solutions sont toutes renfermées dans $[A_3, B_3]$; posant dès lors :

$$[A_3,\ B_3] = \left[\frac{r_3}{d_3' d_3'' d_3''' d_3''''},\ R_2\right] + [A_4,\ B_4],$$

on aura :

$$(11)\quad [A_4,\ B_4] = [R_2,\ R_3] - \left[\frac{c}{d d_1'' d_2''' d_3''''},\ B\right]$$

$$- \left[\frac{c_1}{d_1' d_2'' d_3'''},\ R\right] - \left[\frac{c_2}{d_2' d_3''},\ R_1\right] - \left[\frac{c_3}{d_3'},\ R_2\right].$$

(*La fin prochainement.*)