

A. J.-H. VINCENT

**Sur une méthode proposée par Ampère,
pour extraire les racines des fractions.
Décomposition des fractions en facteurs.
Application à la théorie de la gamme**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 5-13

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR UNE MÉTHODE

*proposée par Ampère, pour extraire les racines des fractions.
— Décomposition des fractions en facteurs. — Application
à la théorie de la gamme.*

PAR A. J.-H. VINCENT,
professeur au Collège royal de Saint-Louis.

L'intéressante publication faite dernièrement, dans ce journal, de l'œuvre posthume d'Ampère, m'a remis en mémoire une de ces conversations toujours si instructives de l'illustre géomètre, dans laquelle il m'exposait une méthode approximative pour l'extraction des racines des fractions numériques. On sera sans doute bien aise de la trouver ici.

§ I.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction numérique dont on veut extraire la racine n^e , a pouvant indifféremment être $>$ ou $<$ b ; multiplions ses deux termes par n ; et, après avoir formé la progression

$$\begin{aligned} & \div na \cdot na + (b-a) \cdot na + 2(b-a) \cdot na + 3(b-a) \cdot \dots \\ & \dots \cdot nb - (b-a) \cdot nb, \end{aligned}$$

considérons les n fractions que l'on obtient en divisant chacun des termes de cette progression par le suivant, c'est-à-dire

$$\frac{na}{na+(b-a)}, \frac{na+(b-a)}{na+2(b-a)}, \frac{na+2(b-a)}{na+3(b-a)}, \dots, \frac{nb-(b-a)}{nb};$$

le produit de toutes ces fractions sera égal à la proposée.

Maintenant, la différence des fractions consécutives étant ordinairement peu considérable (*), on peut la négliger, du moins pour une première approximation : et alors le produit des n fractions sera la n^e puissance de la fraction moyenne, en entendant par là celle du milieu quand n est impair, c'est-à-dire la fraction

$$\frac{na + \frac{1}{2}(n-1)(b-a)}{na + \frac{1}{2}(n+1)(b-a)},$$

ou plus généralement et dans tous les cas, la fraction que l'on obtient en ajoutant terme à terme les deux fractions extrêmes. On aura donc ainsi l'égalité approximative

$$\frac{a}{b} = \left\{ \frac{(n+1)a + (n-1)b}{(n-1)a + (n+1)b} \right\}^n,$$

ce qui donne une valeur approchée de la racine n^e de $\frac{a}{b}$.

Au reste, si l'on veut se faire une idée précise du degré d'approximation ainsi obtenu, il n'y a qu'à développer l'expression précédente après l'avoir préalablement mise sous la forme :

(*) Sa valeur est égale au carré de la différence des nombres a et b , divisé par le produit des dénominateurs des fractions que l'on considère.

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{a-b}{a+b}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b-a}{b+a}\right)^n}$$

puis comparer le développement à la fraction proposée.

Exemple.

$$\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{127}{126} = 1,0079365$$

au lieu de . . . 1,0079361

Erreur. . . . 0,0000004

Il est clair que l'on pourrait, en renversant la question, obtenir d'après le même principe, et par une opération fort simple, la puissance $(2n + 1)^e$ d'une fraction $\frac{a}{b}$; car on a approximativement :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{(n+1)a-nb}{na-(n-1)b} \cdots \frac{3a-2b}{2a-b} \cdot \frac{2a-b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2b-a} \cdot \frac{2b-a}{3b-2a} \cdots \frac{nb-(n-1)a}{(n+1)b-na} = \frac{(n+1)a-nb}{(n+1)b-na}$$

On trouverait facilement la modification convenable au cas d'une puissance de degré pair.

Le lecteur comprend du reste que la méthode sera d'autant plus avantageuse que le nombre n sera plus grand, et que la différence des nombres a et b sera plus petite en comparaison de leurs valeurs absolues (*).

(*) Voyez, dans les *Novi Comment. Petrop.*, pour 1769, tome XIV, 1^{re} part., p. 188, un mémoire d'Euler : *De inventione quocumque mediarum proportionalium citrà radicum extractionem.*

§ II.

J'ajouterai à ce qui précède, que les anciens mathématiciens grecs, particulièrement les mathématiciens de l'école de Ptolémée, employaient une méthode tout à fait analogue à celle qui vient d'être exposée, pour décomposer les nombres qu'ils nommaient superpartiels (*ἐπιμύριοι*, en latin *superparticulares*), c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a+1}{a}$, en d'autres fractions de la même forme. (Cf. Wallis. Op., t. III, *passim*.)

Il est bon de dire d'abord pourquoi ces théoriciens s'attachaient avec tant de soin à ne composer leurs *gammes* ou *harmonies* que d'intervalles de cette nature : c'est à cause de la facilité qu'ils trouvaient, ne connaissant pas les logarithmes, à partager les cordes de manière à leur faire produire ces sortes d'intervalles ; car une corde vibrante étant partagée en a parties égales, il suffisait d'augmenter la longueur* totale de *une* des a parties égales, pour obtenir un second son qui fût, à celui que rendait la première longueur, dans ce même rapport acoustique de a à $a + 1$. Il fallait que l'oreille s'en accommodât ; et l'expérience prouve qu'en effet elle s'en accomode très-bien, pourvu d'abord que ces sons soient rendus sans accompagnement ou du moins ne portent pas d'harmonie, et pourvu ensuite qu'il y en ait toujours 4 par chaque intervalle de quarte, les extrêmes compris.

Ainsi, soit à décomposer l'intervalle de *quarte*, dont la valeur acoustique est $\frac{4}{3}$, en trois intervalles à peu près égaux, ce qui revient à extraire la racine cubique de $\frac{4}{3}$. On avait ainsi, conformément à la méthode exposée d'après Ampère :

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{11} \times \frac{11}{10} \times \frac{10}{9} ;$$

et les quatre sons cherchés, qui produisaient alors le genre nommé *diatonique égal*, étaient rendus par les cordes dont les longueurs, en progression par différence (tout étant semblable d'ailleurs), étaient représentées par les nombres respectifs 9, 10, 11, 12.

Pour les autres genres, on commençait par prélever sur la quarte un premier intervalle (aigu) représenté par la formule $\frac{a+1}{a}$, en faisant

- $a = 4$ pour le genre *enharmonique*,
- $a = 5$ pour le *chromatique mou*,
- $a = 6$ pour le *chromatique dur*,
- $a = 7$ pour le *diatonique mou*,
- $a = 8$ pour le *diatonique moyen*,
- et enfin $a = 9$ pour le *diatonique dur*.

Divisant alors la fraction $\frac{1}{3}$ par chacune des valeurs de la fraction $\frac{a+1}{a}$, on obtenait,

dans le cas de $a = 4$ (<i>g. enharmonique</i>):	quotient = $\frac{16}{15}$
$a = 5$ (<i>chromatique mou</i>):	$\frac{10}{9}$
$a = 6$ (<i>chromatique dur</i>):	$\frac{8}{7}$
$a = 7$ (<i>diatonique mou</i>):	$\frac{7}{6}$
$a = 8$ (<i>diatonique moyen</i>):	$\frac{32}{27}$
$a = 9$ (<i>diatonique dur</i>):	$\frac{6}{5}$

Cela fait, il restait à décomposer ce quotient en 2 fractions

de la forme susdite. Soit par exemple la fraction $\frac{6}{5}$, correspondant au diatonique dur (qui n'est autre que le diatonique des modernes) : si l'on multiplie ses deux termes par 3, on a

$$\frac{18}{15} = \frac{18}{16} \times \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \times \frac{16}{15}.$$

Les autres cas se traitent de la même manière, en multipliant de même par 3, intercalant un nombre pair, qui est toujours déterminé, et prenant la moitié des deux termes pairs de celle des deux fractions résultantes qui se prête à cette transformation. Ainsi, pour $a = 7$, ou pour le *diatonique mou*, on a :

$$\frac{7}{6} = \frac{21}{18} = \frac{21}{20} \times \frac{20}{18} = \frac{21}{20} \times \frac{10}{9};$$

de même pour $a = 4$, ce qui est le cas du genre *enharmonique*, on a :

$$\frac{16}{15} = \frac{48}{45} = \frac{48}{46} \times \frac{46}{45} = \frac{24}{23} \times \frac{46}{45}.$$

Quant à la fraction $\frac{32}{27}$ qui n'a pas la forme superpartielle, on la décompose sans multiplication préalable, en intercalant le nombre pair 28, et l'on a ainsi :

$$\frac{32}{27} = \frac{32}{28} \times \frac{28}{27} = \frac{8}{7} \times \frac{28}{27}.$$

On eût pu également intercaler le nombre 30, d'où

$$\frac{32}{27} = \frac{32}{30} \times \frac{30}{27} = \frac{16}{15} \times \frac{10}{9};$$

mais on n'eût fait ainsi que reproduire les intervalles du diatonique dur dans un ordre différent.

Si, aux 7 diverses décompositions qui viennent d'être indi-

quées pour l'intervalle de quarte, nous en ajoutons une huitième, savoir, la décomposition en deux tons mesurés par $\frac{9}{8}$, et un *limma* (ou reste) mesuré par $\frac{256}{243}$ (parce que l'on a $\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{256}{243}$), nous aurons les 8 genres admis par Ptolémée. Le dernier qui vient d'être indiqué est le *diatonique ditoné*, ou le diatonique de Platon et d'Eratosthène.

§ III.

Le problème de la décomposition de la quarte ou de la fraction $\frac{4}{3}$, en trois fractions superpartielles dont l'une est donnée suivant les conditions de Ptolémée, est un problème indéterminé que l'on peut traiter par les méthodes ordinaires, en posant d'abord

$$\frac{4}{3} : \frac{a+1}{a} = \frac{x+1}{x} \times \frac{y+1}{y},$$

et faisant ensuite alternativement :

$$a = 4, \quad a = 5, 6, 7, 8, 9 :$$

nous ne ferons qu'indiquer ce problème aux jeunes élèves, et nous terminerons par une remarque relative à la différence très-grande qui existe entre la musique ancienne et la musique moderne.

On voit figurer, dans les formules des genres de Ptolémée, les fractions superpartielles

$$\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \text{ etc., jusqu'à } \frac{46}{45},$$

tandis que la musique moderne n'admet de cette forme que les nombres :

$\frac{2}{1}$	représentant l'octave ,
$\frac{3}{2}$	la quinte ,
$\frac{4}{3}$	la quarte ,
$\frac{5}{4}$	la tierce majeure ,
$\frac{6}{5}$	la tierce mineure ,
$\frac{9}{8}$	le ton majeur ,
$\frac{10}{9}$	le ton mineur ,
$\frac{16}{15}$	le demi-ton majeur ,
et enfin $\frac{25}{24}$	le demi-ton mineur (*).

Les intervalles représentés par les fractions $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$, et par toutes celles où entrent des nombres premiers supérieurs à 5, sont formellement exclus de notre musique, tandis que la théorie grecque admettait dans le calcul de ses tétracordes les nombres premiers 7, 11, 23; et certains théoriciens allaient même jusqu'à 31 (**). Si donc il était vrai, suivant la piquante expression de Leibnitz (Haüy, *Physique*, 2^e édit., 1806, t. I, p. 348), que l'oreille ne sait compter que jusqu'à 5, cela du moins devrait s'entendre uniquement de l'oreille moderne, et encore de l'européenne. Aussi, sous ce point de vue,

(*) On ne considère le comma $\frac{81}{80}$ que dans la théorie.

(**) Genre enharmonique de Didyme. — (Voyez les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale*, tome XVI, 2^e partie.)

notre musique ne présente-t-elle qu'un cas très-particulier de la musique des anciens Grecs. Mais en voilà beaucoup trop sur ce sujet.