Nouvelles annales de mathématiques

Aristide Marre

Partie géométrique de l'algèbre de Abou Abdallah Mohammed ben Moussa (al Khowarezmi)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 557-581

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__557_2>

PARTIE GEOMETRIQUE DE L'ALGÈBRE

DE

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa (*al Khowarezmi*),

PAR M. ARISTIDE MARRE.

L'ouvrage de *Mohammed ben Moussa*, auquel, ne fût-ce que par reconnaissance, étaient si légitimement dus les honneurs de l'impression, est resté manuscrit et depuis trois siècles dans l'oubli, quand pour la première fois, en 1831, M. *Rosen* l'a publié en arabe et en anglais. M. *Libri* vient aussi de reproduire, dans le 1er volume de son *Histoire des sciences en Italie*, l'une des traductions latines que l'on conservait à la bibliothèque royale. Celle-ci n'est pas aussi complète que le manuscrit dont s'est servi M. *Rosen*. La partie géométrique, entre autres, ne s'y trouve pas. (*Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, p. 490.) C'est cette lacune dans la reproduction latine de l'algèbre de *Mohamed ben Moussa*, que nous voulons combler par une traduction faite sur la version anglaise du manuscrit d'Oxford ; là se bornera notre tâche. Mais il ne sera peut-être pas inutile de rappeler succinctement ce que fut *Mohammed ben Moussa*, et quels sont ses titres impérissables à notre reconnaissance.

Abou Abdallah Mohamed ben Moussa, de *Khowarezm sur l'Oxus* (de là son nom de *Alkhowarezmi*), vécut et écrivit sous le khalife *Al Mamoun*, qui commença à régner à *Bagdad* en l'an 814.

Il abrégea, à la requête de l'illustre Abbasside, mais avant l'accession de ce prince au khalifat, le *Sindhind* (tables astronomiques), traduit par *Mohammed ben Ibrahim al Fazâry* d'après l'ouvrage d'un astronome indien qui visita la cour d'*Al Mansour* dans la 156e année de l'hégire ou 773e de notre ère. (*Ebn al Adami*, préf. à ses tabl. astronomiq ; *Casiri*, I. 427-428 ; *Colebrooke*. Dissertation, p. LXIV-LXII.)

On ne doit pas le confondre avec *Abou Djafar Mohammed ben Moussa*, l'un des trois fils de *Moussa ben Shaker*. En effet, *Aboulfaradj* (Histor. Dyn., p. 280) et *Casiri* (I, 386-418) rapportent que *Moussa ben Shaker*, dont la jeunesse n'avait été rien moins qu'honorable, car il avait débuté par le métier de bandit, avait ensuite trouvé moyen de s'attacher à la cour du khalife *Al Mamoun*, et qu'après sa mort ce grand prince prit soin de l'éducation de ses trois fils *Mohammed*, *Ahmed* et *Al Hassan*, qui plus tard s'illustrèrent comme mathématiciens et astronomes sous le khalife *Al Mohtaded*. On sait que ce dernier régna de 279 à 289 de l'hégire, ou de 892 à 902 de notre ère. (*Rosen.*, p. XII.)

Mohammed, dans sa préface, nous apprend que ce fut encore *Al Mamoun*, devenu khalife, qui l'encouragea à écrire un ouvrage *populaire* sur l'algèbre, ou plutôt, suivant ses propres expressions un petit ouvrage sur le calcul par *Gebr* et *Mokabalah*, restreint a ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile en arithmétique, c'est-à-dire aux opérations dont on a constamment besoin dans les cas d'héritage, de donations, de procès, de négoce et affaires de la vie pratique, ou nécessaires pour la mesure des terres, le creusement des canaux, le calcul géométrique, etc.

Pour comprendre ce que nous devons à *Mohammed ben Moussa*, il suffit de rappeler que c'est dans son ouvrage que nous avons puisé nos premières connaissances algébriques, qu'il est notre véritable instituteur dans cette branche principale des sciences mathématiques ; avant de juger son œuvre, il faut mûrement réfléchir sur ce fait, qu'un traité d'algèbre, *regardé comme élémentaire au IX^e^ siècle* chez les Arabes, et en quelque sorte comme manuel pratique à l'usage du peuple, est devenu 700 ans après, l'*ars magna* des Européens, la base et l'origine de leurs grandes découvertes dans les sciences. (*Chasles*, Aper. Hist., p. 491). A M.

Mesure.

Sachez que la signification de l'expression « *un par un* » est mesure (1), car l'on entend par là une coudée (2) (en longueur) par une coudée (en largeur). Tout quadrangle équilatéral et équiangle, qui a une coudée pour chacun de ses côtés, a aussi *un* pour son aire. Un tel quadrangle a-t-il deux coudées pour son côté, alors l'aire du quadrangle est quatre fois l'aire d'un quadrangle, dont le côté est une coudée. Il en est de même de *trois* par *trois*, et ainsi de suite, en montant ou en descendant : par exemple, un demi par un demi, qui donne un quart, ou d'autres fractions, toujours suivant la même règle. Un carré, dont chaque côté est une demie coudée, est égal à un quart de la figure qui a une coudée pour son côté. De la même manière, un tiers par un tiers, ou un quart par un quart, ou un cinquième par un cinquième, ou deux tiers par un demi, ou plus ou moins que ceci, toujours d'après la même règle (3).

Un côté d'une figure quadrangulaire équilatérale, pris une fois, est la racine de ce carré; si ce même côté est multiplié par deux, alors il équivaut à deux des racines du carré, qu'il soit petit ou grand.

Si vous multipliez la hauteur d'un triangle équilatéral par la moitié de la base sur laquelle la ligne marquant la hauteur se tient perpendiculaire, le produit donne l'aire de ce triangle (4).

Dans tout quadrangle équilatéral, le produit d'un diamètre multiplié par la moitié de l'autre sera égal à son aire (5).

Dans un cercle, le produit de son diamètre, multiplié par trois et un septième, sera égal à la périphérie. C'est là, la règle généralement suivie, dans la vie pratique, quoiqu'elle ne soit pas tout à fait exacte. Les géomètres ont deux autres méthodes. Une d'elles consiste en ceci, que vous multipliez le diamètre par lui-même, puis par dix, et qu'enfin vous preniez la racine du produit; la racine sera la périphérie. Les astronomes parmi eux se servent de l'autre methode; la voici : vous multipliez le diamètre par soixante-deux mille huit cent trente-deux, et divisez le produit par vingt mille ; le quotient est la périphérie (6).

Les deux méthodes conduisent à très-peu près au même résultat.

Si vous divisez la périphérie par trois et un septième, le quotient est le diamètre.

L'aire du cercle sera trouvée si l'on multiplie la moitié de la circonférence par la moitié du diamètre; puisque dans tout polygone dont les côtés et les angles sont égaux, tels que triangles, quadrangles, pentagones et ainsi de suite, l'aire est trouvée en multipliant la moitié de la péripherie par la moitié du diamètre du cercle moyen qui peut être tracé au travers.

Si vous multipliez le diamètre d un cercle par lui-même, et que vous retranchiez du produit un septième et un demi-septième de ce même produit, alors le reste est égal à l'aire du cercle. Ceci conduit à très-peu près au même résultat que la méthode donnée ci-dessus (7).

Toute portion d'un cercle peut être comparée à un arc. Cet arc sera ou exactement égal à la demi-circonférence, ou plus petit ou plus grand qu'elle. Ceci peut être fixé par la flèche (8) de l'arc. Quand il arrive qu'elle est égale à la moitié de la corde, c'est qu'alors l'arc est exactement la moitié de la circonférence; est-elle plus petite que la moitié de la corde, alors l'arc est moindre que la demi-circonférence; la flèche est-elle plus longue que la demi-corde, alors l'arc comprend plus de la moitié de la circonférence.

Si vous avez besoin de déterminer le cercle auquel il appartient, multipliez la moitié de la corde par elle-même, divisez par la flèche et ajoutez le quotient à la flèche, la somme est le diamètre du cercle auquel cet arc appartient (9).

S'il vous faut calculer l'aire de l'arc, multipliez la moitié du diamètre du cercle par la moitié de l'arc et conservez le produit dans votre pensée. Alors retranchez la flèche de l'arc, de la moitié du diamètre du cercle, si l'arc est plus petit que le demi-cercle, ou s'il est plus grand que le demi-cercle, retranchez la moitié du diamètre du cercle, de la flèche de l'arc. Multipliez le reste par la moitié de la corde de l'arc, et retranchez le produit de celui que vous avez retenu dans votre pensée si l'arc est moindre que la moitié du cercle, ou ajoutez-le à ce même produit si l'arc est plus grand que le demi-cercle. La somme après l'addition, ou le reste après la soustraction, est l'aire de l'arc (10).

On trouve le volume d'un corps quadrangulaire en multipliant la longueur par la largeur, et alors par la hauteur.

S'il est d'autre forme que la quadrangulaire (circulaire ou triangulaire par exemple), mais telle cependant qu'une ligne représentant sa hauteur puisse se tenir perpendiculairement sur la base, et être encore parallèle aux côtés, il faut le calculer en déterminant d'abord l'aire de sa base. Celle-ci, multipliée par la hauteur, donne le volume du corps.

Les cônes et les pyramides triangulaires ou quadrangulaires sont calculés en multipliant un tiers de l'aire de la base par la hauteur (11).

Observez que dans tout triangle rectangle, les deux petits côtés étant multipliés chacun par lui-même, les produits, additionnés ensemble, égalent le produit du long côté multiplié par lui-même. La preuve en est ci-dessous (12).

Nous traçons un quadrangle ABCD, avec ses côtés égaux et ses angles égaux. Nous partageons la ligne AC en deux moitiés au point K, et de ce point nous tirons une parallèle jusqu'au point R. Puis nous partageons aussi la ligne AB en deux moitiés au point T, et tirons une parallèle jusqu'au point G. Alors le carré ABCD est divisé en quatre quadrangles qui ont côtés égaux et angles égaux, et sont de même aire ; savoir, les carrés AK, CK, BK et DK. Maintenant, nous tirons du point H au point T une ligne qui divise le quadrangle AK en deux parties égales : il se forme ainsi deux triangles dans le quadrangle, savoir les triangles ATH et HKT. Nous savons que AT est la moitié de AB, et que AH lui est égal, comme moitié de AC; et la ligne TH qui les joint est opposée à l'angle droit. Nous tirons de la même manière des lignes de T à R, de R à G, et de G à H. Ainsi tous les carrés donnent naissance à huit triangles égaux, et quatre d'entre eux, conséquemment, valent la moitié du grand carré AD. Nous savons que la ligne AT multipliée par elle-même est égale à l'aire de deux triangles, et AH donne l'aire de deux triangles qui leur sont égaux; leur somme est en conséquence quatre triangles. Mais la ligne HT multipliée par elle-même donne pareillement l'aire de quatre de ces triangles. Nous apercevons donc que la somme de AT multipliée par elle-même et de AH multipliée par elle-même, est égale à TH multipliée par elle-même. C'est là l'observation que nous étions désireux d'éclaircir. Voici la figure y relative (*fig.* 1).

Les quadrangles sont de cinq espèces : premièrement avec les angles droits et les côtés égaux; secondement, avec les angles droits et les côtés inégaux; troisièmement, le rhombe avec des côtés égaux et des angles inégaux; quatrièmement, le rhomboïde, dont la longueur diffère de la largeur et dont les angles sont inégaux ; seulement les deux grands côtés et les deux petits sont respectivement d'égale longueur ; cinquièmement, les quadrangles avec angles et côtés inégaux (13).

Première espèce. — L'aire d'un quadrangle dont les côtés sont égaux et les angles droits, ou les côtés inégaux et les angles droits, peut être trouvée en multipliant la longueur par la largeur. Le produit est l'aire. Par exemple : une pièce de terre quadrangulaire, dont chaque côté a cinq coudées, a une aire de vingt-cinq coudées carrées. Voici quelle est la figure (*fig.* 2).

Deuxième espèce. — Une pièce de terre quadrangulaire ; ses deux grands côtés sont de huit coudées chacun, tandis que la largeur est six. Vous trouvez l'aire en multipliant six par huit, ce qui donne quarante-huit coudées. Voici pour ce cas la figure (*fig.* 3).

Troisième espèce (14).—Le rhombe : ses côtés sont égaux ; que chacun d'eux soit cinq et que ses diagonales soient l'une huit et l'autre six coudées. Vous pouvez alors calculer l'aire, soit par l'une des diagonales, soit par les deux. Comme vous les connaissez toutes deux, vous multipliez l'une par la moitié de l'autre, le produit est l'aire ; c'est-à-dire que vous multipliez huit par trois, ou six par quatre ; cela donne vingt-quatre coudées, et c'est l'aire. Si vous ne connaissez qu'une des diagonales, alors vous faites attention qu'il y a deux triangles pour chacun desquels deux côtés ont respectivement cinq coudées, tandis que le troisième côté est la diagonale. Dès lors vous pouvez faire le calcul d'après les règles pour le triangle. Voici la figure (*fig.* 4).

La *quatrième espèce*, ou rhomboïde, est calculée de la même manière que le rhombe (15). Voici quelle est la figure (*fig.* 5).

On calcule les autres quadrangles en tirant une diagonale et en les évaluant comme triangles (16).

Les triangles sont de trois sortes : acutangles, obtusangles ou rectangles (17).

La propriété du triangle rectangle est que si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, qu'alors vous les ajoutiez ensemble, leur somme sera égale au long côté multiplié par lui-même. Le caractère du triangle acutangle est celui-ci : Si vous multipliez chacun de ses deux petits côtés par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est plus grande que le long côté seul multiplié par lui-même. La définition du triangle obtusangle est celle-ci : si vous multipliez ses deux petits côtés chacun par lui-même, et si vous additionnez les produits, leur somme est moindre que le produit du long côté multiplié par lui-même.

Le triangle rectangle a deux cathètes et une hypoténuse. Il peut être considéré comme la moitié d'un quadrangle. Vous trouvez son aire en multipliant une de ses cathètes par la moitié de l'autre. Le produit est l'aire

Exemples. Un triangle rectangle, une cathète étant six coudées, l'autre huit, et l'hypoténuse dix. Vous l'évaluez en multipliant six par quatre, ce qui donne vingt-quatre : c'est là l'aire. Ou si vous le préférez, vous pouvez aussi le calculer par la hauteur qui s'élève perpendiculairement du plus long côté ; car les deux plus petits côtés peuvent eux-mêmes être considérés comme deux hauteurs. Si vous préférez cela, vous multipliez la hauteur par la moitié de la base. Le produit est l'aire (18). Voici la figure (*fig.* 6).

Seconde espèce. — Un triangle équilatéral avec ses angles aigus, dont chaque côté a dix coudées de long. Son aire peut être déterminée par la ligne représentant sa hauteur et le point d'où elle émerge. Observez que dans tout triangle isocèle, une ligne tirée jusqu'à la base pour représenter la hauteur émerge de la base à angle droit, et que le point d'où elle s'élève est toujours situé au milieu de la base; si, au contraire, les deux côtés ne sont pas égaux, alors ce point ne se trouve jamais au milieu de la base (19). Dans le cas actuellement sous nos yeux, nous apercevons que, quel que soit le côté vers lequel nous tirions la ligne qui doit représenter la hauteur, ce sera toujours nécessairement en son milieu que cette ligne tombera, là où la longueur de la base est cinq. Maintenant la hauteur sera ainsi obtenue : vous multipliez cinq par lui-même; alors multipliez un des côtés, c'est-à-dire dix par lui-même, ce qui donne cent. Maintenant vous retranchez de ce produit celui de cinq multiplié par lui-même, ce qui est vingt-cinq; le reste est soixante-quinze, dont la racine est la hauteur. Celle-ci est une ligne commune aux deux triangles rectangles (20).

Si vous avez besoin de trouver l'aire, multipliez la racine de soixante-quinze par la moitié de la base, qui est cinq. Vous effectuez ceci, en multipliant d'abord cinq par lui-même; alors vous pouvez dire, que la racine de soixante-quinze est à multiplier par la racine de vingt-cinq. Le produit est mille huit cent soixante-quinze; prenez sa racine, c'est l'aire; c'est quarante-trois et une petite quantité (21). Voici la figure (*fig.* 7).

Il y a aussi des triangles acutangles avec des côtés différents. Leur aire sera trouvée par le moyen de la ligne représentant la hauteur, et du point d'où s'élève cette dernière. Prenez, par exemple, un triangle, dont un des côtés est quinze coudées, un autre quatorze et le troisième treize coudées. Afin de trouver le point d'où s'élève la ligne marquant la hauteur, vous pouvez prendre pour base tel côté qu'il vous plaira choisir, par exemple : celui qui est long de quatorze coudées. Le point d'où s'élève la ligne représentant la hauteur, est situé sur cette base à une distance inconnue de chacun des deux autres côtés. Essayons de trouver sa distance inconnue du côté qui est long de treize coudées (22).

Multipliez cette distance par elle-même ; il en résulte *Màl*. Retranchez-le de treize multiplié par lui-même, c'est-à-dire cent soixante-neuf. Le reste est cent soixante-neuf moins *Màl*. La racine de ceci est la hauteur. Le reste de la base est quatorze moins *Shaï*. Nous multiplions ce reste par lui-même ; il en résulte cent quatre vingt-seize et *Màl* moins vingt-huit *Shaï*. Nous retranchons ceci de quinze multiplié par lui-même ; le reste est vingt-neuf, et vingt-huit *Shaï* moins *Màl*. La racine de ceci est la hauteur. Attendu que la racine de ceci est la hauteur, et que la racine de cent soixante-neuf moins *Màl* est pareillement la hauteur, nous savons qu'elles sont toutes deux identiques. Réduisez-les, en transportant *Màl* contre *Màl*, puisque tous deux sont négatifs. Il reste vingt-neuf plus vingt-huit *Shaï*, qui sont égaux à cent soixante-neuf. Retranchez maintenant vingt-neuf de cent soixante-neuf. Le reste est cent quarante, égal à vingt-huit *Shaï*. *Shaï* est conséquemment cinq. Telle est la distance du point susdit, du côté de treize coudées. Le complément de la base vers l'autre côté est neuf. Maintenant pour trouver la hauteur, vous multipliez cinq par lui-même et retranchez ce produit, du côté contigu, qui est treize, multiplié par lui-même. Le reste est cent quarante-quatre. Sa racine est la hauteur. C'est douze (23). La hauteur forme toujours deux angles droits avec la base, et on l'appelle la *colonne*, parce qu'elle se tient perpendiculairement. Multipliez la hauteur par la moitié de la base, qui est sept. Le produit est quatre vingt quatre, ce qui est l'aire (24). Voici la figure (*fig.* 8).

La troisième espèce est celle du triangle obtusangle avec un angle obtus et des côtés de longueurs différentes. Par exemple, un côté étant six, un autre cinq, et le troisième neuf. L'aire d'un tel triangle sera trouvée par le moyen de la hauteur et du point d'où s'élève une ligne représentant cette hauteur. Ce point, dans un tel triangle, peut être situé seulement sur son plus grand côté (25). Prenez le donc comme base : car si vous préfériez prendre un des petits côtés comme base, alors ce point tomberait par delà le triangle. Vous pouvez trouver la distance de ce point, et la hauteur, de la même manière que j'ai montrée pour le triangle acutangle ; le calcul tout entier est le même ; voici la figure (*fig.* 9).

Nous avons traité precédemment des cercles (26), de leurs propriétés et de leur évaluation. Ce qui suit est un exemple : si un cercle a sept pour son diamètre, alors il a vingt-deux pour sa circonférence. Vous trouvez son aire de la manière suivante · Multipliez la moitié du diamètre (27), qui est trois et un demi, par la moitié de la circonférence qui est onze Le produit est trente huit et un demi, ce qui est l'aire. Ou bien vous pouvez encore multiplier le diamètre qui est sept, par lui-même ; ceci est quarante-neuf ; en en retranchant un septième et un demi-septième, ce qui est dix et un demi, il reste trente-huit et un demi, ce qui est l'aire. Voici la figure (*fig.*10).

Si quelqu'un s'enquiert du volume d'un pilier pyramidal, sa base étant quatre coudées par quatre coudées, sa hauteur dix coudées, et les dimensions à son extrémité supérieure deux coudees par deux coudées ; nous savons dejà que toute pyramide va en décroissant vers son sommet, et que un tiers de l'aire de sa base, multiplie par la hauteur. donne son volume. La présente pyramide n'a pas de sommet. Nous devons en conséquence chercher à déterminer ce qui manque à sa hauteur pour rétablir le sommet Nous observons que le rapport de la hauteur totale au dix que nous avons maintenant devant nous, est égal au rapport de quatre à deux (28). Or comme deux est la moitie de quatre, dix doit pareillement être la moitié de la hauteur totale, et la hauteur entière du pilier doit être vingt coudées. A présent nous prenons un tiers de l'aire de la base ; c'est cinq et un tiers, et nous le multiplions par la hauteur qui est vingt. Le produit est cent six coudées et deux tiers, dont nous devons alors retrancher le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. C'est ce que nous exécutons en multipliant un et un tiers, ce qui est un tiers du produit de deux par deux, par dix ; cela donne treize et un tiers. C'est là le fragment que nous avons ajouté afin de compléter la pyramide. Retranchant de cent six coudées et deux tiers, il reste quatre-vingt-trois coudées et un tiers; et c'est là le volume de la pyramide tronquée. Voici la figure (*fig.* 11).

Si le pilier a une base circulaire (29), retranchez un septième et un demi-septième du produit du diamètre multiplié par lui-même, le reste est la base.

Si quelqu'un dit : « Il y a une pièce de terre triangulaire, deux de ses côtés ont dix coudées chacun, et la base douze, quelle doit être la longueur d'un côté d'un carré situé dans un tel triangle? » La solution est celle-ci (30). D'abord vous déterminez la hauteur du triangle, en multipliant la moitié de la base, par elle-même, et retranchant le produit qui est trente-six, de l'un des deux petits côtés multiplié par lui-même, ce qui est cent; le reste est soixante-quatre : prenez-en la racine, c'est huit. Voilà la hauteur du triangle. Son aire est donc quarante huit coudées; puisque tel est le produit de la hauteur multipliée par la moitié de la base qui est six. Maintenant nous prenons pour un côté du carré cherché : *Shaï*. Nous le multiplions par lui-même; il en résulte *Màl*, que nous gardons dans notre pensée. Nous savons qu'il doit rester deux triangles, aux deux côtés du carré, et un au-dessus. Les deux triangles aux deux côtés du carré sont égaux entre eux : ils ont même hauteur et sont rectangulaires. Vous trouvez leur aire en multipliant *Shaï* par six moins *un demi-Shaï*, ce qui donne six *Shaï* moins un demi-*Màl*. Telle est l'aire de l'ensemble des deux triangles situés des deux côtés du carré. L'aire du triangle supérieur sera trouvée en multipliant huit moins *Shaï*, qui est la hauteur, par un demi-*Shaï*. Le produit est quatre *Shaï* moins un demi-*Mâl*. Tout ceci réuni est égal à l'aire du carré plus celle des trois triangles : ou, dix *Shaï* égalent quarante-huit, ce qui est l'aire du grand triangle. D'où *Shaï* est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée ; et c'est là la longueur d'un côté du carré. Voici la figure (*fig.* 12).

NOTES.

(1) Le savant arabiste M. *Rosen* n'est pas certain si sa traduction de la définition que *Mohammed* donne de la mesure est correcte. Bien que les points diacritiques manquent en partie dans le manuscrit, il ne peut cependant, dit-il, y avoir aucun doute pour ce qui est de la lecture du passage.

(2) Le mot arabe est *zara*, coudée, avant-bras. Dans les définitions des termes techniques données par *Bhascara-Acharya*, page 2 du *Lilavati*, on rencontre cette même mesure. Dans la cinquième stance, il dit : huit largeurs d'un grain d'orge sont ici un doigt ; quatre fois six doigts, une coudée (*cara*, avant-bras) ; quatre coudées, un bâton ; etc. Suivant le commentateur *Ganésa*, ceci s'applique à la coudée pratique adoptée par les artisans, et vulgairement appelée *gadj* ; suivant le même, trois longueurs d'un grain de riz aussi bien que huit largeurs d'un grain d'orge constituent le doigt. Quant au bâton (*danda*), *Manou* 2.41. dit qu'il doit être coupé à peu près de la hauteur d'un homme.

(3) Le début de *Mohammed ben Moussa* montre suffisamment que c'était véritablement bien une sorte de manuel, à l'usage du peuple, qu'il voulait composer ; il ne donne pas les définitions de la science, il enseigne de prime abord le moyen pratique de mesurer les surfaces, celle du carré premièrement, et cela à l'aide d'exemples numériques. On peut à ce passage comparer l'introduction à la géométrie de *Beha-eddin*.

(4) *Mohammed ben Moussa*, versé dans les sciences des hindous, ne donne point ici la formule particulière qui convient à la surface du triangle équilatéral. Il donne le moyen général de mesurer un triangle quel qu'il soit (la hauteur par la moitié de la base), quoiqu'il connût non-seulement la formule $S = \sqrt{3 . \frac{a^4}{16}}$, mais encore

celle qui donne la surface d'un triangle quelconque en fonction de ses trois côtés. Mais il n'oublie pas qu'il écrit pour le vulgaire, et non pour des mathématiciens ; une seule règle, qui convienne à tous les cas, suffit. *Beha-eddin* au contraire a bien soin de relater la règle : « Tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement ; ensuite c'est la racine carrée du produit, la réponse. »

5) Il faut observer la différence de signification attachée au mot diamètre par *Mohammed ben Moussa* et par *Beha-eddin*. Ici, le diamètre est la diagonale du carré, ou le diamètre du cercle circonscrit. Quand *Beha-eddin*, au contraire, donne la mesure du polygone régulier d'un nombre pair de côtés, il dit : multiplie le demi-diamètre, par la demi-somme des côtés, et il ajoute : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés.

Ainsi, pour *Mohammed ben Moussa*, c'est le diamètre du cercle circonscrit, et pour *Beha-eddin*, c'est le diamètre du cercle inscrit.

Les mathématiciens hindous *Souryadâsa* et *Ranganâtha*, disent la diagonale ou diamètre d'un tétragone. (*Lilavati*, p. 59.)

(6) Ici nous remarquons trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'*Archimède*. La deuxième donne : $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle en usage parmi les astronomes et la plus exacte en même temps, suppose $\pi = \frac{62832}{20000}$; ces trois valeurs en décimales, sont :

3,1428. . . . . .
3,16227. . . . .
3,14160. . . . .

Pour obtenir une plus grande approximation que cette dernière, il faut se servir du rapport 3,1415926. . . . .

La première et la troisième formule

$$\text{circ} = \frac{22}{7} D \quad \text{et} \quad \text{circ} = \frac{62832}{20000} D,$$

se trouvent dans le *Lilavati* de *Bhascara*, p. 87 de l'introduction de M. Colebrooke. Seulement cette dernière est donnée par le géomètre hindou sous la forme plus simple, à laquelle elle est réductible, en divisant par 16 les deux termes du rapport

$$\text{circ} = \frac{3927}{1250} D.$$

La seconde formule circ $= \sqrt{10\,D^2}$ se trouve dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, § 40. Nous croyons devoir rectifier à ce sujet l'erreur que M. *Rosen* a laissée échapper. Il dit que cette seconde formule se rencontre dans le *Vija Ganita*, p. 308, 309. Pour le lecteur qui n'aurait pas l'ouvrage de *Colebrooke* entre les mains, et ne pourrait se porter aux pages désignées, cette erreur ne serait pas indifférente, car elle ferait supposer que c'est *Bhascara*, l'auteur du *Vija Ganita* qui emploie cette formule, tandis que c'est *Brahmagupta*, antérieur de près de six cents ans, et qui n'en emploie pas de plus approchée. On lit aussi dans le savant ouvrage de M. *Chasles*, p. 446. « Il paraît, d'après le texte anglais, que *Brahmegupta* a regardé cette expression $(\sqrt{10})$, comme étant le rapport *exact* de la circonférence au diamètre. *Chaturveda*, dans ses notes, semble le croire ainsi. Cela ne nous étonne point de la part de ce scoliaste; mais il est difficile de penser qu'un géomètre qui a été capable d'écrire sur la théorie du quadrilatère inscrit au cercle, et de résoudre les questions que nous avons trouvées dans l'ouvrage de *Brahmegupta*, ait commis cette faute. Il est vrai que la quadrature du cercle a été aussi l'écueil d'un grand nombre de géomètres modernes, qu'elle a entraînés dans des erreurs semblables; quoique plusieurs d'entre eux eussent donné des preuves d'un véritable et profond savoir en mathématiques. Il nous suffira de citer *Oronce Finée* et *Grégoire de Saint-Vincent*. L'expression $\sqrt{10}$ est précisément le rapport que *J. Scaliger* disait avoir trouvé le premier, et croyait avoir démontré géométriquement : mais on connaissait depuis longtemps en Europe cette expression, qu'on savait n'être qu'approchée. On l'attribuait aux arabes ou aux indiens, et l'on supposait que ces peuples l'avaient regardée comme exacte. »

La présence simultanée des trois valeurs de π, et le langage de *Mohammed ben Moussa*, devaient prouver suffisamment, ce me semble, aux géomètres européens *Purbach*, *Regiomontanus*, *Buteon*, etc., que les Arabes ne regardaient point $\sqrt{10}$, comme la valeur *exacte* du rapport. Voici une note marginale du manuscrit d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe, s'il restait quelques doutes, elle pourrait les dissiper : « Ceci est une approximation, non pas l'exacte vérité; personne ne peut fixer l'exacte vérité de ceci, et trouver la circonférence réelle, excepté celui qui sait tout : car la ligne n'est pas droite de manière à ce que son exacte longueur puisse être trouvée. Ceci est appelé une approximation, de la même manière que l'on dit des racines carrées des nombres irrationnels, qu'elles sont une approximation, et non pas l'exacte vérité; car Dieu seul sait quelle est la racine exacte. La meilleure méthode ici donnée, c'est de multiplier le diamètre par trois et un septième : car elle est la plus aisée et la plus prompte. Dieu sait mieux ! » (*Rosen*, p. 200.)

Quant aux Hindous, croyaient-ils $\sqrt{10}$ le rapport exact? Du temps de *Bhascara*, évidemment non; car des trois valeurs du rapport, celle-ci seule n'est pas mentionnée par *Bhascara*, et au contraire c'est celle de *Brahmagupta*. Ce qui a fait pencher à croire que *Brahmagupta* la regardait peut-être comme exacte, c'est simplement l'expression anglaise *neat value* (*) appliquée à ce rapport $\sqrt{10}$, et que l'on a traduite par *valeur exacte*, *vraie*; or, de l'avis de Johnson et de Walker, ce n'est pas là la signification du mot *neat*. Aryabhatta, antérieur à Brahmagupta, avait pour ce rapport, une valeur plus approchée, $\frac{22}{7}$, et il ne la croyait pas exacte !

M. *Rosen* fait observer qu'il a simplement traduit les mots *handasah* par *geometricians* (géomètres), quoique, d'après la manière dont *Mohammed* se sert ici de cette expression, il semblerait qu'il la prenait dans un sens plus spécifique. Il cite à l'appui *Firouzabadi* (*Kamus*, p. 814, éd. Calcutt.), qui donne au mot *handasah* une origine persane, et prétend qu'il signifie « celui qui détermine à l'aide de mesures où les canaux pour l'eau seront creusés. » Les Persans eux-mêmes assignent une autre signification au mot *hindisah*, comme ils le prononcent; ils l'emploient dans le sens de notation décimale des nombres (*Burhani Kati*). Si nous adoptions cette version, ajoute M. *Rosen*, le passage nous apparaîtrait sous un jour entièrement nouveau. Les *handassi*, auxquels notre auteur attribue les deux dernières formules, seront alors les mathématiciens Hindous, qui avaient apporté avec eux la notation décimale; et les *alhandasah*, auxquels la seconde et la plus exacte de ces méthodes est attribuée, seront les astronomes parmi ces mathématiciens Hindous. Ce qui précède donne tout lieu de croire cette dernière version préférable.

(7) L'aire du cercle dont le diamètre est d, est :

$$\pi\frac{d^2}{4}=\frac{22}{7\times4}d^2=\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{2\times7}\right)d^2.$$

La première méthode donne aire du cercle

$$=\frac{\text{circ}}{2}\times\frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi d}{2}\times\frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad \pi\frac{d^2}{4},$$

(*) C'est probablement une erreur typographique, il faut lire *near*, approchée.
Tm.

en supposant $\pi = \frac{22}{7}$, elle conduit identiquement au même résultat que le produit effectué de $\left(1 - \frac{4}{7} - \frac{1}{2 \times 7}\right)$ par d^2, c'est-à-dire à $\frac{11}{14} d^2$, valeur donnée comme bonne dans la pratique, quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, par *Bhascara Acharya*, p. 89 du *Lilavati*. Ces différents moyens d'obtenir la surface du cercle, sont tous énoncés par *Beha edd n.* (*Khelasat al Hisab*. Géomét., 2e section.)

(8) Les Hindous avaient aussi les mots *sara*, *ishou*, et autres synonymes qui signifient flèche, pour désigner cette même droite. *Bhascara* et *Brahmagupta* emploient le mot flèche. De plus, le commentateur *Chatourveda* observe dans ses notes au *Ganita-d'hyaya*, 41e stance, que ce qui est appelé de son temps (diamètre moins la flèche), est dénommé par *Arya-Bhatta* la grande flèche. En effet, *Aryabhatta* dit : « Dans un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. »

Arya-Bhatta est le plus ancien algébriste Hindou connu; il fut à peu près contemporain de *Diophante*; il se servait de la valeur $\pi = \frac{22}{7}$, que n'employa pas *Brahmagupta* qui vint après lui, mais qui fut adoptée plus tard par *Bhascara*. Pour donner une idée de ses connaissances algébriques, il suffit de dire qu'il donna la résolution de l'équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers, par une méthode semblable à celle de *Bachet de Meziriac*, qui a paru en Europe, pour la première fois, en 1624.

(9) Dans la partie géométrique du *Khelasat-al-Hisab*, ce passage ou son analogue ne se rencontre pas. *Beha-Eddin* se borne à donner, dans un ordre logique, les définitions des différentes lignes des surfaces et des corps, puis à énoncer les moyens de mesurer ces surfaces et les volumes et les surfaces de ces corps. En revanche, nous retrouvons cet énoncé chez les Hindous dans le *Ganita d'hyaya* de *Brahmagupta*, stance 41 : « Le carré de la corde, divisé par quatre fois la flèche, et ajouté à la flèche, est le diamètre. » *Chatourveda*, dans son commentaire, l'explique par quatre exemples, dont les trois derniers sont imités par *Bhascara* dans son *Lilavati*, § 148-153, et dans son *Vija-Ganita*, § 123-125 et 139. Voici l'un de ces exemples : « Un bambou haut de dix-huit coudées était brisé par le vent; le sommet touchait la terre à six coudées de la racine : dites la longueur des segments du bambou. (Ces segments sont dix et huit.) » *Bhascara* donne l'énoncé de *Mohammed* mot à mot; ainsi il dit : « Le carré de la demi-corde étant divisé par la flèche, le quotient ajouté à la flèche est

prononcé le diamètre du cercle. Le commentateur *Ganésa* observe que prononcé signifie *cela a été déclaré ainsi par les anciens. Aryabhatta* et *Brahmagupta*, sont considérés comme des anciens par les commentateurs de *Bhascara.* Nous rapporterons encore ici la règle suivante pour trouver l'arc. Elle est citée par *Ganesa* d'après *Arya-Bhatta :* « Six fois le carré de la fleche étant ajouté au carré de la corde, la racine carrée de la somme est l'arc.

(10) C'est ce qu'exprime plus brièvement *Beha-Eddin* lorsqu'il dit : « Quant aux deux *segments*, marque bien le centre, et achève les deux secteurs, alors il se forme là un triangle ; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment, ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment. »

Colebrooke, dans la traduction du *Lilavati*, *p.* 96, donne la note suivante, intéressante en elle-même, et qui trouve naturellement ici sa place :

« Pour trouver l'aire de l'arc ou le segment d'un cercle, la règle suivante est donnee dans le *Ganita-Sára* de *Vishnou*, ainsi que le rapporte *Gangádhara ;* cette même règle est enseignée par *Césava*, cité par son fils *Ganésa :* « La flèche étant multipliée par la demi-somme de la corde et de la flèche, et un vingtième du produit étant ajouté à ce produit, la somme est l'aire du segment. »

La règle de *Srid'hara*, citée par *Ganésa*, est : « le carré de la flèche, multiplié par la demi-somme de la corde et de la flèche, étant multiplié par dix et divisé par neuf, la racine carrée du produit est l'aire de l'arc. » *Ganésa* ajoute : « la corde et la flèche étant données, trouvez le diamètre, puis la circonférence, et par suite l'arc. Alors, des extrémités de l'arc, tirez des lignes au centre du cercle. Trouvez l'aire du secteur (*Vritta-chanda*, portion d'un cercle) en multipliant la moitié de l'arc, par le demi-diamètre ; et l'aire du triangle, en multipliant la moitié de la corde par le demi-diamètre diminué de la flèche. Retranchant l'aire du triangle de l'aire du secteur, la différence est l'aire du segment. » Le *Manórandjana* donne une semblable règle ; mais il trouve l'aire du secteur par la proposition : comme la circonférence entière est à l'aire entière, de même l'arc proposé est à l'aire du secteur. »

Comme on le voit, les derniers moyens employés pour trouver l'aire du segment ne sont autres que ceux de *Mohammed-ben-Moussa* et de *Beha-Eddin.* La formule rapportée par *Ganga-d'hara*, et enseignée par *Césava*, segment $=\frac{21}{20}f\left(\frac{c+f}{2}\right)$, f désignant la flèche et c la corde, donne pour le cas particulier $f=\mathrm{R}$, où le segment égale le demi-cercle, la valeur $\frac{441}{280}\mathrm{R}^2$, et si l'on emploie la formule habituelle $R^2, \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$, on trouve, pour le demi-cercle $\frac{440}{280}R^2$. La différence est donc de $\frac{1}{280}$.

(11) Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base. — Pour les cônes entiers et les pyramides de chaque espèce, multiplie la hauteur par un tiers de l'aire de la base. (*Beha-Eddin*, Géom., 3e section.)

Ainsi, nos deux auteurs arabes regardent le cylindre comme une variété du prisme, comme un prisme, le cône comme une pyramide. Cette assimilation a un caractère encore plus frappant chez les Hindous, qui par le seul mot *sama-châta* (solide de figure régulière avec des côtés égaux) désignent le parallélipipède, le cylindre, etc.; pour les pyramides et les cônes, ils emploient l'expression *souchi-châta* (*solide aigu*). (*Lilavati*, stance 217.)

(12) La preuve qu'en donne *Mohammed-ben-Moussa* ne s'applique qu'au triangle rectangle isocèle. La vérité géométrique énoncée se vérifie pour le triangle donné en exemple. Elle parle aux yeux, et son but est d'aider la mémoire plutôt que de satisfaire rigoureusement l'esprit. Aussi termine-t-il en disant : « C'est cette observation que nous étions désireux *d'éclaircir.* » C'est cette figure relative au carré de l'hypoténuse que *Beha-Eddin* appelle la *figure de la fiancée*. Jusqu'ici on n'a pu expliquer d'où est provenue cette désignation. Les précieux fragments arabes et persans inédits, relatifs à l'Inde, antérieurement au onzième siècle de l'ère chrétienne, recueillis et publiés récemment par M. *Reinaud*, jetteront un jour nouveau sur cette question. L'auteur des deux passages que nous allons rapporter d'après le savant professeur est *Beladori*. Son véritable nom était *Ahmed*, fils de *Yahya;* il vivait à la cour du khalife de Bagdad *Almotavakkel*, et dirigea l'éducation d'un prince de la famille du khalife. Il mourut l'an 279 de l'hégire (892 de J. C.). L'ouvrage est intitulé : *Livre des Conquêtes des pays;* il appartient à la riche bibliothèque de Leyde. « *Mohammed*, fils de *Cassem*, quitta *Armâyl* ayant avec lui *Djehem*, fils de *Zakhar Aldjofy;* il arriva un vendredi devant *Daybal ;* des navires lui amenèrent en cet endroit des hommes, des armes et des machines. Aussitôt il creusa un fossé autour de son camp. Les approches du fossé étaient défendues par des hommes armés de lances, et les étendards étaient tenus déployés. Chaque troupe de guerriers était rangée auprès de son étendard; en même temps, *Mohammed* fit dresser la machine de guerre nommée *la fiancée*, laquelle était de la force de cinq cents hommes. Or, il y avait à *Daybal* un grand *bodd* surmonté d'un grand mât; sur le mât était

un drapeau rouge qui, lorsque le vent soufflait, se déployait sur la ville. »

Le *bodd* est un temple (probablement consacré à *Bouddha*). (*Reinaud.*) Le second passage est une lettre du fameux *Hadjadj*, gouverneur musulman de l'Irac, à son lieutenant *Mohammed* (celui dont il est question dans le premier passage), campé aux portes de *Daybal.* « Dresse *la fiancée* et raccourcis-lui une des jambes; tu placeras la machine du côté de l'Orient; ensuite tu appelleras l'homme chargé de la faire mouvoir, et tu lui ordonneras de viser le mât dont tu m'as fait la description. » *Beladori* continue son récit : « On lança donc des projectiles contre le mât, qui fut brisé; cet événement affligea vivement les Infidèles. »

Les Arabes, aussi bien que les Hindous, disent *jambe* ou *côté* d'un triangle; ce fut probablement cette machine de guerre qui donna son nom à la figure du carré de l'hypoténuse. La panoplie aura fourni cette expression à la géométrie, de même que les mots *arc*, *flèche*, etc. (*fig.* 1 et 2).

Nous allons rapporter ici la démonstration figurée du théorème du carré de l'hypoténuse donnée par les Hindous, et une autre du même genre, à laquelle la connaissance de la première a dû conduire naturellement.

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2} \qquad c^2 = (a+b)^2 - 4\frac{ab}{2}$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \qquad = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab$$
$$= a^2 + b^2, \qquad = a^2 + b^2.$$

(13) Ce sont ces quadrangles avec angles et côtés inégaux que *Beha-Eddin* nomme *trapèzes*. Le célèbre commentateur d'*Euclide*, *Nasr' Eddin*, parle aussi de trapèzes, et ces quadrilatères n'ont pas de côtés parallèles. Le mot trapèze, qui répond à la dénomination sanscrite *rishama-chatourasra*, s'applique, chez les Hindous, au tétragone qui a ses quatre côtés inégaux. C'est la signification que lui donne aussi *Euclide* (définition 34e du 1er livre), c'est celle-là que lui ont toujours conservée les Anglais. C'est vers la fin du siècle dernier que le mot trapèze a pris la signification qu'il a aujourd'hui en France; jusque là, parmi nous, il avait eu celle d'*Euclide*.

Chatourveda, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue aussi cinq espèces de tétragones ou quadrilatères. Le tétragone est (*sama-chatourasra*) équilatéral; (*âyata-sama-chatourasra*) oblong avec côtés égaux (deux à deux); (*doui-sama-chatourasra*) ayant deux côtés égaux; (*tri-sama-chatourasra*) ayant trois côtés égaux; (*vishama-chatourasra*) les ayant tous inégaux.

Ganésa distingue les quadrangles en deux classes principales. Ils ont leurs diagonales égales ou inégales. La 1re classe comprend 4 espèces : carré, trapèze, parallélogramme oblique, rectangle. La seconde classe renferme 6 espèces : losange, trois côtés égaux, rhomboïde, deux côtés égaux, quatre côtés inégaux ou trapèze ; perpendiculaires égales ou trapézoïde.

Outre les figures planes citées par *Mohammed-ben-Moussa*, nous trouvons encore dans *Beha-Eddin*, la *lune*, le *fer à cheval*, le *navet*, le *myrobolan*, certains trapèzes qu'il dénomme : *trapèze à une pointe*, *à deux pointes* et *concombre*. Puis, parmi les polygones singuliers d'un plus grand nombre de côtés, les figures *scalariforme*, *tympaniforme*, *spiculiforme*.

Nous trouvons de même chez les Hindous les figures suivantes, citées par *Srid'hara, Souryadasa* et *Gangad'hara*. On peut en faire le curieux rapprochement avec les figures planes de *Beha-Eddin*.

Le *gadja-danta* ou dent d'éléphant, que l'on peut traiter comme un triangle ; le *bâléndou*, ou le croissant, qui peut être considéré comme composé de deux triangles ; le *yava*, ou grain d'orge (lentille convexe), traité comme consistant soit en deux triangles, soit en deux segments ; le *némi*, ou jante de roue, considéré comme un quadrilatère. La *vadja*, ou la foudre, traitée comme comprenant deux triangles, suivant *Souryadasa*, ou un quadrilatère avec deux segments ou deux trapèzes, suivant *Gangad'hara*, ou bien encore deux quadrilatères, suivant *Srid'hara ;* la *sanc'ha* ou conque, le *mridanga*, ou grand tambour, et beaucoup d'autres.

(14) Soient en général d, d', les diagonales d'un losange, c son côté. Son aire sera $\frac{dd'}{2} = d \times \sqrt{c^2 - \frac{d^2}{4}}$.

On peut remarquer en passant que *Mohammed-ben-Moussa* dans tous ses exemples, choisit des nombres rationnels entiers ; de plus ici les côtés du losange sont ceux du carré précédemment figuré, et les diagonales sont les côtés du rectangle qu'il vient de donner pour exemple.

(15) Les deux triangles rectangles qui joints au rectangle forment le rhomboïde, ne sont autres que deux des quatre triangles rectangles qui constituent le rhombe. On doit remarquer encore que leurs côtés sont trois nombres entiers consécutifs 3, 4 et 5.

(16) « Partage les autres quadrilatères en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. » *Beha-Eddin*.

(17) *Mohammed-ben-Moussa* et *Beha-Eddin* ne définissent ni l'un ni l'autre le triangle dont ils reconnaissent trois espèces ; ils énoncent la propriété caractéristique qui distingue chacune d'elles.

Ganésa dit : « Le triangle est une figure qui contient trois angles et consiste en autant de côtés. » Selon lui, le triangle est ou rectangulaire (*jatya*) ou trilatéral et (oblique) (*tribhoudja*) comme le fruit du *Sringata* (Trapa natans). On le distingue encore d'après la direction de la perpendiculaire (*lamba*), c'est-à-dire suivant que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle, en *antar-lamba* acutangle et *bahir-lamba* obtusangle. *Chatourveda* au contraire, le commentateur de *Brahmagupta*, distingue trois sortes de triangles ; ce sont le (*sama-tribhoudja*) équilatéral, (*doui-sama-tribhoudja*) isocèle, et (*vishama-tribhoudja*) scalène.

(18) C'est le triangle moitié du rectangle déjà donné comme exemple, et en même temps équivalent au losange dont on a donné la figure. Les côtés sont les trois nombres pairs consécutifs : 6, 8, 10 doubles des trois côtés 3, 4, 5, nombres impairs consécutifs des triangles rectangles qui constituent le susdit losange.

(19) Pour trouver dans un triangle quelconque, le pied de la perpendiculaire, on a d'après *Beha-Eddin*, en appelant a la base, b le côté moyen, c le plus petit côté, la formule suivante :

$$x=\frac{a}{2}-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

Si dans cette formule, on fait $b=c$, on voit immédiatement que

$$x=\frac{a}{2}.$$

(20) $H=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{100-25}=\sqrt{75}.$

(21) $S=H\times\frac{B}{2}=\sqrt{75}\times 5=\sqrt{75}\times\sqrt{25}=\sqrt{1875}=43,30.$

(22)

$$\begin{aligned}15^2-(14-x)^2&=13^2-x^2\\ 15^2-196-x^2+28x&=169-x^2\\ 29+28x&=169\\ 28x&=140\\ x&=5.\end{aligned}$$

Beha-Eddin emploie la formule

$$x=\frac{a}{2}-\frac{(b+c)(b-c)}{2a}=7-\frac{28.2}{2.14}=7-2=5.$$

Il arrive à cette formule en appliquant le théorème qui donne la valeur du carré fait sur un côté opposé à un angle aigu.

(23) $H=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12.$

(24) La hauteur et les trois côtés sont les quatre nombres entiers consécutifs : 12, 13, 14, 15. *Mohammed ben Moussa* a choisi le triangle le plus propre à servir d'exemple. Nous resumerons ici les

observations auxquelles ces nombres ont conduit M. *Chasles* dans son Aperçu historique. «Ces nombres sont très-remarquables en ce qu'ils sont ceux choisis à plusieurs siècles d'intervalle, non-seulement par les Hindous, mais aussi par *Héron d'Alexandrie*, *Héron le Jeune*, les trois fils de *Moussa ben Shaker*, *Léonard de Pise*, *Jordan*, *Lucas de Burgo*, *Georges Valla*, *Tartalea*, etc.» L'usage général de ces trois nombres semblait dire qu'ils avaient une origine commune; mais M. *Chasles* en y réfléchissant davantage, ne tarda pas à reconnaître que ces nombres n'offraient probablement pas les secours historiques qu'il avait espérés d'abord. En effet, on aura cherché naturellement, pour les trois côtés du triangle à proposer en exemple, trois nombres pour lesquels l'aire de ce triangle, et conséquemment la hauteur, fussent exprimées en nombres rationnels. Cette question se reduit à construire deux triangles rectangles en nombres rationnels, ayant un côté commun. C'est ainsi que *Brahmagupta* a fait. Maintenant parmi tous les systèmes de deux triangles rectangles exprimés en nombres rationnels entiers, et ayant un côté commun, on aura pris celui où ces nombres sont les plus petits; ce sont ceux qui ont pour côtés, le premier 5, 12, 13, et le second 9, 12, 15. Plaçant ces deux triangles de manière que leurs deux côtés égaux se confondent et que les autres côtés des angles droits soient dans le prolongement l'un de l'autre, on forme le triangle acutangle qui a sa base égale à 14, et ses deux autres côtés égaux à 13 et à 15. C'est ainsi que différents géomètres, chacun de son côté, auront pu être conduits au triangle exprimé par les nombres 13, 14, 15.

(25) Dans le triangle obtusangle, multiplie la perpendiculaire qui tombe de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté opposé, ou inversement (*Beha-Eddin*. — *Khelasat al Hisàb*).

Dans un triangle obtusangle, la base multipliee par la moitié de la perpendiculaire, est l'aire (*Ganésa*. Commentaire au *Lilavati*). Ce même géomètre hindou donne une démonstration directe et bien simple du théorème qui exprime la surface du triangle en fonction de sa base et de sa hauteur. Il forme un rectangle qui a même base que le triangle et pour hauteur la moitié de la perpendiculaire. L'inspection de la figure fait reconnaître *à priori* que la surface du triangle est égale à celle du rectangle, d'où il conclut que l'aire du triangle est égale au produit de la base par la moitié de la perpendiculaire.

Dans le *Khelesat al Hisàb*, nous avions répété d'après M. *Taylor* de Bombay, qu'il n'existait aucun exemple de la multiplication par le *Réseau* ou *Shabacah* dans les livres sanscrits; la traduction du *Lilavati* par l'illustre *Colebrooke*, nous prouve le contraire; l'exemple qui se rencontre dans le commentaire est de *Ganesa*.

(26) ***Mohammed ben Moussa*** et ***Beha-Eddin*** ne définissent point la circonférence; ***Beha-Eddin*** divise la ***ligne courbe*** en ***ligne circulaire qui est connue***, et en ***courbe non circulaire***, dont il n'a point à s'occuper dans son ***Khelasat al Hisâb***.

Dans les ouvrages hindous, dans ceux de *Brahmagupta* et de *Bhascara*, on ne voit pas de définition du cercle, et *Ganésa* explique cette absence de définition, en disant que le cercle et l'arc n'ont pas besoin d'être définis.

(27) Il est à remarquer que ni *Mohammed ben Moussa*, ni *Beha-Eddin* n'emploient de mot unique équivalent au nôtre: *rayon*. Ils mentionnent toujours le diamètre, et pour *rayon*, ils disent demi-diamètre. Les Hindous ont un mot *carcata*, ouverture de compas, littéralement *écrevisse*, pour désigner le rayon (p. 90 du *Lilavati*).

(28) $H : 10 :: 4 : 2$ d'où $H = 20$.

Pyramide entière $= 5\frac{1}{3} \times 20 = 106\frac{2}{3}$.

Fragment ajouté $= \frac{4}{3} \times 10 = 13\frac{1}{3}$.

Pyramide tronquée $= 106\frac{1}{3} - 13\frac{1}{3} = 83\frac{1}{3}$.

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la petite, tu as alors la hauteur de la pyramide entière; mène ensuite l'opération à fin (*Beha-Eddin*).

(29) C'est-à-dire si le pilier prend la forme d'un cône tronqué. Alors multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône comme s'il était entier, etc. (*Beha-Eddin*).

(30) Voici la marche suivie par l'auteur pour résoudre cette question:

$$H = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$$
$$S = 8 \times 6 = 48$$
$$S = x^2 + x\left(6 - \frac{1}{2}x\right) + (8 - x)\frac{1}{2}x;$$

donc
$$x^2 + 6x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{1}{2}x^2 = 48$$
$$10\,x = 48$$
$$x = \frac{48}{110} = 4\frac{4}{5}.$$