Nouvelles annales de mathématiques

A. Vachette

Note sur une question géométrique de maximum

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 45-48
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__45_0>

NOTE

Sur une question géométrique de maximum.

PAR M. A. VACHETTE,
licencié ès sciences.

—

1. On a (*fig.* 9) deux parallèles $\genfrac{}{}{0pt}{}{PQ}{P'Q'}$, et deux points $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$ situés hors de ces parallèles et de côtés différents ; on demande de trouver le plus court chemin de A en B, par une ligne brisée AMNB, telle que la portion MN interceptée entre les deux parallèles soit donnée en direction.

Puisque la portion MN est donnée en direction par l'angle V qu'elle fait avec les parallèles, elle l'est aussi en grandeur, et nous pouvons poser $MN = a$. Si on projette $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$ sur $\genfrac{}{}{0pt}{}{PQ}{P'Q'}$ en $\genfrac{}{}{0pt}{}{A'}{B'}$, en posant $A'M = x$, il suffira de trouver x pour résoudre la question : si on pose $NB' = y$, et qu'on prenne x pour variable indépendante, y en sera une fonction. On connaît $A'B' = b$; et l'on peut poser $\genfrac{}{}{0pt}{}{AA' = p}{BB' = q}$.

La question revient à chercher le minimum (elle ne comporte pas évidemment de maximum) de AM + NB, puisque MN est constant, ou de la fonction $\sqrt{p^2+x^2}+\sqrt{q^2+y^2}$. Il s'agit de trouver y en fonction de x, ou une relation entre x et y.

Or, dans le trapèze MB'NA', une relation connue donne

$$\overline{MN}^2+\overline{A'B'}^2=\overline{MB'}^2+\overline{NA'}^2+2MA'.B'N,$$

d'ailleurs

$$\overline{MB'}^2 = a^2 + y^2 - 2ay\cos V,$$
$$\overline{NA'}^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos V;$$

et en substituant, il vient :

$$a^2 + b^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - 2(x+y)a\cos V + 2xy,$$

d'où l'on déduit aisément :

$$(1) \qquad x + y = a\cos V \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 V},$$

relation cherchée entre x et y.

On sait d'ailleurs que pour trouver le maximum de $F(x,y)$ quand on a $f(x,y) = 0$, et que x est variable indépendante, il faut égaler à 0 la dérivée totale de la fonction F, éliminer $\frac{dy}{dx}$ entre l'équation qui en résulte, et la dérivée totale de la fonction f qui est identiquement nulle ; ce qui donne une nouvelle relation entre x et y, qui, jointe à la première, peut servir à déterminer les variables.

Ici :

$$F(x,y) = \sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{y^2 + q^2}.$$

On aura donc :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + q^2}}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'ailleurs en différentiant (1), on obtient :

$$1 + \frac{dy}{dx} = 0;$$

et la nouvelle relation est alors

$$(2) \qquad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + p^2}}{\sqrt{y^2 + q^2}}.$$

Au lieu de chercher les valeurs de $\frac{x}{y}$ au moyen des équations (1) et (2), on remarque que, si on élève au carré, on aura :

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2+p^2}{y^2+q^2}=\frac{p^2}{q^2};$$

donc on a :

$$\frac{p}{q}=\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{x^2+p^2}}{\sqrt{y^2+q^2}};$$

et par conséquent les triangles $\left\{\begin{matrix}\text{AMA}'\\ \text{ANB}'\end{matrix}\right.$ sont semblables, ce qui nécessite le parallélisme de AM et de NB.

Il est d'ailleurs facile de trouver maintenant x et y, au moyen de $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$, et de l'équation (1).

2. La question peut se résoudre sans calcul.

Problème I. Construire un parallélogramme dont on connaît deux sommets opposés, et l'un des côtés en grandeur et en direction.

En menant par chaque sommet une droite indéfinie parallèle à la direction donnée, et portant sur cette droite dans les deux sens la longueur donnée à partir du sommet, on aura quatre parallélogrammes équivalents, non superposables, satisfaisant à la question.

Theorème I. Si on coupe un parallélogramme ABCD (*fig.* 10) par deux droites parallèles, l'une des diagonales KL du parallélogramme d'intersection IKML, est parallèle aux côtés $\begin{matrix}\text{AB}\\ \text{CD}\end{matrix}$, si toutefois AB est égal à la longueur QR inscrite entre les parallèles $\begin{matrix}\text{PQ}\\ \text{P}'\text{Q}'\end{matrix}$ parallèlement à AB.

En effet, si KL n'était pas parallèle à AB, en menant KG parallèle à AB, on aurait KG $=$ AB, mais

$$\text{KH}=\text{QR}=\text{AB},$$

ce qui serait absurde.

Problème II. Étant donnécs deux parallèles $\begin{matrix}\text{PQ}\\ \text{P}'\text{Q}'\end{matrix}$ (*fig.* 11), et deux points $\frac{A}{B}$ de côtés différents en dehors de ces parallèles, on peut toujours mener de A en B un chemin brisé AMNB, de façon que la portion MN interceptée entre les parallèles, ait une direction donnée, et que les portions $\frac{AM}{BN}$ soient parallèles.

Par A on mène AD égale et parallèle à M'N', par B on mène BC égale et parallèle à M'N'; d'après le théorème I, MN est égale et parallèle à M'N', et le chemin AMNB satisfait à la question, en vertu du problème I, il y aura deux chemins satisfaisant à la question : c'est d'ailleurs ce qu'indique la solution analytique.

Mais de ces deux chemins, le premier AMNB va du point A à la première parallèle PQ, et du point B à la deuxième P'Q', le second AM"N"B va du point A à la deuxième parallèle P'Q', et du point B à la première PQ.

Les deux autres parallélogrammes du problème I, ayant AB pour un de leurs côtés, ne peuvent satisfaire au problème actuel.

Théorème II. Tout chemin brisé AMNB tel que MN ait une direction donnée, et que $\frac{AM}{BN}$ soient parallèles, est plus court qu'un chemin brisé AM'N'B, dont la portion M'N' a la direction de MN.

En effet, menons BG (*fig.* 12) égale et parallèle à M'N', le chemin AM'GB est égal au chemin AM'N'B. MG étant dès lors parallèle à NB, est le prolongement de AM, et le chemin AMGB est égal au chemin AMNB. Or AMGB est évidemment plus petit que AM'GB, ce qu'il fallait prouver.

Note. Il serait intéressant de résoudre ce problème, qui a une application dans la dioptrique, pour un système quelconque de droites. Tm.