DROUETS

Solution de la question 118

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 413-414

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__413_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 118.

PAR M. DROUETS,
Elève au College royal militaire.

Si on élève à la même puissance positive les côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hypoténuse lorsque l'exposant de cette puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2.

Démonstration. Soient a, b, c les côtés, $a^2 = b^2 + c^2$ exprimera que le triangle est rectangle. La seule puissance positive inférieure à 2 est 1, et on sait que a est $< b + c$ pour que le triangle soit possible. D'ailleurs

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc\,;$$

donc $$(b + c)^2 > a^2, \quad \text{ou} \quad b + c > a.$$

(*) Les solutions des problèmes 111 et 119 du même elève sont parvenues trop tard.

Soit m un exposant positif entier et supérieur à 2, on a à comparer a^m avec b^m+c^m. Or $a^2=b^2+c^2$; donc $a=(b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, $a^m=(b^2+c^2)^{\frac{m}{2}}$. Il faut donc comparer $(b^2+c^2)^{\frac{m}{2}}$ avec b^m+c^m, ou bien élevant de part et d'autre au carré $(b^2+c^2)^m$ avec $(b^m+c^m)^2$. En développant de part et d'autre, il vient

$$b^{2m}+mb^{2m-2}c^2+,\ldots+mb^2c^{2m-2}+c^{2m}\ldots,\ \text{ et }\ b^{2m}+2b^mc^m+c^{2m}$$

On supprime $b^{2m}+c^{2m}$ partie commune.

Or, en ne considérant que les deux termes

$$mb^{2m-2}c^2+mc^{2m-2}b^2,$$

on a une somme supérieure à $2b^mc^m$; car cette somme est égale à

$$mb^2c^2\,(b^{2m-4}+c^{2m-4}),\qquad 2b^mc^m.$$

Divisant par b^2c^2,

$$m\,(b^{2m-4}+c^{2m-4}),\qquad 2b^{m-2}c^{m-2};$$

or, b^{2m-4} est le carré de b^{m-2}, c^{2m-4} est le carré de c^{m-2}. $b^{2m-4}+c^{2m-4}$ est donc $>$ que $2b^{m-2}c^{m-2}$, de plus m est au moins égal à 2; donc enfin $a^m > b^m+c^m$.

Note. Il reste à démontrer le cas où m est un nombre fractionnaire.