

DROUETS

Solution de la question 118

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 413-414

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__413_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 118.

PAR M. DROUETS,

Elève au Collège royal militaire.

Si on élève à la même puissance positive les côtés d'un triangle rectangle, la somme des puissances des côtés est plus grande que la puissance de l'hypoténuse lorsque l'exposant de cette puissance est moindre que 2, et moins grande si cet exposant surpasse 2.

Démonstration. Soient a, b, c les côtés, $a^2 = b^2 + c^2$ exprimera que le triangle est rectangle. La seule puissance positive inférieure à 2 est 1, et on sait que a est $< b + c$ pour que le triangle soit possible. D'ailleurs

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc;$$

donc $(b + c)^2 > a^2$, ou $b + c > a$.

(*) Les solutions des problèmes 111 et 119 du même élève sont parvenues trop tard.

Soit m un exposant positif entier et supérieur à 2, on a à comparer a^m avec $b^m + c^m$. Or $a^2 = b^2 + c^2$; donc $a = (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$,
 $a^m = (b^2 + c^2)^{\frac{m}{2}}$. Il faut donc comparer $(b^2 + c^2)^{\frac{m}{2}}$ avec $b^m + c^m$,
 ou bien élevant de part et d'autre au carré $(b^2 + c^2)^m$ avec
 $(b^m + c^m)^2$. En développant de part et d'autre, il vient
 $b^{2m} + mb^{2m-2}c^2 + \dots + mb^2c^{2m-2} + c^{2m} \dots$, et $b^{2m} + 2b^m c^m + c^{2m}$

On supprime $b^{2m} + c^{2m}$ partie commune.

Or, en ne considérant que les deux termes

$$mb^{2m-2}c^2 + mc^{2m-2}b^2,$$

on a une somme supérieure à $2b^m c^m$; car cette somme est égale à

$$mb^2c^2(b^{2m-4} + c^{2m-4}), \quad 2b^m c^m.$$

Divisant par b^2c^2 ,

$$m(b^{2m-4} + c^{2m-4}), \quad 2b^{m-2}c^{m-2};$$

or, b^{2m-4} est le carré de b^{m-2} , c^{2m-4} est le carré de c^{m-2} .
 $b^{2m-4} + c^{2m-4}$ est donc $>$ que $2b^{m-2}c^{m-2}$, de plus m est au moins égal à 2; donc enfin $a^m > b^m + c^m$.

Note. Il reste à démontrer le cas où m est un nombre fractionnaire.