

L. J.-F. BONNEL

Grand concours (année 1845)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 169-175

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__169_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GRAND CONCOURS (année 1845).

Mathématiques élémentaires.

Fig. 22. Soient dans un même plan deux cercles qui ne se coupent point ; O et O' leurs centres , AB et A'B' leurs diamètres , qui tombent tous deux sur la droite qui passe par les deux centres :

1° On demande de prouver qu'il existe sur cette droite deux points C et D , tels que le produit de leurs distances au centre de chaque cercle , est égal au carré du rayon de ce cercle ; c'est-à-dire tels qu'on a $OC \times OD = \overline{OA}^2$ et $O'C \times O'D = \overline{O'A'}^2$.

2° Soit comme dans la figure, le cas où l'un des cercles (O) tombe en dedans de l'autre (O') ; on peut d'un point P pris sur le diamètre AB du cercle intérieur élever à ce diamètre, une perpendiculaire qui rencontre les deux cercles en m et m' :

Or , si l'on considère les distances de ces points à l'un ou à l'autre des deux points C et D , ci-dessus déterminés , et par exemple , au point C ;

On demande de prouver que le rapport de ces distances est constant , quelle que soit la position du point P , et que le carré de ce rapport est égal au rapport des distances du point C aux centres des deux cercles ; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\overline{Cm}^2}{\overline{Cm'}^2} = \frac{CO}{CO'}$$

PREMIER PRIX

PAR M. L.-J.-F. BONNEL,

né à Romenay (Saône et Loire), le 22 juin 1826.
(Collège Stanislas. — Classe de M. Abel Transon.)

Pour répondre à la première partie de cette question, je vais supposer un instant que les deux points C et D existent : de l'existence de ces deux points, je chercherai à déduire quelque relation entre les distances de ces deux points aux centres de chaque cercle ; et l'examen de cette relation devra me donner la condition d'existence des deux points C et D. Il ne restera plus qu'à examiner si cette condition correspond à quelque une des conditions de l'énoncé.

Supposons donc le problème résolu : soit x , la distance du point C au point O ; y la distance du point D au même point O : appelons d , la distance qui sépare les deux centres OO'.

D'après la nature même des deux points C et D, nous devons avoir

$$(1) \quad xy = r^2,$$

en désignant par r le rayon du cercle intérieur (O) ; et

$$(2) \quad (d+x)(d+y) = R^2,$$

en désignant par R le rayon du cercle (O').

Dans l'équation (2) remplaçant y par sa valeur tirée de la première, nous aurons :

$$(d+x) \left(d + \frac{r^2}{x} \right) = R^2.$$

Le développement du produit indiqué donne :

$$\frac{d^2x + dx^2 + dr^2 + r^2x}{x} = R^2,$$

ou bien, multipliant les deux membres par x , et ordonnant par rapport à x , on obtient .

$$dx^2 + x(d^2 + r^2 - R^2) + dr^2 = 0. \quad (3)$$

La résolution de cette équation nous donne pour valeur de x

$$x = \frac{R^2 - d^2 - r^2 \pm \sqrt{(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2}}{2d} \quad (4)$$

Remarquons alors que pour que les deux valeurs de x soient réelles, il faut et il suffit que

$$(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2 \text{ soit } > 0.$$

Or, les deux valeurs de x ne sont autre chose que les distances des deux points C et D au centre O : car l'équation (3) divisée par d devient :

$$x^2 + x \left(\frac{d^2 + r^2 - R^2}{d} \right) + r^2 = 0,$$

expression dans laquelle le terme tout connu r^2 est le produit des deux racines de l'équation. Nous poserons donc la condition

$$(R^2 - d^2 - r^2)^2 - 4d^2r^2 > 0.$$

Mais cette condition se transforme successivement en cette autre

$$(R^2 - d^2 - r^2 - 2dr) (R^2 - d^2 - r^2 + 2dr) > 0$$

ou $[R^2 - (d+r)^2] [R^2 - (d-r)^2] > 0,$

ou $(R-d-r) (R+d+r) (R-d+r) (R+d-r) > 0. \quad (5)$

Or, si l'on fait attention à cette formule, on voit que d la distance des centres n'étant jamais moindre que 0, les deux facteurs $(R+d+r)$ et $(R+d-r)$ ne seront jamais plus petits que 0 ; leur produit sera donc toujours positif ; et pour que le produit total le soit, il faudra que celui des deux

autres facteurs restants soit lui-même positif ; il faudra donc que l'on ait .

$$(R-d-r) (R-d+r) > 0.$$

Pour satisfaire à cette condition , il faut , et il suffit que l'on ait à la fois

$$\text{et} \quad \left. \begin{array}{l} R-d-r > 0 \\ R-d+r > 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{et} \quad \left. \begin{array}{l} R-d-r < 0 \\ R-d+r < 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

ou ce qui revient au même pour la condition (1)

$$\text{et} \quad \begin{array}{l} d < R+r \\ d < R-r. \end{array}$$

et pour la condition (2)

$$\text{et} \quad \begin{array}{l} d > R+r \\ d > R-r \end{array}$$

C'est-à-dire que la distance des centres des deux cercles doit être à la fois plus petite ou plus grande que la somme et que la différence des rayons.

Mais , d'après l'énoncé même de la question , les cercles donnés ne se touchant point , sont tels que ces conditions sont exactement remplies ; donc , dans le cas où les deux cercles ne se coupent point , l'existence des deux points demandés est bien établie.

Si l'on suppose que d devienne égal à $R+r$ ou $R-r$; le produit indiqué dans la formule (5) devient égal à 0 ; le radical de la formule (4) s'évanouit. Les deux valeurs de x deviennent égales entre elles , et égales à r . Dans le premier cas , où $d=R+r$, c'est-à-dire où les cercles sont tangents extérieurement , chacune des valeurs de x est négative , et se trouve égale à $-r$. Dans le second cas , qui est celui où les cercles sont tangents intérieurement , les valeurs de x

sont l'une et l'autre positives, et égales à r . Les points C et D se confondent alors, et se trouvent placés tous les deux au point de contact même des cercles. Leur produit du reste est toujours r^2 .

Remarque générale. Toutes les discussions, et tous les résultats qui viennent d'être établis dans la supposition

$$x = OC, \quad \text{et} \quad y = OD,$$

se retrouveraient parfaitement dans les hypothèses

$$O'C = x \quad \text{et} \quad y = O'D.$$

La seconde partie de la question consiste à prouver que le rapport de Cm à Cm' est un rapport constant, et que le carré de ce rapport est égal à $\frac{CO}{CO'}$. Or, remarquons qu'en prolongeant Cm en Cm'' et Cm' en Cm''' , nous obtenons deux triangles Cmm' et $Cm''Cm'''$ qui sont semblables, et qui nous donnent $\frac{Cm}{Cm'} = \frac{Cm''}{Cm'''}$. On a aussi d'autre part, à cause des perpendiculaires CE et CF qui se trouvent partagées respectivement dans les cercles (O) et (O') en deux parties égales par les droites mm'' , $m'm'''$,

$$Cm : CE :: CE : Cm''$$

et

$$Cm' : CF :: CF : Cm'''$$

Divisant ces deux proportions terme à terme, on obtient :

$$\frac{Cm}{Cm'} : \frac{CE}{CF} :: \frac{CE}{CF} : \frac{Cm''}{Cm'''},$$

d'où :

$$\left(\frac{CE}{CF}\right)^2 = \frac{Cm}{Cm'} \times \frac{Cm''}{Cm'''}. \quad \text{Mais} \quad \frac{Cm}{Cm'} = \frac{Cm''}{Cm'''};$$

donc on a :

$$\left(\frac{CE}{CF}\right)^2 = \left(\frac{Cm}{Cm'}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{CE}{CF} = \frac{Cm}{Cm'};$$

donc le rapport de Cm à Cm' est constant.

De plus, le carré de ce rapport est égal à $\frac{CO}{CC'}$. En effet, nous venons de voir que $\left(\frac{Cm}{Cm'}\right)^2 = \left(\frac{CE}{CF}\right)^2$.

Or, $\overline{CE}^2 = OC \cdot CD$, car, en vertu de la propriété

$$OC \times OD = \overline{OE}^2,$$

le point F se trouve sur un cercle décrit sur OD comme diamètre. En vertu d'une propriété analogue des points C et D, on aura

$$\overline{CE}^2 = O'C \cdot CD;$$

donc :

$$\left(\frac{\overline{Cm}}{\overline{Cm'}}\right)^2 = \frac{OC \cdot CD}{O'C \cdot CD} = \frac{OC}{O'C};$$

donc enfin, le carré du rapport de \overline{Cm} à $\overline{Cm'}$ est bien égal à $\frac{OC}{O'C}$. C. Q. F. D.

Il est à remarquer que cette seconde partie de la question suppose un théorème que je n'ai point démontré, lequel consisterait à prouver que les deux triangles Cmm' et $Cm''m''$ sont semblables. Mais on peut donner du même fait une démonstration un peu différente, que j'ai vue depuis le concours, et que je vais exposer.

Posons pour un instant $PO' = z$, et exprimons le rapport $\frac{\overline{Cm}^2}{\overline{Cm'}^2}$ en fonction de cette inconnue auxiliaire. Nous aurons

successivement les expressions suivantes :

$$\frac{\overline{Cm}^2}{\overline{Cm'}^2} = \frac{\overline{Pm}^2 + \overline{PC}^2}{\overline{Pm'}^2 + \overline{PC}^2} = \frac{R^2 - z^2 + (z + d + x)^2}{r^2 - (z + d)^2 + (z + d + x)^2};$$

ou, en développant et simplifiant les opérations indiquées :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2} = \frac{R^2 + x^2 + d^2 + 2zd + 2zx + 2dx}{r^2 + x^2 + 2zx + 2dx}.$$

Or, si dans cette expression on remplace x^2 par sa valeur tirée de l'équation : $x^2 + x \left(\frac{d^2 + r^2 - R^2}{d} \right) + r^2 = 0$, on obtiendra en réduisant :

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2} = \frac{x \frac{(R^2 + d^2 - r^2 + 2dz)}{d} + R^2 + d^2 - r^2 + 2dz}{x \frac{(R^2 + d^2 - r^2 + 2dz)}{d}};$$

ou

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2} = 1 + \frac{d}{x} = \frac{x+d}{x};$$

Mais $x + d = CO'$ et $x = OC$; donc, on aura bien .

$$\frac{\overline{Cm'}^2}{\overline{Cm}^2} = \frac{O'C}{OC}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$