NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DORMOY

Loi de la différence entre deux réduites de rang quelconque, dans les fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 132-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__132_0>

LOI DE LA DIFFÉRENCE

entre deux réduites de rang quelconque, dans les fractions continues.

PAR M. DORMOY,
élève en spéciales.

Considérons un nombre quelconque de réduites consécutives :

$$\frac{P}{P'}\ \frac{Q}{Q'}\ \frac{R}{R'}\ \frac{S}{S'}\ \frac{T}{T'}\ \frac{V}{V'},$$

et proposons-nous de trouver les différences entre une quelconque d'entre elles, $\frac{Q}{Q'}$, par exemple, et toutes les suivantes.

Nommons r, s, t, v, les quotients incomplets correspondants aux réduites $\frac{R}{R'}\ \frac{S}{S'}\ \frac{T}{T'}\ \frac{V}{V'}$; si nous formons ces réduites suivant la loi établie à cet égard, nous aurons :

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$$

$$\frac{S}{S'}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}$$

$$\frac{T}{T'}=\frac{(Qrs+Ps+Q)t+Qr+P}{(Q'rs+P's+Q')t+Q'r+P'}=\frac{Qrst+Pst+Qt+Qr+P}{Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P'}$$

$$\frac{V}{V'}=\frac{(Qrst+Pst+Qt+Qr+P)v+Qrs+Ps+Q}{(Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P')v+Q'rs+P's+Q'}=$$

$$=\frac{Qrstv+Pstv+Qtv+Qrv+Pv+Qrs+Ps+Q}{Q'rstv+P'stv+Q'tv+Q'rv+P'v+Q'sr+P's+Q'}.$$

Supposons de plus que $\frac{Q}{Q'}$ soit une réduite de rang impair, elle sera alors plus petite que toutes les suivantes, et toutes les différences $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$, $\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}$,...... seront positives ; si nous eussions supposé que $\frac{Q}{Q'}$ fût une réduite de rang pair, elle eût été plus grande que toutes les suivantes, et les différences $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$..... eussent été les mêmes en valeur absolue, seulement le signe eût été changé.

Cela posé, nous avons successivement :

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{(Qr+P)Q'-(Q'r+P')Q}{R'Q'}=$$
$$=\frac{Q'P-QP'}{R'Q'}=\frac{1}{R'Q'}$$

$$\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{QQ'rs+PQ's+QQ'-QQ'rs-QP's-QQ'}{Q'S'}=$$
$$=\frac{(PQ'-QP')S}{Q'S'}=\frac{s}{Q'S'}$$

$$\frac{T}{T'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrst+Pst+Qt+Qr+P}{Q'rst+P'st+Q't+Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{(PQ'-QP')st+1}{Q'T'}=\frac{st+1}{Q'T'}$$

$$\frac{V}{V'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrstv+Pstv+Qtv+Qrv+Pv+Qrs+Ps+Q}{Q'rstv+P'stv+Q'tv+Q'rv+P'v+Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=$$
$$=\frac{(st+1)v+s}{Q'V'}.$$

On continuerait de même pour les réduites suivantes.

Considérons les numérateurs des différences successives ; ces numérateurs sont :

$$1,\ s,\ st+1,\ (st+1)v+s,$$

et les quotients correspondants sont ·

$$r,\quad s,\quad t,\qquad v.$$

On voit immédiatement que le numérateur de chaque différence est égal au précédent, multiplié par le quotient incomplet correspondant, plus le numérateur de la différence précédant de deux rangs.

Cette loi est identiquement la même que celle qui a été établie lors de la formation des réduites d'une quantité développée en fraction continue.

On voit alors qu'en nommant les quotients incomplets successifs $p,q,r,s,t,v,x,y,z\ldots$ les numérateurs des différences seront ·

$$1,p,pq+1,(pq+1)r+p,[(pq+1)r+p]s+pq+1..$$

Appliquons ceci à un exemple numérique ; étant donnée la fraction $\frac{86400}{20929}$, la première réduite est $\frac{4}{1}$, et les différents quotients incomplets successifs auxquels on est conduit lorsqu'on la développe en fraction continue sont, 4,7,1,3,1,16, 11,15; proposons-nous de trouver la différence entre la première réduite $\frac{4}{1}$, et toutes les autres.

Le numérateur de la 1re différence sera 1

2e	1.1+0=1
3e	1.3+1=4
4e	4.1+1=5
5e	5.16+4=84
6e	84.1+5=89
7e	89.1+84=173
8e	173.15+89=2684

Quant aux dénominateurs, ils sont égaux aux dénominateurs de la réduite dont on retranche, puisque le dénominateur de la réduite retranchée est l'unité ; or, si nous formons ces dénominateurs, nous avons successivement :

7, 8, 31, 39, 655, 694, 1349, 20929.

Donc enfin :

la différence entre la 1^re^ réduite et la

2^e^ est	$\frac{1}{7}$	6^e^ est	$\frac{84}{655}$
3^e^	$\frac{1}{8}$	7^e^	$\frac{89}{694}$
4^e^	$\frac{4}{31}$	8^e^	$\frac{173}{1349}$
5^e^	$\frac{5}{39}$	9^e^	$\frac{2684}{20929}$

comme on peut s'en convaincre en effectuant directement le calcul.

Enfin pour vérifier cette loi, on peut encore considérer l'expression

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{1}{Q'R'},$$

y changer r en $r+\frac{1}{s}$, et passer ainsi de $\frac{R}{R'}$ à $\frac{S}{S'}$:

$$\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qrs+Ps+Q}{Q'rs+P's+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{s}{Q'S'}$$

On continuerait de même pour les autres réduites, donc....

Pour passer de $\frac{S}{S'}-\frac{Q}{Q'}$ à $\frac{T}{T'}-\frac{Q}{Q'}$, il suffisait encore de changer dans l'expression de la différence s en $s+\frac{1}{t}$, et l'on aurait eu : $\frac{T}{T'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{s + \frac{1}{t}}{Q'S'} = \frac{st+1}{Q'T'}$, ce qui vérifie encore le résultat énoncé. Mais la première marche était celle qui se présentait tout d'abord à l'esprit, c'est par suite la plus logique, mais on voit qu'elle est loin d'être la plus simple.

Note. Entre deux réduites consécutives de même parité, par exemple entre $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{S}{S'}$, on peut insérer $s - 1$ fractions *supplémentaires* qui jouissent des mêmes propriétés que les réduites, ces fractions sont :

$$\frac{Q+R}{Q_1+R_1};\ \frac{Q+2R}{Q_1+2R_1};\ \frac{Q+3R}{Q_1+3R_1}\cdots\frac{Q+(s-1)R}{Q_1+(s-1)R_1};$$

déjà employées par Huyghens, les fractions supplémentaires sont utiles dans plusieurs questions ; entre autres dans la simplification de π ; dans le problème de l'intercalation ; dans le nombre des dents des rouages pour certains mécanismes d'horlogerie. Lagrange s'en est occupé, et nous ignorons pourquoi on ne dit rien de ces fractions importantes dans les traités élémentaires. Tm.