NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites ; de même à un triangle ; théorème de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 480-491

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__480_0>

THÉORÈMES

Sur les coniques circonscrites à un quadrilatère ou inscrites ; de même à un triangle ; théorème de M. Steiner.

(Suite, v. p. 376.)

—

XXXIII. Théorème. *Le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique.*

Démonstration. Prenons pour axes deux côtés opposés du quadrilatère, et soit l'équation de la conique

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0\,;$$

faisant $y = 0$, on connaîtra $\frac{E}{C}$, $\frac{F}{C}$; et fesant $x = 0$, on connaîtra $\frac{D}{A}$, $\frac{F}{A}$; ainsi, on peut regarder comme connus les coefficients à l'exception de B. Soient t, u les coordonnées du centre ; on a

$$2Au + Bt + D = 0\,,\quad Bu + 2Ct + F = 0\,;$$

éliminant B, on obtient

$$2Au^2 - 2Ct^2 + Du - Ft = 0 \;(1),$$

equation du lieu cherché, et d'une facile discussion.

Observation. Ce même problème a déjà été résolu (p. 304) en prenant pour axes deux côtés consécutifs ; ce qui est plus long et mène à une équation plus compliquée. La solution actuelle est donnée par MM. Gergonne (tome XVIII p. 100), et Lamé, t. VII.

XXXIV. Théorème. *Les asymptotes de l'hyperbole lieu des* *centres des coniques circonscrites à un quadrilatère convexe sont conjugués relativement à chacune de ces coniques.*

Démonstration. Soient α et α' les coefficients angulaires des asymptotes; on a donc, en vertu de l'équation (1) ci-dessus, $\alpha+\alpha'=0$; $\alpha\alpha'=-\frac{C}{A}$; or, la relation pour que deux droites soient conjuguées est $2Apq+B(p+q)+2C=0$; et cette relation est satisfaite par les valeurs de α et α'; donc, etc.

Observation. Ce théorème est de M. Steiner, célèbre géomètre suisse, professeur à Berlin.

XXXV. LEMME. Le carré du sinus de l'angle des diamètres conjugués égaux dans l'ellipse est égal à $\frac{-m\sin^2\gamma}{N^2}$.

Démonstration. Soient θ l'angle des diamètres conjugués égaux et a' l'un de ces demi-diamètres, on a

$$a'^2=\frac{2LN}{m^2};\quad a'^2\sin\theta=\frac{2L\sin\gamma}{-m\sqrt{-m}}$$

(t. I, p. 493); d'où

$$\sin^2\theta=\frac{-m\sin^2\gamma}{N^2}.$$

XXXVI. THÉORÈME. L'ellipse circonscrite à un quadrilatère, dont les diamètres conjugués égaux sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, lieu des centres, est l'ellipse où l'angle aigu formé par ces diamètres est le plus grand possible, par conséquent celle qui s'écarte le moins du cercle.

Démonstration. Désignons cet angle par θ; on a donc en général $N^2\sin^2\theta=-m\sin^2\gamma$; différentiant par rapport à B, et posant $\frac{d\sin\theta}{dB}=0$; ainsi que l'exige la théorie *de maximis*, on a

$$2N\frac{dN}{dB}.\sin^2\theta=-\sin^2\gamma\frac{dm}{dB},$$

éliminant $\sin^2\theta$, on obtient

$$2\,\frac{dN}{dB}\,m = N\,\frac{dm}{dB};$$

or

$$\frac{dN}{dB} = -\cos\gamma;\ \frac{dm}{dB} = +2B;$$

d'où $m\cos\gamma + BN = 0$; développant on trouve

$$B = \frac{4AC}{A+C}\cos\gamma.$$

Nommant p et q les coefficients angulaires des diamètres conjugués égaux, on a

$$p+q = \frac{-2(BN+m\cos\gamma)}{m+2AN};\ pq = \frac{m+2CN}{m+2AN}$$

(t. II, p. 29) ; donc $p+q=0$;

$$pq = \frac{mB+2CBN}{mB+2ABN} = -\frac{C}{A},$$

en remplaçant auparavant B par sa valeur.

Or, pour les asymptotes, on a de même $p+q=0$; $pq = -\frac{C}{A}$; ce qu'il fallait démontrer.

Observation I. Le plus petit angle aigu a lieu pour $m=0$; l'ellipse devient une parabole.

Observation II. Lorsque $A=C$; $B=2A\cos\gamma$; le quadrilatère est inscriptible dans un cercle, et alors

$$\sin^2\theta = 1\ ;\ \theta = \frac{\pi}{2}.$$

XXXVII. Théorème. Les asymptotes d'une hyperbole circonscrite à un quadrilatère non convexe, sont conjugués relativement à l'ellipse, lieu des centres.

Démonstration. Soit $Ay^2+Bxy-Cx^2+Dy+Ex+F=0$, l'équation de l'hyperbole circonscrite; $2Au^2+2Ct^2+Du-Ft=0$

sera l'équation de l'ellipse, lieu des centres (p. 464) ; p et q étant les coefficients angulaires des asymptotes, on a

$$p+q=-\frac{B}{A}\,;\ pq=-\frac{C}{A}\,;$$

pour que des droites soient conjuguées relativement à l'ellipse, lieu des centres, on doit avoir $2Apq+2C=0$; or, les coefficients angulaires des asymptotes satisfont à cette équation de condition, donc, etc.

XXXVIII. Théorème. L'hyperbole circonscrite à un quadrilatère non convexe, dont les asymptotes sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse, lieu des centres, est celle dont l'angle des asymptotes est un maximum pour toutes les hyperboles circonscrites.

Démonstration. Soit δ l'angle des asymptotes ; on a

$$\tan^2\delta=\frac{m\sin^2\gamma}{N^2}$$

(t. II, p. 106) ; appliquant la méthode *de maximis*, on trouve comme ci-dessus $BN+m\cos\gamma=0$, ou $N=A-C+B\cos\gamma$; $m=B^2+4AC$; on en déduit $B=\dfrac{4AC\cos\gamma}{C-A}$; désignant par p' et q' les coefficients angulaires des asymptotes de cette hyperbole, on a

$$p'+q'=\frac{4C\cos\gamma}{A-C}\,;\ p'q'=-\frac{C}{A}\,;$$

or, p et q étant les coefficients angulaires des diamètres conjugués égaux dans l'ellipse, et substituant pour B, m, N, leurs valeurs dans les expressions données ci-dessus (XXXVI), pour ces coefficients, on trouve $p+q=p'+q'$; $pq=p'q'$; donc, etc.

Observation. Ce théorème répond à une question proposée par Abel, dans le Journal de Crelle et ainsi énoncée : parmi toutes les hyperboles circonscrites à un quadrilatère non convexe, trouver celle qui s'écarte le plus de l'hyperbole équilatère.

XXXIX. Problème. Parmi les coniques circonscrites à un quadrilatère, déterminer celle où le produit des axes principaux est un minimum.

Solution. Adoptons même système d'axes que pour le théorème XXXIII; faisant $z=\frac{L^2}{m^3}$, il faut que z soit un minimum (t. I, p. 493), d'où

$$3L\frac{dm}{dB}=2m\frac{dL}{dB};\ \frac{dm}{dB}=2B;\ \frac{dL}{dB}=-n;$$

ainsi $3BL+mn=0$; mais $4BL=-2kk'-2mn$; ainsi

$$3kk'+mn=0;\ 3\frac{k'}{m}+\frac{n}{k}=0\ (1);$$

et $\frac{k'}{m}$ est l'ordonnée du centre; $\frac{n}{k}$ est l'ordonnée du pôle de l'axe des y; l'équation (1) exprime donc la relation entre ces deux ordonnées, pour la conique qui satisfait au problème. Développant l'équation $3BL+mn=0$, et ordonnant par rapport à B, il vient

$$FB^3-2DEB^2+[3AE^2+3CD^2-4ACF]B-4ACDE=0,$$

ainsi il y a au moins une racine réelle, et trois au plus.

En résolvant, on a

$$FB=\frac{2}{3}DE-(1)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{P+\sqrt{Q}}-(1)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{P-\sqrt{Q}}$$

$$P=DE\left[-\frac{8}{27}D^2E^2+F(AE^2+CD^2)-\frac{10}{3}ACF^2\right]$$

$$Q=P^2+\left[-\frac{4}{9}D^2E^2+F(AE^2+CD^2)-\frac{4}{3}ACF^2\right]^3$$

si $4(D^2E^2+3ACF^2)<9F(AE^2+CD^2)$, Q est positif, et B n'a qu'une seule valeur réelle.

Observation. La valeur de B est indépendante de l'angle des axes.

XL. Problème. Parmi les coniques touchant les côtés d'un quadrilatère, déterminer celle où $\frac{m}{N^2}$ est un maximum.

Solution. Prenons pour axe des x la droite, lieu des centres de toutes les coniques et les axes rectangulaires; faisant usage des fonctions élémentaires, l'équation de la conique devient :

$$(k^2 - ml)y^2 - 2mnxy - ml'x^2 + 2kny + 2kl'x + n^2 - ll' = 0$$

(*Voir* p. 262); car $k' = 0$, ou bien

$$\left(\frac{k^2}{m^2} - \frac{l}{m}\right)y^2 - 2n'xy - \frac{l'}{m}x^2 + 2\frac{k}{m}n'y + 2\frac{k}{m}\frac{l'}{m}x +$$
$$+ n'^2 - \frac{l}{m}\frac{l'}{m} = 0, \quad \text{ou} \quad n' = \frac{n}{m}.$$

Chaque côté du quadrilatère fournit une équation du premier degré en $\frac{k}{m}$, $\frac{l}{m}$, $\frac{l'}{m}$ et n' (t. II, p. 108); mais l'origine étant sur la ligne des centres, trois suffisent; on a donc :

$$\frac{k}{m} = a + bn'; \ \frac{l}{m} = a' + b'n'; \ \frac{l'}{m} = a'' + b''n';$$

a, b, a', b', a'', b'' sont des quantités connues; ainsi l'équation prend cette forme :

$$(\alpha n'^2 + \beta n' + \gamma)y^2 - 2n'xy + (a'' + b''n')x^2 + \text{etc.} = 0.$$

α, β, γ sont des quantités connues.

On a $m = pn'^3 + qn'^2 + rn' + s$, $N = p'n'^2 + q'n' + r'$; les sept nouvelles lettres représentent encore des quantités connues. L'équation *de maximis* donne comme ci-dessus :

$$2m\frac{dN}{dn'} = N\frac{dm}{dn'}$$

ou $$2(pn'^3 + qn'^2 + rn' + s)(2p'n' + q') =$$
$$= (p'n'^2 + q'n' + r')(3pn'^2 + 2qn' + r),$$
équation qui, dans le cas général, est du quatrième degré en n'.

Observation. L'équation est plus compliquée que pour le problème analogue (XXXVI) relatif aux coniques circonscrites; c'est ce qu'on rencontre aussi dans la géométrie élémentaire; il n'y a qu'un cercle circonscrit à trois points et quatre cercles inscriptibles au système des côtés d'un triangle. En général, ce genre de problème se réduit à rendre maximum ou minimum, une fonction des coefficients de l'équation, ces coefficients étant chacun fonction d'une seule variable.

M. Ferriot a traité d'une manière parfaite et complète le cas particulier où le quadrilatère devient un parallélogramme (application de la méthode des projections, p. 76, 1838. *Voir* aussi Nouvelles Annales, t. II, p. 205 et 292). Il serait à désirer qu'on pût se servir de la méthode des projections pour le quadrilatère. M. Steiner, dans son excellent mémoire, n'a pas examiné les cas actuels des *maxima*. (*Voir* Journal de Liouville, t. VI, p. 105, 1841.)

XLI. Problème. Trouver l'aire d'une ellipse inscrite dans un triangle, connaissant les points de contact.

Solution. Prenons deux des côtés du triangle pour axes; et soit $dy + ex + f = 0$, l'équation du troisième côté; soit x' l'abscisse du point de contact sur l'axe des x, et y' l'ordonnée du point de contact sur l'axe des y; x' et y' sont données; faisons de plus :

$$\frac{k}{m} = t; \quad \frac{k'}{m} = u; \quad \frac{n}{m} = n'; \quad f = -ep; \quad f = -dq.$$

Faisant $l = l' = 0$ dans l'équation générale qui est au bas *de la page 262, et divisant toute l'équation par m^2, il vient :*

$$t^2y^2 - 2(ut + n')xy + u^2x^2 + 2tn'y + 2u'n'x + n'^2 = 0$$

Faisant $x=0$; on a :

$$ty'+n'=0\text{; d'où } t=-\frac{n'}{y'},\text{ et de même } u=-\frac{n'}{x'}.$$

Le troisième côté tangent donne :

$$-2den'+f^2+2fdu+2fet=0\,;$$

d'où $$-2dex'y'n'+f^2x'y'-2fdn'y'-2fen'x'=0\,;$$

$$2n'=\frac{f^2x'y'}{dex'y'+fdy'+fex'}=\frac{pqx'y'}{x'y'-py'-qx'}.$$

Soit A l'aire de l'ellipse ; on a :

$$A^2=-\frac{4L^2\sin^2\gamma}{m^3}\pi^2\,;$$

or $L=Dk'+mF$; $4L^2=4DLk'+4mLF$ (*Voir* t. I, p. 490),

et $$4L^2=2kk'n+mn^2\,;\quad \frac{4L^2}{m^3}=n'[2ut+n'].$$

Remplaçant n', u, t par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{4L^2}{m^3}=\frac{n'^2(2n'+x'y')}{x'y'}=\frac{p^2q^2}{4}\cdot\frac{x'^2y'^2.\,x'-p\,.\,y'-q}{(x'y'-py'-qx')^3}\,;$$

$$A=\frac{1}{2}pq\sin\gamma\frac{x'y'}{py'+qx'-x'y'}\sqrt{\frac{(x'-p)\,(y'-q)}{py'+qx'-x'y'}}\cdot\pi.$$

XLII. Problème. x' étant donné, quelle valeur faut-il donner à y' pour que l'aire de l'ellipse devienne un maximum?

Solution. Soit $z\,(py'+qx'-pq)^3=y'^3(q-y')$; il faut que $\frac{dz}{dy'}=0$; différentiant dans ce sens et éliminant z, il vient :

$$(2q-3y')\,(qx'+py'-x'y')=3\,(q-y')\,(p-x')y'\,;$$

d'où l'on tire : $$y'=\frac{2qx'}{p+2x'}.$$

XLIII. Théorème. *L'ellipse qui touche les trois côtés d'un triangle aux milieux est l'ellipse inscrite de plus grande aire*

Démonstration. D'après le problème précédent, on doit avoir simultanément :

$y' = \frac{2qx'}{p + 2x'}$ et $x' = \frac{2py'}{p+2y'}$; d'où l'on tire $x' = \frac{p}{2}$, et $y' = \frac{q}{2}$;

et la valeur de l'aire de l'ellipse maxima est :

$$\frac{1}{18} pq \sqrt{3} \,.\, \sin\gamma \,.\, \pi ;$$

coordonnées du centre, $\frac{p}{3}, \frac{q}{3}$;

il est évident que le centre de l'ellipse est le centre de gravité du triangle.

Observation. Ainsi la question 86 (t. III, p. 256) est complètement résolue. On voit que la première partie est indéterminée, vu qu'on peut inscrire dans un triangle une infinité d'ellipses d'aires équivalentes. On parvient directement au théorème par la méthode projective, en considérant un triangle quelconque comme la projection d'un triangle équilatéral, ce qui est toujours permis (*Voir* t. I, p. 397, § 4). C'est ainsi que M. Ferriot a démontré ce théorème dans l'ouvrage cité ci-dessus.

XLIV. Théorème. Le polygone circonscrit à l'ellipse dont les points de contact sont aux milieux des côtés est un polygone de moindre aire parmi tous ceux qui sont circonscrits et d'un même nombre de côtés.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du problème XI (t. III, p. 186).

XLV. Théorème. L'ellipse de moindre aire circonscrite à un triangle est semblable à l'ellipse de plus grande aire inscrite, de dimension double, semblablement située et concentrique.

Démonstration. Soit ABC le triangle; faisons $AB = p$,

$AC = q$; prenons AB, AC respectivement pour axes des x et des y. L'équation de l'ellipse circonscrite est :

$$y^2 + Bxy + Cx^2 - qy - Cpx = 0.$$

$$m = B^2 - 4C\,;\ L = C\,(Cp^2 - Bpq + q^2)\,;\ \frac{dm}{dB} = 2B\,;$$

$$\frac{dm}{dC} = -4\,;\ \frac{dL}{dC} = 2Cp^2 - Bpq + q^2\,;\ \frac{dL}{dB} = -Cpq.$$

Faisons $L^2 = zm^3$; les équations *de minimis* donnent :

$$3L\frac{dm}{dC} = 2m\frac{dL}{dC} \quad (1)\,; \qquad 3L\frac{dm}{dB} = 2m\frac{dL}{dB} \quad (2),$$

d'où
$$\frac{dm}{dB}\cdot\frac{dL}{dC} = \frac{dm}{dC}\,\frac{dL}{dB} \quad (3).$$

L'équation (1) développée devient :

$$2Cp^2(B^2 - C) - Bpq\,(B^2 + 2C) + q^2(B^2 + 2C) = 0\,;$$

l'équation (3) donne :

$$2BCp^2 - pq\,(B^2 + 2C) + Bq^2 = 0.$$

Éliminant pq, il vient $Cp^2 - q^2 = 0$; et on trouve pour B deux valeurs $B = \frac{q}{p}$; $B = \frac{2q}{p}$; la première donne une ellipse minimum, et la seconde deux droites parallèles. Or la tangente à l'origine a pour équation $Cpx + qy = 0$. Elle est donc parallèle au côté BC qui a pour équation $py + qx = pq$; donc, si par les trois sommets on mène des parallèles respectivement aux côtés opposés, on obtient un triangle circonscrit à l'ellipse d'aire minima et les points de contact sont aux milieux des côtés, donc, etc. ; et l'aire de l'ellipse minima est

$$\frac{2}{9}pq\sqrt{3}\,.\,\sin\gamma\,.\,\pi.$$

Observation. La méthode projective donne directement le théorème ; mais pas l'aire de l'ellipse circonscrite.

XLVI. On a vu que l'espèce de la conique inscrite dans un triangle et dont le centre est donné dépend du produit $4n'(2ut+n')$ (p. 265), remplaçant n' par sa valeur donnée au même endroit, en faisant $d=-\frac{f}{q}$; $e=-\frac{f}{p}$; on a

$$4n'(2ut+n')=(2u-q)(2t-p)(pq-2pu-2qt);$$

et on trouve la même expression pour déterminer la nature de la conique circonscrite au triangle et dont le centre est donné (p. 261); ainsi formant le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés, si le centre est dans l'intérieur de ce triangle ou dans les angles opposés aux sommets, la conique inscrite est une ellipse; si le centre est dans un bi-angle formé par un côté et les prolongements des deux autres, la conique est une hyperbole; lorsque le centre est sur les côtés du triangle, la conique se réduit à une droite. Les mêmes déterminations pour la conique circonscrite.

XLVII. Désignant l'aire de l'ellipse inscrite par A, on a

$$A^2=-\frac{4L^2}{m^3}\sin^2\gamma\pi^2=n'(2ut+n')\sin^2\gamma\pi^2=$$

$$=\frac{1}{4}(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)\sin^2\gamma.\pi^2.$$

M. Steiner a donné une très-élégante interprétation géométrique. Soit ABC le triangle donné, et A', B', C', les points milieux de BC, AC, AB; α, β, γ les perpendiculaires abaissées du centre sur B'C', A'C', A'B' et R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; on a

$$\alpha=\frac{(2pu+qt-pq)\sin\gamma}{2r};\ \beta=\frac{(2u-q)\sin\gamma}{2};\ \gamma=\frac{2t-p\sin\gamma}{2};$$

et r est la longueur du côté BC; donc

$$\alpha\beta\gamma R=\frac{(2u-q)(2t-p)(2pu+qt-pq)}{8}\sin^2\gamma.\frac{\sin\gamma R}{r}=$$

$$=\frac{(2u-q)(2t-p)(2pu+qt-pq)\sin^2\gamma}{16};$$

et

$$A^2 = 4\alpha\beta\gamma R . \pi^2.$$

XLVIII. Théorème. **Le lieu des centres d'une conique passant par trois points donnés, et dont le rectangle des axes est donné, est une ligne du sixième degré.**

Démonstration. Voir IX, page 265; par inadvertance, on a laissé subsister dans les deux membres de l'équation finale, le facteur commun $(2pu+2qt-pq)^2$; en le supprimant, il reste

$$u^2t^2(pu+qt)[pu+qt-2pq]=c(2u-q)(2t-p)(2pu+2qt-pq)$$

courbe du sixième degré qui passe par les points milieux des côtés, qui sont des point multiples; les côtés sont des asymptotes, ayant chacun à l'origine quatre points en commun avec la courbe, c'est-à-dire, étant asymptote à quatre branches. Voir les *fig.* 51, 52, 53, qui représentent les diverses formes de la courbe, selon que l'aire donnée surpasse l'aire du triangle, est égale ou inférieure à cette aire.

XLIX. Théorème. Le lieu du centre d'une conique d'aire donnée, touchant trois droites, est du troisième degré.

Démonstration. L'équation de cette ligne est

$$(2u-q)\,(2t-p)\,(2pu+2qt-pq)=c$$

ou c est une constante. (XLVII.)

(*La suite prochainement.*)