TERQUEM

Sur les lignes aplanétiques, lemniscates, caustiques, etc.

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 4 (1845), p. 423-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__423_1>

SUR LES LIGNES

APLANÉTIQUES, LEMNISCATES, CAUSTIQUES, ETC.

—

1. LEMME I. L'enveloppe d'un cercle assujetti à passer par un point fixe, et à avoir son centre sur une droite fixe est, outre le 1er point fixe, un second point fixe, symétrique au premier, relativement à la droite.

2. LEMME II. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une ligne plane quelconque, et à passer par un point fixe, situé dans le même plan, le lieu du point symétrique au point fixe, relativement aux tangentes à la ligne donnée, est la courbe enveloppe du cercle; plus le point fixe lui-même.

Démonstration. Le cercle mobile, dans deux positions infiniment voisines, peut être considéré comme se mouvant sur la tangente; or le point d'intersection de ces deux cercles, est le point de contact du cercle mobile avec son enveloppe; donc...

3. LEMME III. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une droite fixe, et à toucher constamment une seconde droite, situées l'une et l'autre dans le même plan, a pour enveloppe, outre cette seconde droite, une troisième droite fixe;

la première droite est la bissectrice des deux autres. Pour chaque position particulière du cercle mobile, le point de contact avec son enveloppe est le point symétrique, relativement à la première droite, du point où le cercle touche la seconde droite.

4. Lemme IV. Un cercle étant assujetti à avoir son centre sur une ligne plane, et à toucher constamment une seconde ligne, située dans le même plan, pour chaque position particulière du cercle mobile, le point de contact avec l'enveloppe est le point symétrique du point de contact avec la seconde ligne, relativement à la tangente à la première ligne, menée par le centre du cercle ; c'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

5. *Définition*. Une ligne *aplanétique* est l'enveloppe d'un cercle variable de grandeur, et dont le centre décrit une ligne plane nommée *directrice*, et qui touche constamment une seconde ligne située dans le même plan, et qu'on peut nommer ligne *polaire*.

6. Si, conservant la même directrice, on prend la ligne aplanétique pour ligne polaire, celle-ci deviendra une ligne aplanétique ; donc ces deux lignes sont conjuguées relativement à la directrice ; étant données deux lignes planes quelconques, on peut, généralement parlant, les considérer comme conjuguées, relativement à une ligne directrice ; ainsi deux droites sont *aplanétiquement* conjuguées, relativement à leur bissectrice ; deux cercles sont aplanétiquement conjugués, en prenant pour directrice une hyperbole, etc.

7. Lorsque la ligne polaire se réduit à un point fixe, on rentre dans le cas du lemme II.

8. Pour mener une tangente à une ligne aplanétique, par un point situé sur la ligne, il suffit de mener une tangente au cercle mobile, répondant à ce point.

9. *Problème*. Étant donnée l'équation d'une conique direc-

trice, et les coordonnées d'un pôle, trouver l'équation de la ligne aplanétique, conjuguée au pôle.

Solution. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, l'équation de la conique; les axes sont rectangulaires; et soient a et b les coordonnées du pôle; abaissant du pôle une perpendiculaire sur une tangente à la conique, passant par le point (x', y'), et doublant cette perpendiculaire, on aura un point de l'enveloppe (lemme).

Or, l'on a :

$$y'[2Ay+Bx+D]+x'[2Cx+By+E] = -Dy - Ex - 2F,$$

équation de la tangente;

$$y'[By - 2Ax - Bb + 2Aa] + x'[2Cy - Bx - 2Cb + Ba] = \\ = -Ey + Dx + Eb - Da;$$

équation d'une perpendiculaire à la tangente, abaissée du pôle.

De là on tire :

$$y' = \frac{k'(y^2 + x^2) - y(l' + bk') + x(n - k'a) - na + bl'}{T}$$

$$x' = \frac{k(y^2 + x^2) + y(n - kb) - x(l + bk) - nb + al}{T},$$

$$T = m(y^2 + x^2) - y(k' + mb) - x(k + ma) + bk' + ak;$$

substituant les valeurs de y', x', dans l'équation de la conique, on a l'équation du lieu de la projection du pôle sur la tangente. Pour faciliter le calcul, nous devons faire connaître cinq nouvelles *identités* qui se présentent très-souvent.

1. $Al'^2 - Bnl' + Cn^2 + Dl'k' - Enk' + Fk'^2 = Al'^2 - Bnl' + \\ + Cn^2 - Fk'^2 + k'[Dl' - En + 2Fk'] = Al'^2 - Bnl' + \\ + Cn^2 - Fk'^2 = Ll'.$

2. $An^2 - Bnl + Cl^2 - Dnk + Flk + Fk^2 = Ll.$

3. $2Ak'l' + B[kl' - k'n] - 2Ckn + D[ml' + k'^2] + F[kk' - mn] + \\ + 2Fmk = l'[2Ak' + Bk + Dm] - n[2Ck + Bk' + Em] + k'[Dk' + \\ + Ek + 2mF] = 2Lk'.$

$$4.\ -2Ak'n+B[k'l-kn]+2Ckl+D[kk'-mn]+E[ml+k^2]+$$
$$+2Fmk'=2Lk.$$

$$5.\ -2Al'n+B[ll'+n^2]-2Cln+D[l'k-nk']+E[lk'-nk]+$$
$$+2Fkk'=-n[2Al'-Bn+2Cl]+Bll'-2Fkk'+k[Dl'-En]-$$
$$-k'[Dn-El]+4Fkk'=-2Ln;$$

effectuant le calcul, et après avoir divisé tous les termes par le facteur commun L, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} m(y^2+x^2)^2-2(mb+k')y^3-2(ma+k)x^3-2y^2x(am+k)- \\ -2x^2y(bm+k')+y^2[mb^2+4bk'+2ka+l']+2xy[mab+kb+ \\ +k'a-n]+x^2[ma^2+4ak+2k'b+l]+2y[-k'b^2-kab- \\ -l'b+na]+2x[-ka^2-k'ab-la+nb]+b^2l'+a^2l- \\ \qquad -2nab=0. \end{array}\right\}(1)$$

Remplaçant x et y par $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$, on obtient l'équation de la courbe aplanétique cherchée.

Corollaire I. La ligne donnée par l'équation (1) est donc une ligne semblable à la courbe aplanétique, semblablement placée, de dimension moitié moindre ; et le pôle est le centre d'homologie.

Remarque. L'intersection de la courbe (1) avec la conique, donne les pieds des normales menées par le point (a, b) à la conique ; nous savons d'ailleurs que ces points sont déterminés par l'intersection de la conique avec une hyperbole équilatère (p. 17, t. II) ; qui est aussi le lieu géométrique de l'intersection de la perpendiculaire abaissée du point (a, b) sur une tangente, avec le diamètre passant par le point de contact. (Poncelet, *Propriétés projectives*, p. 288, § 492.)

Corollaire II. En prenant la ligne (1) pour ligne polaire, le pôle devient l'aplanétique conjuguée ; ainsi, la ligne doit passer par le pôle (lemme 6). En effet, l'équation est satisfaite en faisant $x=a$ et $y=b$; ce qu'on pouvait prévoir par les valeurs de x' et y', qui se réduisent par ces substitutions à $\frac{0}{0}$.

Corollaire III. Lorsque m n'est pas nul, les termes du quatrième degré ne peuvent s'anéantir ; donc pour l'ellipse et l'hyperbole l'aplanétique est toujours une courbe fermée.

Corollaire IV. Si le pôle se confond avec l'origine, alors l'équation (1) devient :

$$\left.\begin{array}{l} m(y^2+x^2)^2-2k'y^3-2kx^3-2ky^2x-2k'x^2y+l'y^2- \\ \quad -2nxy+lx^2=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Lorsque l'origine est un foyer, l'on a, comme on sait, $l=l'$; $n=0$; l'équation divisible par y^2+x^2 devient celle du cercle

$$m(y^2+x^2)-2k'y-2kx+l=0\,,$$

cercle concentrique à la conique et passant par les extrémités de l'axe focal. Dans la parabole, le cercle se change dans la droite, ayant pour équation $2k'y+2kx-l=0$, qui est la tangente au sommet.

Corollaire V. Passant aux coordonnées polaires, l'équation (2) donne, après avoir divisé par z^2 :

$$mz^2-2z(k'\sin\varphi+k\cos\varphi)+l'\sin^2\varphi-2n\sin\varphi\cos\varphi+l\cos^2\varphi=0\,;$$

d'où :

$$mz=k'\sin\varphi+k\cos\varphi\pm2\sqrt{\mathrm{L}(\mathrm{A}\cos^2\varphi-\mathrm{B}\sin\varphi\cos\varphi+\mathrm{C}\sin^2\varphi)}$$

(*Voir* les identités, t. I, p. 490).

1° *Ellipse.* La quantité sous le radical ne peut jamais devenir nulle et reste essentiellement positive. Donc z est toujours réelle : autrement une droite menée par l'origine coupe la courbe en deux points. Pour que z soit nulle, il faut que l'on ait $l'\sin^2\varphi\cos\varphi-2n\sin\omega\cos\varphi+l\cos^2\varphi=0$; ce qui donne :

$$\tang\varphi=\frac{n\pm2\sqrt{\mathrm{FL}}}{m}.$$

Lorsque l'origine est dans l'intérieur de la courbe, FL est négatif ; par conséquent, lorsque l'équation est débarrassée de z^2, la courbe ne passe point par l'origine ; mais lorsque l'origine est extérieure à la courbe, le produit FL étant positif

(t. II, p. 112), la courbe passe par l'origine, qui est alors un point multiple ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque alors on peut mener par l'origine deux tangentes à l'ellipse. Il est possible aussi de mener par la même origine deux, trois ou quatre normales (t. II, p. 22, 23). Ainsi, selon la position de l'origine, la ligne aplanétique touchera l'ellipse en deux, trois ou quatre points : il est évident qu'elle n'a aucun point dans l'intérieur de l'ellipse.

L'origine étant au centre, et rapportant l'ellipse à ses axes principaux, il vient :

$$mz = 2\sqrt{L(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)}.$$

2° Désignant le grand axe par a et le petit axe par b, on aura :

$$z^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

a est toujours un maximum ; et tant qu'on a $a^2 < 2b^2$, b est aussi un maximum ; la courbe aplanétique est comprise entre l'ellipse et les côtés du rectangle circonscrit à l'ellipse. Mais lorsque a^2 est supérieur à b^2, b devient un minimum, et il y a à l'extrémité du petit axe un point de rebroussement ; et lorsque $a^2 = 2b^2$, les extrémités du petit axe sont des centres de courbure (t. II, p. 79), et l'ellipse est la projection d'un cercle incliné de 45° sur le plan de l'ellipse ; et dans ce cas, b est encore un maximum. En général, pour que y devienne égal à b, il faut avoir $x = 0$ ou $x^2 = a^2 - 2b^2$.

L'aire de la courbe est égale au demi-cercle construit sur la corde du cadran elliptique.

$zd\varphi$ est l'élément d'un arc elliptique ; seconde espèce de transcendante elliptique.

2° *Hyperbole.* La quantité sous le radical peut devenir nulle et par conséquent devenir imaginaire ; on obtient ainsi pour tangφ deux limites :

$$\tang\varphi = \frac{B \pm \sqrt{m}}{2C}.$$

on peut supposer $B = 0$. On voit donc que les droites limites sont perpendiculaires aux asymptotes et se confondent avec elles, lorsque l'hyperbole est équilatère.

Lorsque l'origine est au centre, l'équation devient, après avoir divisé par z^2 :

$$z^2 = a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi\,;$$

ce centre est un point d'inflexion ; la courbe a la forme d'un huit de chiffre, plus connu sous le nom de *lemniscate*, mot dérivé du grec, où il signifie une rosette de ruban. Si $b > a$, la lemniscate est dans l'angle des asymptotes, qui sont sécantes. Si $b = a$, les asymptotes deviennent tangentes ; et pour $b < a$, la lemniscate coupe les asymptotes en deux points, outre l'origine qui est un point double (p. 142).

L'équation aux coordonnées rectangulaires est :

$$(y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2\,;$$

résolvant par rapport à x, on conclut facilement que la valeur maxima de y est $\frac{a^2}{2c}$, qui répond à l'abscisse

$$x^2 = \frac{a^2\,(a^2 + 2b^2)}{4(a^2 + b^2)}.$$

Si nous désignons, dans le cercle dont le rayon est un, par σ la longueur numérique de l'arc dont la tangente trigonométrique est $\frac{a}{b}$, l'aire totale de la lemniscate est :

$$\frac{1}{2}\,\sigma(a^2 - b^2) + \frac{1}{4}\,(a^2 + b^2)\sin 2\sigma.$$

Lorsque l'hyperbole est équilatère (lemniscate de Bernoulli), cette expression se réduit à :

$$\frac{1}{4}\,(a^2 + b^2).$$

$\frac{d\varphi}{z}$ est l'élément de la première espèce de transcendante elliptique.

Faisant $a^2 = b^2 = 2a'^2$, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$[y^2+(x-a')^2][y^2+(x+a')^2]=a'^4.$$

Donc la lemniscate de Bernoulli est aussi une Cassinoïde, ayant ses deux foyers sur l'axe transverse, à une distance du centre égale à $\dfrac{a}{\sqrt{12}}$.

10. On peut donner, dans certains cas particuliers, aux équations de la tangente et de la normale, des formes très-avantageuses, surtout pour résoudre promptement des problèmes aux examens.

Soit l'équation de l'ellipse, rapportée aux axes principaux,

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

On voit facilement qu'en prenant :

$$x=\frac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}};\qquad y=\frac{b^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}},$$

x et y sont les coordonnées d'un point de l'ellipse ; or, en ce point, on a :

$$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}\ (1),\ \text{équation de la tangente ;}$$
$$y=-\frac{1}{m}x-\frac{c^2}{\sqrt{m^2a^2+b^2}}\ (2),\quad \text{id.}\quad \text{de la normale ;}$$

ou $$c^2=a^2-b^2.$$

La forme (1) est une suite de l'équation (18) (t. II, p. 108), et on trouve la forme (2) en supposant $y=-\dfrac{1}{m}x+p$ (3) et déterminant p de manière que l'intersection des droites (1) et (3) soit sur l'ellipse.

Probl. I. Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur une tangente à l'ellipse.

Solution. La parallèle à la normale a pour équation :

$$y-y'=-\frac{1}{m}(x-x');$$

éliminant m entre cette équation et l'équation (1), il vient :

$$[y(y-y')+x(x-x')]^2 = a^2(x-x')^2 + b^2(y-y')^2,$$

èquation du lieu cherché.

Probl. II. Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point (x', y') sur la normale.

Solution. $$y-y' = m(x-x'),$$

équation de la parallèle à la tangente ; éliminant m entre cette équation et l'équation (2), il vient :

$$[y(y-y')+x(x-x')]^2[a^2(y-y')^2+b^2(x-x')^2] = c^4(x-x')^4,$$

équation du lieu cherché.

Parabole. Équation $y^2 = 2px$; axes rectangulaires.

$x' = \frac{p}{2m^2}$; $y' = \frac{p}{m}$, équations d'un point de la parabole ;

$y = mx + \frac{p}{2m}$, équation de la tangente ;

$y = -\frac{x}{m} + \frac{p}{m} + \frac{p}{2m^3}$, équation de la normale ;

$$2x(x-x')^2 + 2y(y-y')(x-x') + p(y-y')^2 = 0 ;$$

$$2(y-y')^3y + 2(y-y')^2x(x-x') = 2p(y-y')^2(x-x') + p(x-x')^3.$$

La première équation est celle de la projection du point quelconque (x', y') sur la tangente, et la seconde sur la normale.

Faisant $$x' = y' = 0,$$

la première équation devient :

$$2x^3 + 2y^2x + py^2 = 0,$$

équation de la cissoïde.

(*La suite prochainement.*)

Tm.