E. LIONNET

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 93-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__93_1>

QUESTION D'EXAMEN.

SOLUTION DE M. E. LIONNET,
Professeur de mathématiques au Collége royal de Louis-le-Grand.

Trouver le volume d'un segment sphérique à une base en fonction du rayon r *de la base du segment et de sa hauteur* h, *connaissant le volume de la sphère et sachant que la fonction demandée est entière par rapport aux quantités* r *et* h.

Soit ACB le demi-cercle générateur de la sphère, BD la hauteur du segment, CD le rayon de sa base et v son volume; on aura

$$(1) \qquad v = Ah^3 + Bh^2r + Chr^2 + Dr^3,$$

A, B, C, D désignant des nombres constants qu'il s'agit de déterminer.

La droite CD étant une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre AB, on a la proportion

$$AD:CD::CD:BD,$$

d'où l'on tire $AD = \frac{\overline{CD}^2}{BD} r^2 h^{-1}$; mais la ligne AD est la hauteur d'un autre segment de même base que le premier ; donc, pour exprimer le volume v' de ce segment en fonction de r et h, il suffit de remplacer h par r^2h^{-1} dans le second membre de l'égalité (1), ce qui donne

$$v' = Ah^{-3}r^6 + Bh^{-2}r^5 + Ch^{-1}r^4 + Dr^3.$$

Pour exprimer le volume V de la sphère en fonction des mêmes quantités r et h, nous observons qu'on a $V = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^3$ et $AB = BD + AD = h + r^2h^{-1}$, d'où l'on déduit

$$V = \frac{\pi}{6}(h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) ;$$

mais la sphère entière est égale à la somme des deux segments ; donc

$$\frac{\pi}{6}(h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) =$$
$$= Ah^3 + Bh^2r + Chr^2 + 2Dr^3 + Ch^{-1}r^4 + Bh^{-2}r^5 + Ah^{-3}r^6.$$

Cette égalité ayant lieu pour des valeurs de r aussi petites qu'on voudra, lorsqu'on attribue à h des valeurs comprises entre AB et $\frac{1}{2}$ AB, les coefficients des même puissances de r sont égaux dans les deux membres ; donc

$$A = \frac{\pi}{6}, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{\pi}{2}, \qquad D = 0,$$

et, par suite,

$$v = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$