NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROGUET

Démonstration de théorèmes sur les courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 304-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__304_0>

DÉMONSTRATION DE THÉORÈMES

sur les courbes du second degré,

PAR M. ROGUET,
professeur de mathématiques.

HEXAGONE DE PASCAL. *Lorsqu'on prolonge deux à deux les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une courbe du second degré, les trois points de concours sont en ligne droite.*

Soit $y-ax-b=0$ et $y-a'x-b'=0$ les équations des droites AB,DC (*fig.* 40), si l'on multiplie par ordre ces deux équations, on aura une équation du second degré

$$(1)\quad y^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

qui sera l'équation des deux droites AB et CD.

On aura une équation de la même forme

$$(2)\quad y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0$$

pour les droites AF,DE.

Soit (3) $y^2+B''xy+C''x^2+D''y+E''x+F''=0$ l'équation de la courbe

L'axe des y passant par les points A et D, on a

$$D=D'=D'' \text{ et } F=F'=F'';$$

en effet, si l'on suppose $x=0$ dans chacune des trois équations, on obtiendra trois équations en y

$$y^2+Dy+F=0,$$
$$y^2+D'y+F'=0,$$
$$y^2+D''y+F''=0,$$

qui auront toutes trois pour racines OD et OA.

Si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (3) et (1), on aura une équation qui sera satisfaite par les valeurs des coordonnées des points A, D, C et B, et qui sera

$$x[(B-B'')y+(C-C'')x+E-E'']=0;$$

elle se décompose en

$$x=0 \text{ et } (B-B'')y+(C-C'')x+E-E''=0. \qquad (4)$$

Cette dernière est l'équation de la droite CB, puisqu'elle est du premier degré et doit être satisfaite par les coordonnées des points C et B.

Soustrayant de même l'équation (3) de (2), on aura

$$x[(B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E'']=0,$$

qui se décompose en

$$x=0 \text{ et } (B'-B'')y+(C'-C'')x+E'-E''=0. \qquad (5)$$

Cette dernière est l'équation de FE.

Les valeurs des coordonnées du point de concours des droites CB et FE doivent donc satisfaire à l'équation :

$$(B-B')y+(C-C')x+E-E'=0, \qquad (6)$$

qu'on obtient en retranchant l'une de l'autre les équations (5) et (4). Mais si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (1) et (2), on obtient pour équation :

$$x[(B-B')y+(C-C')x+E-E']=0,$$

qui se décompose en $x=0$, et

$$(B-B')y+(C-C')x+E-E'=0.$$

Cette dernière doit être satisfaite par les valeurs des coordonnées du point de rencontre des droites AB et ED, et aussi par les valeurs des coordonnées du point de rencontre des droites AF et CD. Elle est donc l'équation de la droite qui joint ces deux points de rencontre. Or elle n'est autre que l'équation (6).

Par conséquent, les trois points de concours sont en ligne droite.

HEXAGONE DE BRIANCHON. *Les trois diagonales qui joignent les sommets des angles opposés d'un hexagone circonscrit à une courbe du second degré, se coupent au même point.*

Si du point A (*fig.* 41) on mène une sécante à la courbe, et que par les points de rencontre on mène des tangentes à la courbe, ces tangentes se couperont en un point de la corde des contacts des côtés AB, AF. Il en sera de même pour le point D. Par conséquent, si par les points de rencontre de AD avec la courbe on mène deux tangentes à la courbe, ces tangentes se couperont en un point situé à la fois sur la corde des contacts des tangentes AB, AF, et sur la corde des contacts des tangentes DC, DE; ce point sera donc le point de concours de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la courbe et formé en joignant, deux à deux, chaque point de contact au suivant. La diagonale BE sera pareillement dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées à la courbe par le point de concours de deux autres côtés opposés de l'hexagone inscrit. Enfin la diagonale CF sera dirigée suivant la corde des contacts de deux tangentes menées du point de concours des côtés formant le troisième couple de côtés opposés de l'hexagone inscrit. Les trois diagonales se confondent donc avec les cordes de contact des trois couples de tangentes menées de trois points situés en ligne droite. Or, on sait que si de différents points d'une droite on mène des tangentes à une courbe du second degré, les cordes de contact passent toutes par un même point; par conséquent, les diagonales de l'hexagone circonscrit doivent se couper au même point.