NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de MM. Sturm et Cauchy, déduits d'un seul principe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 3 (1844), p. 188-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__188_1>

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER, DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

M. l'abbé Moigno, savant disciple, lumineux interprète de M. Cauchy, dans un mémoire inséré au Journal de Liouville (*), établit, d'après l'illustre géomètre (**), un théorème fondamental d'où découlent tous ceux que nous venons de dénommer. Nous allons essayer d'approprier cet excellent travail à notre recueil.

1. *Définition I.* La racine d'un polynôme entier est une

(*) Tome V, page 75, 1840.
(**) Journal de l'École polytechnique, cahier XXV, page 176, 1837.

expression ou un nombre qui, substitués dans le polynôme, à la place de la variable, le rendent égal à zéro.

Définition II. Deux termes ou deux résultats consécutifs de même signe forment une permanence; $++$, $--$; deux termes ou deux résultats de signes différents forment une variation *ascendante*, lorsqu'on passe du négatif au positif, $-+$; et une variation descendante, en allant du positif au négatif, $+-$. Cette distinction entre les deux espèces de variations est de la plus haute importance et sert de base à tous les raisonnements qui vont suivre.

2. LEMME I. Dans une série quelconque de résultats, si on représente par A le nombre de variations ascendantes, par D le nombre de variations descendantes, on a

1°	lorsque les termes extr.	forment une perman.	$A-D=0$.
2°	*id.*	variat. ascend.	$A-D=+1$.
3°	*id.*	var. descend.	$A-D=-1$.

Démonstration. N'ayant égard qu'aux signes des résultats extrêmes, on ne peut avoir que l'un de ces quatre cas :

$$\begin{array}{c} + \cdots\cdots + \\ - \cdots\cdots - \\ - \cdots\cdots + \\ + \cdots\cdots - \end{array}$$

En quelque nombre et ordre qu'on insère des signes entre les extrêmes, on parvient évidemment à la conclusion énoncée dans le lemme.

Observation. Nous représenterons dans ce qui suit la différence $A-D$ par la lettre ε; de sorte que ε ne peut avoir qu'une de ces trois valeurs, 0, et ± 1.

LEMME II. Lorsque la substitution des valeurs réelles a et b dans un polynôme donnent des résultats, formant une variation, il y a au moins une racine du polynôme comprise entre a et b. La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

LEMME III. Si dans l'intervalle de a à b, le polynôme $\varphi_1(x)$ change m fois de signe, et le polynôme $\varphi(x)$, n fois; dans ce même intervalle, la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ passera *au moins* m fois par zéro et n fois par l'infini (*).

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Observation. La fonction peut passer par zéro et par l'infini, sans changer de signe, lorsqu'il existe des racines multiples en nombre pair.

3. PROBLÈME I. Étant donnée la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, trouver la valeur de ε (lemme II) dans l'intervalle de a à b.

Solution. On suppose $b > a$; et l'on fait croître x par degrés arbitraires depuis a jusqu'à b. C'est une observation que nous ne répéterons plus et qu'il faut toujours sous-entendre lorsqu'on dit qu'une fonction varie entre deux limites données.

Comparons les signes de $\frac{\varphi_1(a)}{\varphi(a)}$ et de $\frac{\varphi_1(b)}{\varphi(b)}$.

Si cette comparaison donne une	permanence, alors	$\varepsilon = 0$,	
Id.	variat. ascend.	$\varepsilon = +1$,	
Id.	variat. descend.	$\varepsilon = -1$.	

Cette solution est fondée sur le lemme I. Chez M. Cauchy, ε est l'*indice* de la fonction fractionnaire.

4. LEMME IV. Soient deux fonctions réciproques $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$; ε a la même valeur pour les deux fonctions : conséquence évidente de la solution précédente.

(*) On suppose que les deux termes ne deviennent pas nuls simultanément

5. Représentons par A_∞ le nombre de variations ascendantes que donne la* fonction $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi x}$, dans l'intervalle de a à b, en passant par l'infini, et par A_0 le nombre de ces variations, en passant par zéro, de sorte qu'on a $A = A_{(\infty)} + A_{(0)}$ et de même $D = D_{(\infty)} + D_{(0)}$; donc $A - D = (A_\infty - D_\infty) + (A_0 - D_0) = \varepsilon$; faisant $A_{(\infty)} - D_{(\infty)} = E_{(\infty)}$ (*) ; $A_{(0)} - D_{(0)} = E_{(0)}$, il vient $E_\infty + E_{(0)} = \varepsilon$.

On aura de même pour la fonction réciproque $\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$, $E'_{(\infty)} + E'_{(0)} = \varepsilon$; il est évident qu'on a $E'_{(\infty)} = E_{(0)}$ et $E'_{(0)} = E_{(\infty)}$.

Donc $E_{(\infty)} + E'_{(\infty)} = \varepsilon$; $E_{(0)} + E'_{(0)} = \varepsilon$, équations fondamentales. Nous verrons que l'on n'a besoin que de la première, et nous supprimerons l'indice ∞, mais qu'il faudra toujours sous-entendre ; ainsi la première équation peut s'écrire

$$E + E' = \varepsilon. \tag{1}$$

La quantité E est désignée sous le nom d'*excès* ; et nous appellerons ε l'*excès total*. L'équation (1) peut s'énoncer ainsi : L'*excès total* d'une fonction fractionnaire est égal à l'*excès* de cette fonction, plus l'*excès* de la fonction réciproque et sous-entendu relativement aux limites a et b.

6. De l'équation (1) on tire $E = -E' + \varepsilon$; E se rapporte à $\frac{\varphi_1 x}{\varphi x}$ et E' à $\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$; mais si l'on désigne par E'' l'excès relatif à $-\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$, on a évidemment $E'' = -E'$ et $E = E'' + \varepsilon$; ou bien

$$E = E' + \varepsilon ; \tag{2}$$

E' correspond maintenant à $-\frac{\varphi x}{\varphi_1 x}$.

7. **Lemme V.** Si, dans la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1 x}{\varphi(x)}$, le degré du dénominateur $\varphi(x)$ étant inférieur au degré du numé-

* E_∞ est l'*indice intégral* de M. Cauchy.

rateur, on effectue, autant que possible, la division ; l'*excès* relatif au reste divisé par le dénominateur est égal à l'*excès* de la fonction fractionnaire.

Démonstration. Soit Q le quotient et R le reste ; on a l'identité $\frac{\varphi_1 x}{\varphi(x)} = Q + \frac{R}{\varphi(x)}$. Les deux fractions deviennent toujours infinies ensemble ; et pour des valeurs voisines de celles qui les rendent infinies, ces deux fractions étant très-considérables sont supérieures à la valeur finie du quotient entier Q, et par conséquent sont de même signe et produisent par conséquent des variations de même espèce.

8. Problème II. Trouver la valeur de E pour la fonction fractionnaire $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, correspondante aux limites a et b.

Solution. Supposons le numérateur d'un degré inférieur, et faisons sur ces deux fonctions les opérations du plus grand commun diviseur. Appelons Q, Q_1, Q_2, ... Q_m .... Q_{n-1} les quotients ; $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ .... $\varphi_m(x)$ .... $\varphi_n(x)$ les restes successifs pris en signe contraire ; $\varphi_n(x)$ est le dernier diviseur qui donne le quotient $Q_{(n-1)}$ sans reste. On a donc les identités

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = Q - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}; \; \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = Q_1 - \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}; \ldots \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_{m+1}x} = Q_m - \frac{\varphi_{m+2}(x)}{\varphi_{m+1}(x)};$$

$$\frac{\varphi_{n-2}(x)}{\varphi_{n-1}x} = Q_{n-2} - \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}; \; \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} = Q_{n-1}.$$

Disposant ces fractions avec les excès y relatifs,

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi x}, \; E, \; \varepsilon; \; \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1 x}, \; E_1, \; \varepsilon_1; \; \frac{\varphi_3 x}{\varphi_2(x)}, \; E_2, \; \varepsilon_2; \ldots \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{(n-1)} x}, \; E_{n-1}, \; \varepsilon_{n-1};$$

$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)}$, E_n, ε_n ; nous avons donc (6)

$$\begin{aligned} E &= E_1 + \varepsilon, \\ E_1 &= E_2 + \varepsilon_1, \\ &\vdots \\ E_{n-2} &= E_{n-1} + \varepsilon_{n-2}, \\ E_{n-1} &= -E_n + \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Or, on sait, par la théorie du plus grand commun diviseur, que la dernière fraction est ou un nombre ou un polynôme entier; dans aucun de ces cas, cette fraction ne peut passer par l'infini. Donc $E_n = 0$; ajoutant donc toutes ces équations, il vient

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . \varepsilon_{n-1},$$

mais par le problème (1) on sait trouver les valeurs de $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$: on connaît donc la valeur de E.

Pour faciliter ce calcul, examinons comment on parvient à la valeur de $\varepsilon_{(p)}$. Il faut, à cet effet, comparer les signes des fractions $\frac{\varphi_{p+1}(a)}{\varphi_p(a)}$, $\frac{\varphi_{p+1}(b)}{\varphi_p(b)}$; écrivons donc sur deux lignes les suites

$$\varphi(a),\ \varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \ldots\ \varphi_p(a),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n(a)\,; \qquad (1)$$
$$\varphi(b),\ \varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \ldots\ \varphi_p(b),\ \ldots\ \varphi_{n-1}(b),\ \varphi_n(b). \qquad (2)$$

Quand à une permanence, ou à une variation dans la suite (1) correspond respectivement une permanence ou une variation dans la suite (2), le ε correspondant est nul; mais quand à une permanence de la suite (1) répond une variation dans la suite (2), le ε correspondant est $+1$; et dans le cas inverse, la valeur de ε est -1. Soit V le nombre des variations et P le nombre des permanences de la suite (1); supposons qu'à v variations de cette suite répondent autant de variations de la suite (2), et aux v' restant répondent des permanences, de sorte que $V = v + v'$. Partageons de même P en deux parts p permanences auxquelles répondent autant de permanences dans la suite (2), et p' permanences auxquelles correspondent des variations; ainsi $E = v' - p'$. Soit V' le nombre total des variations de la suite inférieure, on a donc $V' = v + p'$; donc $V - V' = v' - p' = E$. Ainsi E est égal au nombre total des variations de la suite (1), moins le nombre total des variations de la suite (2).

Observation. 1° Dans l'opération du plus grand commun diviseur, on peut éviter les quotients numériques fractionnaires en multipliant les dividendes par des nombres convenables.

2° Dès qu'on sera arrivé à un reste $\varphi_p(x)$, qui ne peut devenir nul pour aucune valeur comprise entre a et b, on peut arrêter l'opération. En effet, alors, la fraction $\frac{\varphi_{p+1}(x)}{\varphi_p(x)}$ ne peut devenir infinie ; donc $E_p = 0$.... et $E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \ldots. \varepsilon_{p-1}$.

3° Si une des fonctions $\varphi_p(a)$, par exemple, est nulle, comme on a $\varphi_{p-1}(a) = Q_{(m-1)} \varphi_p(a) - \varphi_{(p+1)}(a)$, les deux fractions voisines $\varphi_{p-1}(a)$ et $\varphi_{p+1}(a)$ sont donc de signes contraires, et donnent une variation, à moins que l'une d'elles ne soit aussi nulle ; excluons d'abord ce cas-là. Donc, un instant avant que $\varphi(p)$ s'évanouisse, $\varphi_{p-1}(a)$ et $\varphi_{(p+1)}(a)$ conservant leurs signes, formaient aussi une variation, et quel que fût alors le signe $\varphi_p(a)$, il n'y avait toujours qu'une variation : car, quelque signe qu'on introduise entre une variation, il n'y a jamais qu'une variation, donc l'évanouissement d'une fonction n'influe pas sur le nombre des variations. Venons au cas où deux fonctions consécutives s'évanouissent ; alors d'après les relations d'identité entre les fonctions, toutes s'évanouissent, et aussi la première $\varphi(a)$. Si l'on admet donc que $\varphi(a)$ n'est pas nul, jamais deux fractions consécutives ne s'évanouiront à la fois.

(*La suite prochainement.*)