NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Solution d'un problème de statique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 386-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__386_1>

SOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE.

Une droite AD (fig. 79), *uniformément pesante et d'une longueur déterminée, repose par une de ses extrémités* A, *sur la surface intérieure d'un segment sphérique donné, et dont* *la flèche est supposée verticale. Un second point de la droite* AD *doit être placé en un point déterminé* B, *de la circonférence de base du segment : on propose de trouver la position d'équilibre de la droite.*

1. Supposons l'équilibre établi, il faudra, que le poids P, de la droite AD puisse se décomposer en deux forces : l'une normale à la surface de la sphère au point A, et l'autre perpendiculaire à la direction de la droite AD au point B. La première sera dirigée suivant le diamètre GCA de la sphère, et la seconde agira dans la direction de la droite GB. La verticale HP menée par le milieu, H, de AD, passera par le point G et sera située dans le plan AGB, puisque cette droite HP représente la direction du poids de AD. Cela prouve déjà que la droite AD doit être placée dans le plan vertical conduit par le rayon CB. Actuellement menons par le centre C de la sphère, le diamètre vertical FCO qui rencontre, au point E, la droite AD. Nous aurons $AE = EH$, puisque $AC = CG$. Mais $AH = \frac{AD}{2}$; donc $AE = \frac{AD}{4}$. On trouvera donc la position d'équilibre cherchée, en menant par le point donné B de la circonférence ABF, une droite BEA telle que la partie EA de cette droite comprise entre la circonférence et le diamètre vertical OF, ait une longueur donnée δ, égale au quart de AD.

Cela posé, je mène par le point B la droite NBL qui forme avec la tangente horizontale OX, un angle ONB égale à l'angle AOE, et je prolonge cette droite NB, jusqu'à la rencontre du diamètre vertical OF au point L. Les triangles rectangles LON, FAO sont semblables, et de plus la droite OB fait avec les côtés ON, OL, des angles égaux à ceux que la droite AE forme avec les côtés AO, AF ; on a donc

$$OB : AE :: NL : OF. \quad \text{d'où} \quad NL = \frac{OB \times OF}{AE}.$$

La longueur de NL se trouve ainsi déterminée, et par-conséquent la question proposée revient à celle-ci : *inscrire dans un angle droit* YOX, *une droite* LN *d'une longueur donnée, et dont la direction passe par un point donné* B.

Cette dernière question a déjà été traitée ; (t. I, p. 265), nous indiquerons ici une autre solution dont la discussion est facile.

2. Je prends pour axes les côtés de l'angle droit OX, OY ; et pour inconnues les coordonnées x, y du milieu M de la droite NL. Je nommerai r le rayon de la sphère ; d la corde OB ; $2m$ la droite LN ; et enfin α, β, les coordonnées du point B. D'après cette notation, on a

$$2m = \frac{d \times 2r}{\delta} \quad \text{ou} \quad m = \frac{dr}{\delta}. \quad \text{Et} \quad \alpha^2 + \beta^2 = d^2.$$

La distance OM étant égale à la moitié de LN, le point M appartient à une circonférence décrite du point O comme centre avec m pour rayon. On a donc $x^2 + y^2 = m^2 \ldots$ (1). De plus $\frac{\beta}{\mathrm{OL}} + \frac{\alpha}{\mathrm{ON}} = 1$; mais $\mathrm{OL} = 2y$, $\mathrm{ON} = 2x$, par conséquent

$$2xy - \beta x - \alpha y = 0, \ldots \qquad (2)$$

L'équation (2) représente une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de OB, et qui a pour asymptotes des parallèles aux axes OX, OY. Une des branches de cette hyperbole passe par le point B, et l'autre branche par le point O. La circonférence $x^2 + y^2 = m^2$, décrite de l'origine des coordonnées comme centre, et avec m pour rayon, coupera toujours en deux points la branche à laquelle l'origine appartient. Si l'on joint ces deux points d'intersection au point B, il en résultera deux droites dont les parties comprises dans les angles YOX′, XOY′, adjacents à l'angle YOX, seront chacune égales à la droite donnée $2m$. Quant aux intersections de la circonférence et de la branche d'hyperbole, qui passe par le point B, il y a trois cas à distinguer. Ces deux courbes peuvent se couper en deux points ; elles peuvent être tangentes ou extérieures l'une à l'autre. Dans le premier on obtiendra, en joignant le point B aux deux points d'intersection, deux droites qui, terminées à la rencontre des axes OX, OY, seront chacune égales à $2m$. Dans le second cas, les deux droites se réduisent à une seule, et cette ligne est un *minimum*, car la distance OM, moitié de LN, est alors la plus courte distance de l'origine à la branche d'hyperbole qui passe par le point B. Enfin, si les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre, on ne pourra mener par le point B, et dans l'angle YOX, aucune droite égale à $2m$; cette impossibilité dépend de ce que la longueur donnée, $2m$, est alors moindre que le *minimum* de toutes les droites inscrites dans l'angle YOX, et passant par le point donné.

On conçoit d'après cela que le problème doit conduire à une équation du quatrième degré ayant toujours deux racines réelles, et dont les deux autres racines peuvent être réelles et inégales ; réelles et égales, ou imaginaires. Le calcul déterminera les relations qui existent entre les *données*, dans ces différentes conditions.

L'équation $y^2 + x^2 = m^2$, donne $\dfrac{y}{m-x} = \dfrac{m+x}{y}$. Soit $\dfrac{y}{m-x} = z$, il en résulte $\dfrac{m+x}{y} = z$, et par suite $y = \dfrac{2mz}{z^2+1}$, $x = \dfrac{m(z^2-1)}{z^2+1}$. Reportant ces valeurs de y, x, dans $2yx - 6x - \alpha y = 0$, on trouve

$$z^4 + \frac{2(\alpha - 2m)}{6} z^3 + \frac{2(\alpha + 2m)}{6} z - 1 = 0.$$

Ou bien en posant $\dfrac{2(\alpha - 2m)}{6} = \mathrm{A}$, $\dfrac{2(\alpha + 2m)}{6} = \mathrm{B}$:

On a $$z^4 + \mathrm{A}z^3 + \mathrm{B}z - 1 = 0 \ldots \qquad (3)$$

L'équation (3) aura ses quatre racines réelles et inégales lorsque $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$ (*Voy.* pages 18 et 22, t. II). Deux de ces racines deviennent égales, si $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = 0$. Et cette équation a deux racines imaginaires, quand $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 > 0$.

Mais $\frac{A+B}{4} = \frac{\alpha}{6}$, et $\left(\frac{A-B}{4}\right) = -\frac{2m}{6}$; donc, lorsqu'on aura $\left(\frac{\alpha}{6}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2m}{6}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$, ou bien $\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} < (2m)^{\frac{2}{3}}$, la circonférence $x^2 + y^2 = m^2$, coupera l'hyperbole $2xy - 6x - \alpha y = 0$, en quatre points.

Si $\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} = (2m)^{\frac{2}{3}}$, la circonférence devient tangente à la branche d'hyperbole qui contient le point donné B. Et enfin, elle est extérieure à cette branche, quand

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} > (2m)^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi le *minimum* de la longueur $2m$ de la droite NBL, inscrite dans l'angle YOX, est déterminé par l'égalité

$$(2m)^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}. \text{ D'où } 2m = \sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

La relation $2m = 2r \times \frac{d}{\delta}$ (page 388), donne $\delta = 2r \times \frac{d}{2m}$. Ainsi le maximum de la longueur δ de la droite EA (*fig.* 70), est $\delta = 2r \times \frac{d}{\sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}} = 2r.\sqrt{\frac{\alpha^2 + 6^2}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}}$. D'où nous conclurons que l'équilibre de la droite AD est impossible, lorsque la longueur de cette droite est plus grande que

$$8r\sqrt{\frac{\alpha^2 + 6^2}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}}.$$

Pour obtenir le milieu M de la droite NL dans le cas particulier où cette droite doit être un *minimum*, il suffit de mener par le point O qui appartient à une branche de l'hyperbole équilatère, une normale OM à l'autre branche. A cet effet, décrivez une circonférence dont le diamètre soit la moitié OR de OB (fig. 80), cette circonférence coupera la branche d'hyperbole qui passe au point O, en un second point I. Menez la droite IR dont le prolongement rencontre en M la seconde branche de l'hyperbole; puis joignez le point O au point M: la droite OM sera normale, en M à l'hyperbole, comme il est facile de s'en assurer. La droite BM, prolongée jusqu'à la rencontre des axes OX, OY, sera le *minimum* $\sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}\right)^3}$. Et si l'on mène par le point B la droite BAE (fig. 79), de manière que l'angle AEO=OBN, le quadruple de EA sera la plus grande valeur de la droite AD pour que l'équilibre proposé soit possible.

Au reste, dans ce cas particulier les racines de l'équation $z^4+Az^3+Bz-1=0$, s'obtiennent au moyen d'un calcul assez simple, parce que la relation $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0$ ayant lieu, deux de ces racines sont égales entre elles. La valeur de ces racines égales est

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ (*)}.$$

On en déduit les expressions des deux autres racines en fonction des coefficients de l'équation.

3. Lorsque le point B est sur la bissectrice de l'angle YOX, on a $\alpha=6$. L'équation $2xy-6x-\alpha y=0$, devient $2xy=6(x+y)$. Ajoutant membre à membre les équations $y^2+x^2=m^2$, $2xy=6(x+y)$, on obtient

(*) On peut aussi exprimer ces racines egales, en fonction rationnelle des coefficients de l'équation.

$(y+x)^2 = m^2 + \beta(x+y)$; ou $y+x=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+m^2} \ldots (4)$.

On trouvera donc toutes les positions que le point M peut avoir, en construisant les points d'intersections de la circonférence $y^2+x^2=m^2$, et des deux droites parallèles que l'équation (4) représente. G.