NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Normales aux courbes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 16-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__16_1>

NORMALES AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

Lorsque, par un point donné sur le plan d'une ellipse, il faut mener une normale à la courbe, on parvient, en général, à une équation du quatrième degré. Dans certaines situations du point, il y a, effectivement, *quatre* normales. Pour d'autres positions, le nombre des normales est seulement *trois*; et enfin, ce nombre peut encore se réduire à *deux*. L'examen de ces différents cas est l'objet de cet article. La solution que nous allons donner avec quelques développements, a été indiquée par *Legendre*, dans sa théorie des *fonctions elliptiques* (tome I, page 348).

Nous supposerons l'ellipse rapportée à ses axes $2a$, $2b$. L'excentricité sera $2c$.

1. Soient α, β, les coordonnées du point par lequel il faut mener la normale; et, x, y, les coordonnées du point de rencontre de la normale et de l'ellipse. Les valeurs des inconnues x, y, devront satisfaire à la fois aux deux équations : $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$. Cette dernière équation deviendra, en posant

$$\frac{a\alpha}{c^2}=f,\ \frac{b\beta}{c^2}=h:$$

$$xy+bhx-afy=0.$$

L'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ donne $\dfrac{ay}{b(a+x)}=\dfrac{b(a-x)}{ay}$. Et si l'on désigne par z la valeur inconnue de la fraction $\dfrac{ay}{b(a+x)}$, il en résultera $\dfrac{ay}{b(a+x)}=z$, $\dfrac{b(a-x)}{ay}=z$; d'où $ay-bzx=abz$, $azy+bx=ab$; et par suite ·

$$y=\frac{2bz}{1+z^2},\quad x=\frac{a(1-z^2)}{1+z^2}.$$

Ces expressions de y et x en fonction de z, montrent que toute valeur réelle de z donne à chacune des coordonnées y, x, une valeur réelle; et de plus, quelle que soit la valeur de z, celle de y ne surpassera jamais b, et de même x ne peut devenir plus grand que a.

Actuellement, remplaçons y et x par $\dfrac{2bz}{1+z^2}$, $\dfrac{a(1-z^2)}{1+z^2}$, dans $xy+bhx-afy=0$, en ayant soin de supprimer le facteur ab commun à tous les termes de l'équation résultante, nous aurons :

$$\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}+\frac{h(1-z^2)-2fz}{1+z^2}=0,$$

ou

$$2z(1-z^2)+h(1-z^4)-2fz(1+z^2)=0.$$

Développant et divisant par h, que nous supposons différent de zéro, il viendra

$$z^4+\frac{2(f+1)}{h}z^3+\frac{2(f-1)}{h}z-1=0.$$

Ou bien, en posant

$$\frac{2(f+1)}{h}=\text{A},\ \frac{2(f-1)}{h}=\text{B}:$$

$$z^4+\text{A}z^3+\text{B}z-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

L'équation (1) a deux racines réelles de signes contraires, puisque le dernier terme est négatif. Ainsi, on pourra mener au moins deux normales à l'ellipse par le point donné.

Lorsque l'équation (1) aura ses quatre racines réelles et inégales, il sera possible de mener *quatre* normales à la courbe. Si deux de ces racines réelles ont la même valeur, le nombre des normales se réduira à *trois*; et enfin, il y aura seulement *deux* normales, si l'équation proposée a deux racines imaginaires.

Pour distinguer les positions du point donné, dans ces différentes hypothèses, nous allons d'abord chercher les conditions qui doivent être remplies par les coefficients A, B, pour que les quatre racines de l'équation $z^4+\text{A}z^3+\text{B}z-1=0$, soient réelles et inégales.

2. Je nommerai m, n, p, q, les racines de l'équation $z^4+\text{A}z^3+\text{B}z-1=0$. Les quantités m, n, p, q, seront liées entre elles par les égalités

$$m+n+p+q=-\text{A} \ldots\ldots (2).$$

$$(mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0 \ldots (3).$$

$$mnp+mnq+mpq+npq=-\text{B}. \ . (4).$$

$$mnpq=-1 \ldots\ldots\ldots (5).$$

Au moyen de ces relations il sera facile de déterminer les coefficients de l'équation du troisième degré, dont les racines sont les sommes $(mn+pq)$, $(mp+nq)$, $(mq+np)$. Cette équation aura la forme $t^3+A't+B'=0$, puisque la somme de ses trois racines est nulle. De plus, on voit que le coefficient A', qui se compose de la somme des produits deux à deux des binômes $(mn+pq)$, $(mp+nq)$, $(mq+np)$, est une fonction symétrique des quantités m, n, p, q, dont un terme est m^2np. C'est ce que nous écrirons ainsi : $A'=\Sigma.m^2np$. Or, la multiplication des égalités (2), (4), l'une par l'autre, donne

$$4mnpq+\Sigma.m^2np=AB.$$

On a donc :

$$4mnpq+A'=AB. \text{ D'où } A'=AB+4, \text{ car } mnpq=-1.$$

Le coefficient, $-B'$, est égal au produit des trois binômes

$$(mn+pq),\ (mp+nq),\ (mq+np).$$

Ce produit a pour expression $mnpq\Sigma m^2+\Sigma m^2n^2p^2$, en désignant par Σm^2, $\Sigma m^2n^2p^2$, les sommes $(m^2+n^2+p^2+q^2)$,

$$(\overline{mnp}^2+\overline{mnq}^2+\overline{mpq}^2+\overline{npq}^2).$$

Ainsi, on trouve d'abord : $B'=\Sigma m^2-\Sigma m^2n^2p^2$, puisque $mnpq=-1$. Mais, les égalités (2), (4), élevées chacune au carré, donnent, en ayant égard à l'égalité (3) : $\Sigma m^2=A^2$, $\Sigma m^2n^2p^2=B^2$. Donc, $B'=A^2-B^2$. Et par conséquent, l'équation cherchée est :

$$t^3+(AB+4)t+A^2-B^2=0 \ldots\ldots (6).$$

Lorsque les racines t', t'', t''', de cette dernière équation seront réelles, il en sera de même des quatre racines m,n,p,q, de l'équation proposée

$$z^4+Az^3+Bz-1=0 \ldots\ldots (1).$$

En effet les racines de ces deux équations sont liées entre elles par les relations $mn+pq=t'$, $mp+nq=t''$, $mq+np=t'''$. On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}(m-q)(n-p)=t'-t'' \\ (m-p)(n-q)=t'-t''' \\ (m-n)(p-q)=t''-t'''\end{array}\right\}\ldots.(7).$$

Supposons, maintenant, que m, q, soient les deux racines réelles et de signes contraires de l'équation (1). La différence $(n-p)$ des deux autres racines, aura une valeur réelle $\frac{t'-t''}{m-q}$.
Il est alors impossible que n et p soient des imaginaires conjuguées. Donc, les racines n et p seront des quantités réelles.

Si deux des racines, t', t'', t''', sont égales, l'équation (1) aura de même deux racines égales entre elles. Et réciproquement. C'est ce qui résulte évidemment des relations (7).

Et de là nous conclurons que l'équation $z^4+Az^3+Bz-1=0$, a ses quatre racines réelles et inégales, lorsque les coefficients A, B, satisferont à l'inégalité :

$$4\overline{(AB+4)}^3+27.\overline{(A^2-B^2)}^2<0.$$

Deux de ces racines deviendront égales, si

$$4\overline{(AB+4)}^3+27\overline{(A^2-B^2)}^2=0.$$

Deux des quatre racines seront imaginaires, lorsqu'on aura

$$4\overline{(AB+4)}^3+27\overline{(A^2-B^2)}^2>0.$$

3. L'inégalité $4\overline{(AB+4)}^3+27\overline{(A^2-B^2)}^2<0$, peut être transformée en une autre $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0$, dont l'interprétation géométrique, dans la question qui nous occupe, est plus simple.

Pour faire cette transformation, posons

$$\overline{\left(\frac{A+B}{4}\right)}^2=r^3,\ \overline{\left(\frac{A-B}{4}\right)}^2=s^3;$$

les quantités r, s, seront positives. Nous aurons

$$(A^2-B^2)^2=16^2.r^3.s^3. \quad \text{Et} \quad AB=4(r^3-s^3).$$

Par suite :

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2=4^4.(r^3-s^3+1)^3+27.\,16^2.r^3s^3.$$

L'inégalité à transformer deviendra : $(r^3-s^3+1)^3+27.r^3s^3<0$. On en déduit immédiatement :

$$r^3-s^3+1+3rs<0.$$

Ou bien, parce que

$$r^3-s^3=(r-s)^3+3rs(r-s),$$

on aura : $$(r-s)^3+1+3rs(r-s+1)<0.$$

Mais, la somme $(r-s)^3+1$, des deux cubes $(r-s)^3, 1^3$, divisée par la somme, $r-s+1$, des premières puissances, donne, comme on sait, le quotient $(r-s)^2-(r-s)+1$, qui est toujours positif, quelles que soient les valeurs réelles de r et s. D'ailleurs, le facteur $3rs$, du produit $3rs(r-s+1)$ est positif, car les quantités r et s sont positives. Donc, la dernière inégalité obtenue revient à :

$$(r-s+1)[(r-s)^2-(r-s)+1+3rs]<0,$$

et se réduit à la suivante :

$r-s+1<0$, puisque le facteur $(r-s)^2-(r-s)+1+3rs$ est la somme de deux quantités positives.

Remplaçons r et s par leurs valeurs $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ et $\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, dans $r-s+1<0$. Il en résultera :

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0.$$

Lorsque les coefficients A, B, satisferont à cette inégalité, l'équation $z^4+Az^3+Bz-1=0$ aura ses quatre racines réelles et inégales. Elle aura deux de ses racines égales si

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0.$$

Deux des racines seront imaginaires, lorsqu'on aura

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1>0.$$

4. Pour interpréter géométriquement ces différentes conditions, il suffira de substituer aux quantités

$$\left(\frac{A-B}{4}\right),\left(\frac{A+B}{4}\right),$$

les fonctions de coordonnées qu'elles représentent. On a, (n° 1) :

$$A=\frac{2(f+1)}{h},\ B=\frac{2(f-1)}{h};\ \text{d'où}\ \frac{A-B}{4}=\frac{1}{h},\ \text{et}\ \frac{A+B}{4}=\frac{f}{h}.$$

Mais, $h=\frac{b\beta}{c^2}$, $f=\frac{a\alpha}{c^2}$. Donc, $\left(\frac{A-B}{4}\right)=\frac{c^2}{b\beta}$, et $\left(\frac{A+B}{4}\right)=\frac{a\alpha}{b\beta}$.

Par la substitution de ces valeurs, l'inégalité

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0,$$

deviendra, $$\overline{\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)}^{\frac{2}{3}}-\overline{\left(\frac{c^2}{b\beta}\right)}^{\frac{2}{3}}+1<0;$$

ou, $$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}<0.$$

Cette dernière inégalité exprime, en fonction des coordonnées α, β, du point que l'on donne, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de mener par ce point, quatre normales à l'ellipse.

Si les coordonnées α, β, satisfont à l'équation

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+,(b\beta)^{\frac{1}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}=0;$$

deux des quatre normales se réduisent à une seule; c'est-à-dire que par le point donné on pourra, seulement, conduire trois normales à la courbe.

Enfin, le nombre des normales demandées se réduit à *deux*, lorsque les coordonnées α, β, donnent,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}>0.$$

D'après cela, on voit que l'équation $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}=0$, entre les coordonnées variables α, β, représente le lieu géométrique des points par lesquels on peut conduire trois normales à l'ellipse. On sait d'ailleurs que l'équation dont il s'agit est précisément celle de la *développée* de l'ellipse.

Tous les points situés dans l'intérieur de la surface que la développée termine ont des coordonnées satisfaisant à l'inégalité $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}<0$. Tous les points extérieurs à cette surface donnent lieu à l'inégalité contraire. Par conséquent, de chacun des premiers, on pourra conduire quatre normales à l'ellipse; et par chacun des autres, seulement deux normales.

G.

(*La suite prochainement.*)