Nouvelles annales de mathématiques

Thibault

Note sur quelques théorèmes relatifs aux polyèdres et spécialement sur l'égalité de ceux qui ont leurs faces respectivement égales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 163-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__163_0>

NOTE

Sur quelques théorèmes relatifs aux polyèdres et spécialement sur l'égalité de ceux qui ont leurs faces respectivement égales.

PAR M. THIBAULT,

Professeur à Paris, licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

Les beaux théorèmes démontrés par M. *Cauchy* sur l'égalité ou la similitude des polyèdres de faces respectivement égales ou semblables, ont comblé une lacune importante dans la géométrie des corps solides. (Journal de l'École polytechnique, 16e cahier, et Géométrie de Legendre, note XII.)

Si ces théorèmes n'ont pas encore pris dans l'enseignement la place qu'ils réclament, la raison sans doute en est surtout dans l'extrême longueur des démonstrations qui par là même en deviennent plus compliquées. On a cherché, dans cet article, à présenter les démonstrations de ces théorèmes d'une manière plus concise, en leur donnant aussi la plus grande clarté possible. En outre, on les a rendues indépendantes de la considération des polygones sphériques sur laquelle l'illustre géomètre les a basées ; par là, ces théorèmes peuvent précéder tout ce qui est relatif à la sphère et se trouvent ramenés sans intermédiaire à leur place naturelle dans la théorie des polyèdres.

1. THEOREME. *Si, dans un angle trièdre* SABC (fig. 24), *deux faces* ASB, ASC *demeurant constantes, on augmente l'angle dièdre compris* SA, *la face opposée* BSC *augmente aussi. De même pour la diminution.*

Ayant pris sur les arêtes les longueurs égales SA, SB, SC.

joignons les trois points A, B, C. Ensuite, par un point D pris sur SA menons dans les deux faces adjacentes les droites DE, DF perpendiculaires à SA, jusqu'à la rencontre de AB, AC; l'augmentation ou la diminution du dièdre SA n'altère pas les triangles ASB, ASC, ni par conséquent les droites DE, DF, AE, AF; or, l'angle EDF augmente ou diminue en même temps que le dièdre SA dont il est la mesure; il en est de même pour EF côté opposé à cet angle dans le triangle DEF, par conséquent aussi pour BAC angle opposé à EF dans le triangle AEF, pour BC côté opposé à ce dernier angle dans le triangle BAC, et enfin pour BSC angle opposé à BC dans le triangle BSC.

2. Théorème. *Si, dans un angle solide convexe, dont toutes les faces excepté une* ASB (fig. 25) *demeurent constantes, on augmente un ou plusieurs des dièdres* SC, SD...... SN *non adjacents à cette face, sans diminuer d'ailleurs aucun d'eux, cette face augmentera. De même pour la diminution.*

Supposons d'abord qu'un seul de ces dièdres, SI par exemple, ait été augmenté, les autres étant alors demeurés constants. Menons les plans ASI, BSI; les angles solides SBC...I, SIK..... A demeurant constants (*), l'augmentation du dièdre SI n'a pu avoir lieu sans une augmentation égale de la partie de ce dièdre qui appartient à l'angle trièdre SABI. Comme d'ailleurs les faces ASI, BSI n'ont pas changé, la face ASB a augmenté (n° 1).

S'il y avait eu augmentation à la fois de plusieurs dièdres non adjacents à la face ASB, on aurait pu passer du premier au dernier état de l'angle solide en augmentant isolément ces dièdres l'un après l'autre successivement, ce qui aurait donné lieu à des accroissements successifs de cette face.

(*) Car il est facile de prouver par la superposition que deux angles solides sont égaux quand il y a respectivement égalité entre toutes leurs faces excepté une, et entre tous les dièdres compris.

De même pour la diminution d'un ou plusieurs dièdres.

COROLL. 1er. *Si toutes les faces sans exception étant demeurées constantes, il n'en a pas été de même de tous les angles dièdres; soit* ASB *une face à laquelle un des dièdres qui ont changé n'est pas adjacent, il y a eu nécessairement un changement contraire pour l'un au moins des autres dièdres non adjacents à cette face.*

COROLL. 2e. *Une face ne peut augmenter, les autres demeurant constantes, sans qu'il y ait augmentation de l'un au moins des dièdres non adjacents à cette face.* Car c'est la seule hypothèse compatible avec l'augmentation de celle-ci. *De même pour la diminution.*

3. THEORÈME *Si, dans un angle solide convexe* (fig. 25), *un certain nombre de dièdres ont éprouvé des changements, toutes les faces demeurant constantes et l'angle solide demeurant convexe; qu'on mette le signe + sur l'arête de chaque dièdre augmenté, et le signe — sur l'arête de chaque dièdre diminué; en faisant le tour entier de l'angle solide on trouvera toujours au moins 4 variations de signes.*

Parmi les dièdres qui ont changé, les uns ont augmenté, les autres diminué (2. coroll. 1). Faisons de gauche à droite le tour de l'angle solide en partant d'un dièdre diminué, ou *affecté de* —, et soit SC le premier dièdre augmenté, ou *affecté de* +, que l'on rencontre (1re *variation de signes*); ce dièdre n'étant pas adjacent à la face ASB que forment les deux arêtes précédentes, il y a eu diminution de l'un au moins des autres dièdres non adjacents à cette face (2. coroll. 1). Soit SI le premier de ces angles diminué, ou *affecté de* —, que l'on rencontrera (2e *var.*); menons le plan BSI qui partage l'angle solide en deux autres dont il forme une face commune. Dans le premier de ces deux angles SBC.... I, dont toutes les autres faces sont constantes, il y a eu augmentation au moins du dièdre SC, parmi ceux non adjacents à la face BSI, aucun de ces dièdres n'ayant d'ailleurs diminué; la face BSI a donc augmenté (no 2); mais l'augmentation de cette face n'a pu avoir lieu dans le second angle SIK.... B, dont les autres faces sont demeurées constantes, sans que l'un au moins des dièdres SK...., SN, SA non adjacents à cette face se trouve augmenté, ou *affecté de* + (3e *var.*). Enfin, comme le nombre total de variations doit être pair, puisqu'on revient au signe dont on est parti quand le tour est achevé, il y a donc au moins 4 variations de signes.

4. THÉORÈME. *Si l'on partage la surface d'un polyèdre en un certain nombre* p *de parties formées chacune d'une ou plusieurs faces, désignons par* a *le nombre des arêtes qui séparent les unes des autres ces diverses parties, et par* s *le nombre des sommets situés sur ces arêtes; on aura* $s + p = a + 2$ *si les arêtes sont toutes liées entre elles de manière à ne former qu'un seul réseau continu, et dans tous les cas on aura* $s + p > a$.

Considérons d'abord le cas où les a arêtes sont liées entre elles. L'égalité $s+p=a+2$, ou $s+p-a=2$ est évidente si la surface totale est décomposée en deux parties seulement par une succession d'arêtes formant un circuit fermé. Car alors on a $s=a$, $p=2$. Subdivisons l'une de ces parties en deux autres en joignant deux sommets déjà considérés par une nouvelle ligne de séparation menée suivant des arêtes consécutives. Alors p augmente de 1, mais a augmente aussi d'une unité de plus que s, d'où résulte que $s+p-a$ ne change pas. La même chose se dirait pour chacune des subdivisions nouvelles qu'on opérerait, et comme on peut ainsi effectuer un mode quelconque de subdivision de la surface totale par des arêtes liées entre elles, la première partie du théorème est donc démontrée.

En second lieu, supposons que les a arêtes ne soient pas toutes liées entre elles, de sorte que leur ensemble constitue un certain nombre r de réseaux isolés les uns des autres

Lions entre eux deux quelconques de ces réseaux par une succession d'arêtes intermédiaires, et considérons le nouvel ensemble qui se compose d'un réseau de moins ; p ne change pas, mais a augmente d'une unité de plus que s ; ainsi $s+p-a$ diminue d'une unité. En diminuant ainsi successivement de $r-1$ le nombre des réseaux, on diminuera à la fin $s+p-a$ de $r-1$ unités; mais alors toutes les arêtes sont liées entre elles, donc on a $s+p-a-(r-1)=2$ ou $s+p=a+r+1$, ce qui démontre la 2e partie du théorème (*).

5. Théorème. *Deux polyèdres convexes* P, P′ *sont égaux s'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune et dans le même ordre.*

Il s'agit de prouver que tous les dièdres homologues sont égaux.

S'il y avait inégalité entre un certain nombre a d'angles dièdres de P et leurs homologues de P′, supposons qu'on eût mis sur les arêtes des premiers le signe + ou le signe —, selon qu'ils seraient plus ou moins grands que leurs homologues; on devrait trouver au moins 4 variations de signes en faisant le tour de chacun des sommets qui terminent l'une quelconque de ces arêtes (no 3). Ces arêtes affectées de signes, s'assemblant ainsi au moins 4 à 4 par leurs extrémités, formeraient un ou plusieurs réseaux de lignes droites, partageant la sur-

(*) L'égalité $s+p=a+r+1$ correspond à tous les cas possibles. Si toutes les arêtes sont liées en un seul réseau, elle devient $s+p=a+2$; c'est le premier cas du théorème. Ce cas lui-même comprend le cas plus particulier où l'on considère toutes les arêtes du polyèdre, et par conséquent tous ses sommets et toutes ses faces; alors l'égalité $s+p=a+2$ constitue le théorème d'Euler.

On lit dans les ouvrages cités au commencement de cet article (Voy. *Géom. de Legendre*, 12e édit., p. 335) que le théorème d'Euler a lieu quand on considère tant d'arêtes qu'on voudra comme n'existant pas. Je remarquerai cependant que cela ne peut être vrai si les autres arêtes ne sont pas toutes liées entre elles. Les démonstrations qui y sont fondées sur ce théorème, considéré comme s'étendant à tous les cas possibles, ne devraient-elles pas être modifiées en y substituant à l'égalité $S+H=A+2$, qui n'est pas applicable à tous les cas, l'inégalité $S+H>A$, qui est générale et qui revient à celle que nous employons dans cet article? Au reste, cela ne changerait rien au fond de ces démonstrations.

face du polyèdre en un certain nombre p de parties ; si donc on désigne par s le nombre des sommets situés sur ces arêtes, on devrait avoir : $s+p>a$, (Théor. 4).

Parmi les p parties de la surface totale, quelques-unes pourraient être terminées par 3 arêtes ; désignons leur nombre par p_3. Désignons de même en général par p_n le nombre de ces parties limitées par n arêtes, ou en d'autres termes par un périmètre de n côtés (*), on aurait :

$$p=p_3+p_4+p_5+\ldots.(1).$$

On aurait aussi :

$$2a=3p_3+4p_4+5p_5+\ldots.(2);$$

car chacune des a arêtes affectées de signes servant de côté à 2 périmètres, il faudrait compter 2 fois chaque arête pour avoir le nombre total des côtés de tous les périmètres, qui est exprimé par le second membre de (2).

Actuellement, observons que si on parcourait successivement chaque périmètre, on trouverait le même nombre total de variations de signes qu'en faisant successivement le tour de chacun des s sommets. Car, toute variation de signes observée autour des sommets, résulterait de la succession de deux arêtes de signes différents, donnant lieu aussi à l'une des variations observées sur les périmètres et réciproquement ; puis, que deux de ces arêtes, consécutives autour d'un sommet, seraient aussi deux côtés consécutifs de l'un des périmètres, et d'un seul d'entre eux.

Soit ν ce même nombre total de variations. Il serait au plus égal à $2p_3+4(p_4+p_5)+6(p_6+p_7)+\ldots.$; car, sur chaque périmètre, le nombre des variations devant être au plus égal au nombre des côtés de celui-ci, et ne pouvant être impair,

(*) Ces périmètres se composeraient de plusieurs portions isolées s'il s'agissait des parties de la surface comprises entre plusieurs réseaux.

puisqu'à la fin du tour on reviendrait au même signe dont on serait parti, on ne pourrait trouver plus de 2 variations sur chaque périmètre de 3 côtés, plus de 4 sur chaque périmètre de 4 ou 5 côtés, et ainsi de suite. Ce même nombre v serait d'ailleurs égal au moins à $4s$, puisque autour de chacun des s sommets on trouverait au moins 4 variations. Ainsi on aurait :

$$2p_3+4(p_4+p_5)+\dots\dots \geqq v \geqq 4s \dots\dots(3)$$

L'inégalité $s+p>a$ ou $4s+4p>4a$ ne serait pas troublée si l'on y remplaçait $4s$ par le 1[er] membre de (3) ; substituant aussi dans cette inégalité pour p et $2a$ leurs valeurs (1), (2), on trouverait :

$$\left.\begin{array}{l} 2p_3+4(p_4+p_5)+\dots\dots \\ +4(p_3+p_4+p_5+\dots) \end{array}\right\} > 6p_3+8p_4+10p_5+\dots\dots$$

résultat dont l'impossibilité est manifeste. Car le terme général du 2[e] membre est $2np_n$ auquel correspond dans le 1[er] membre $(n+4)\,p_n$ ou $(n+3)\,p_n$ selon que n est pair ou impair; or aucun de ces deux termes ne peut surpasser $2nP_n$, puisque n est au moins égal à 4 s'il est pair, et à 3 s'il est impair.

L'hypothèse d'une inégalité entre des angles homologues de P, P′ ne peut donc subsister.

6. Théorème. *Deux polyèdres* P, P′ *sont symétriques s'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune et inversement placées.* En effet, d'après le théorème précédent, le second de ces polyèdres est égal à celui que l'on construirait symétriquement au premier par rapport à un plan quelconque.

7. Théorème. *Deux polyèdres convexes* P, P′ *sont semblables s'ils ont toutes leurs faces semblables et semblablement placées.* Car l'égalité des dièdres et par conséquent des angles solides se démontrerait comme dans le théorème 5.