NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CAMUS

# Méthode générale pour déterminer les axes de l'ellipse et de l'hyperbole

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 2 (1843), p. 156-159

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__156_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

# MÉTHODE GÉNÉRALE

*Pour déterminer les axes de l'ellipse et de l'hyperbole.*

**PAR M. CAMUS,**
Professeur au Collège royal Bourbon.

Dans l'équation générale des courbes du second ordre

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

on détermine le centre au moyen des deux équations

$$\left.\begin{array}{l}2Ab+Ba+D=0\\2Ca+Bb+E=0\end{array}\right\}(1),$$

$a$ et $b$ étant les coordonnées du centre.

Cela posé, déterminons la plus grande et la plus petite distance de ce point à un point de la courbe.

Une droite quelconque passant par ce point aura pour équation $y-b=\gamma(x-a)$, $x$ et $y$ étant les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec la courbe. En appelant $z$ la distance du centre à ce point, on aura

$$z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

remplaçant $y-b$ par sa valeur $\gamma(x-a)$, on aura

$$z^2 = (x-a)^2(1+\gamma^2),$$

d'où $x = a + \frac{z}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, et par suite $y = b + \frac{\gamma z}{\sqrt{1+\gamma^2}}$.

Remplaçant $x$ et $y$ par leurs valeurs dans l'équation générale, elle devient, en l'ordonnant par rapport à $z$,

$$\frac{Az^2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{Bz^2\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{Cz^2}{1+\gamma^2} + (2Ab+Ba+D)\frac{z\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} +$$

$$+ (2Ca+Bb+E)\frac{z}{\sqrt{1+\gamma^2}} + F' = 0\ldots\ldots (2).$$

($F'$ étant égal au premier membre de l'équation dans lequel on a remplacé $y$ par $b$ et $x$ par $a$).

En vertu des équations (1), les termes qui contiennent les premières puissances de $z$ disparaissent, et $F'$ se réduit à $\frac{Db+Ea}{2} + F$. Désignons cette quantite par $-p$, l'équation (2) devient

$$\frac{Az^2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{Bz^2\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{Cz^2}{1+\gamma^2} - p = 0.$$

Il s'agit de déterminer quelles valeurs on doit donner à $\gamma$ pour que $z$ soit un maximum, et un minimum. En réduisant l'équation précédente, elle devient

$$\gamma^2(Az^2-p) + Bz^2\gamma + Cz^2 - p = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{-Bz^2 \pm \sqrt{(B^2-4AC)z^4 + 4p(A+C)z^2 - 4p^2}}{2(Az^2-p)}.$$

En décomposant le polynôme sous le radical en 2 facteurs de la forme $z^2-\alpha$, $z^2-\beta$, on déterminera facilement entre quelles limites $z^2$ est renfermé, et par suite le maximum et le minimum de $z^2$.

Nous allons faire les calculs pour l'ellipse ; on obtiendrait des résultats analogues pour l'hyperbole.

Dans le cas de l'ellipse $B^2-4AC$ est négatif, et $p$ est positif. En faisant $B^2-4AC=-\delta^2$, le polynôme sous le radical peut s'écrire ainsi

$$-\delta^2\left(z^4-\frac{4p(A+C)}{\delta^2}z^2+\frac{4p^2}{\delta^2}\right),$$

et par suite peut s'écrire ainsi :

$$-\delta^2\left\{\left(z^2-\frac{2p(A+C)}{\delta^2}\right)^2-\frac{4p^2(A+C)^2-4p^2\delta^2}{\delta^4}\right\};$$

faisant :

$$4p^2(A+C)^2-4p^2\delta^2=k^2,$$

on voit, en réduisant, que $k^2=4p^2\left((A-C)^2+B^2\right)$; la quantité sous le radical se décompose donc, dans les deux facteurs suivants ·

$$-\delta^2\left(z^2-\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}\right)\left(z^2-\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}\right),$$

ou, en changeant le signe de $\delta^2$ et du premier facteur,

$$\delta^2\left(\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}-z^2\right)\left(z^2-\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}\right);$$

d'où on déduit, pour la valeur maximum de $z^2$,

$$z^2=\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}, \tag{4}$$

et, pour la valeur minimum,

$$z^2=\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}. \tag{5}$$

On voit facilement que ces valeurs ne sont autre chose que les demi-axes de l'ellipse, obtenus au moyen de l'équation

$$My^2+Nx^2=p,$$

M étant égal à $\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}$, et N égal à

$$\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}\,;$$

car
$$a^2=\frac{p}{N},\quad \text{et}\quad b^2=\frac{p}{M},$$
ou

$$a^2=\frac{p}{\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}}=$$

$$=\frac{2p\left((A+C)+\sqrt{(A-C^2)+B^2}\right)}{(A+C)^2-(A-C)^2-B^2}=\frac{2p(A+C)+k}{\delta^4},$$

on verra de même que la seconde valeur de $z^2$ est égale à $b^2=\frac{p}{M}$.

En prenant les valeurs de $\gamma$, qui correspondent à ces deux valeurs de $z^2$, on trouve pour la première, en désignant par $\alpha^2$ et $\beta^2$ les deux valeurs de $z^2$, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$z^4-\frac{4p(A+C)}{\delta^2}z^2+\frac{4p^2}{\delta^2}=0,$$

$$\gamma'=-\frac{B\alpha^2}{2(A\alpha^2-p)},\quad \gamma''=-\frac{B\beta^2}{2(A\beta^2-p)};$$

d'où

$$\gamma'\gamma''=\frac{B^2\alpha^2\beta^2}{4\left(A^2\alpha^2\beta^2-Ap(\alpha^2+\beta^2)+p^2\right)};$$

observant que $\alpha^2\beta^2=\frac{4p^2}{\delta^4}$, et $\alpha^2+\beta^2=\frac{4p(A+C)}{\delta^2}$, on a

$$\gamma'\gamma''=\frac{B^2}{4A^2-4A(A+C)+4AC-B^2}=\frac{B^2}{-B^2}=-1.$$

Donc, les lignes qui donnent les directions des deux axes sont perpendiculaires l'une sur l'autre.