

A. J. CHEVILLARD

**Des points de concours des sécantes
qui coupent deux transversales en
parties proportionnelles**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 449-456

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DES POINTS DE CONCOURS

*des sécantes qui coupent deux transversales en parties
proportionnelles ;*

PAR M. A. J. CHEVILLARD,

Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur au Collège royal de Bourbon.

1. La proposition 16 du livre III de la Géométrie de Legendre est réciproque de la proposition 15. Le corollaire 2 de cette dernière proposition aurait pour réciproque : Si deux droites sont coupées en parties proportionnelles par une suite de sécantes, ces sécantes sont parallèles. Cette réciproque n'est pas vraie, comme on le voit aisément, mais on ne vérifie par là qu'une circonstance de cette proposition plus générale.

Si deux droites sont coupées en parties proportionnelles par une suite de sécantes, toutes les sécantes sont parallèles ou bien chacune rencontre toutes les autres. Dans ce dernier cas, il arrive que les points de rencontre diffèrent successivement ou se confondent en un seul, selon que les deux droites coupées concourent ou sont parallèles.

Soit deux droites AG, BH (fig. 89), coupées par des sécantes, de sorte que l'on ait

$$AC:BD :: CE:DF :: GE:FH :: \text{etc.}$$

Pour établir cette hypothèse, on aura pu tirer arbitrairement les deux premières sécantes AB, CD, puis porter à partir des points C, D sur AG des multiples ou sous-multiples de AC, et sur BH les mêmes multiples ou sous-multiples de BD. AB et CD ne peuvent être que parallèles ou concourantes. Si elles sont parallèles, il en est de même de

toutes les sécantes, car en prolongeant AG , BH jusqu'à leur rencontre en O , on a $OC:OD::AC:BD$, donc, à cause de l'hypothèse, $OC:OD::CE:DF$, donc CD , EF sont parallèles. De même pour les autres sécantes. Si AG , BH étaient parallèles, alors $ABDC$ serait un parallélogramme, d'où $AC=BD$, et à cause de l'hypothèse, $CE=DF$, d'où $CDFE$ parallélogramme, EF parallèle à CD , et ainsi de suite.

Supposons maintenant que AB , CD (*fig. 90*) concourent, ce qui est facile à réaliser en tirant d'un point M deux sécantes à travers deux droites AG , BH , et portant à partir des points C , D des parties proportionnelles, comme on a dit plus haut. AB n'est parallèle ni à CD ni à aucune des lignes suivantes; car si elle l'était à EF , en prolongeant AG , BH jusqu'à leur rencontre O , on aurait $OA:OB::AE:BF$, et, à cause de l'hypothèse, $AE:BF::AC:BD$, donc $OA:OB::AC:BD$, d'où AB , CD parallèles; ce qui n'est pas. On verrait de même qu'aucune sécante n'est parallèle à une autre. Même conclusion si AG , BH étaient parallèles, car si AB était parallèle à EF , on aurait $ABFE$ parallélogramme, d'où $AE=BF$, et, par suite de l'hypothèse, $AC=BD$; ce qui ne se peut. La première partie de la proposition est donc démontrée.

2. Considérons les points de rencontre des sécantes. Si les deux droites données concourent, ces points diffèrent successivement. En effet, supposons, s'il est possible (*fig. 91*), que les trois sécantes AB , CD , EF concourent en M , point de rencontre des deux premières. Par B menons Bd' parallèle à AG , on aura (prop. 22, liv. III), $AC:Bd'::CE:df$, donc, à cause de l'hypothèse, $BD:Bd'::DF:df$, et dD serait parallèle à fF , ce qui n'est pas. Ainsi les points de rencontre se détachent successivement M , N , P , etc. On voit bien que quand les parties proportionnelles sont très-petites, ces points tendent par leur réunion à tracer une

courbe. J'en donne l'équation plus loin (4). Si les droites coupées AG, BH sont parallèles, les points de concours des sécantes successives se confondent en un seul. En effet, soit (fig. 92), M la rencontre des sécantes AB, CD, et le point où la droite ME couperait BH, on aurait (prop. 22) $AC:BD::CE:Df$, donc, à cause de l'hypothèse, $Df=DF$, donc, etc.

3 Une suite de rapports égaux $a:b::c:d::e:f::g:h::etc.$, peut être placée sur deux droites concourantes ou parallèles par une suite de sécantes concourantes ou parallèles. Il suffira de la connaissance d'un rapport et de tous les antécédents ou de tous les conséquents. Ainsi pour placer cette suite (fig. 93), à partir des points A et B sur les deux concourantes AG, BH, on mènera Bb parallèle à AG, on prendra $AC=a$, $Bd=b$, $CE=c$, $EG=e$, $GI=g$, etc. On tirera AB, CD qui concourent en m , puis mE , mG , mI , etc., qui donnent $dm=d$, $ah=f$,... avec des cercles du centre B on rabattra d en D, f en F, h en H, etc

PROBLEME.

4. *Quelle est la courbe que tendent à décrire les intersections consécutives d'une infinité de sécantes interceptant sur deux droites fixes données des parties proportionnelles, lorsque ces parties sont très-petites ?* (fig. 94). Je prends les deux droites fixes pour axes coordonnés, et je désigne par A le rapport connu qui existe constamment entre les portions qu'interceptent sur les axes deux sécantes quelconques. Il est évident qu'il faut encore connaître la première sécante AB à partir de laquelle on porte les parties très-petites AC, BD, .. dont le rapport est A ; car si l'on change la position de cette sécante, tout le système des points consécutifs d'intersection change de position. Je désignerai cette sécante primitive par l'équation $\frac{x}{z} + \frac{y}{\xi} = 1$. Faisant croître z

d'une quantité très-petite h , ϵ sera accru d'une autre quantité très-petite k telle que $\frac{k}{h} = A$, de sorte qu'on aura pour la seconde sécante CD, $\frac{x}{\alpha+h} + \frac{y}{\epsilon+Ah} = 1$. Pour trouver commodément le point de rencontre M de ces deux sécantes, on retranche leurs équations après en avoir fait disparaître les dénominateurs, et l'on arrive à $Ahx + hy = Ah\alpha + h\epsilon + Ah^2$, ou en simplifiant $Ax + y = A\alpha + \epsilon + Ah$. Entre cette équation et l'équation de la première sécante, on élimine y et l'on trouve $x = \frac{A(\alpha + h)}{A\alpha - \epsilon}$. Mais comme h doit être une quantité infiniment petite pour qu'il y ait lieu à une courbe, on supposera $h = 0$, d'où pour le point M,

$$x = \frac{A\alpha}{A\alpha - \epsilon}, \quad \text{puis} \quad y = \frac{-\epsilon^2}{A\alpha - \epsilon},$$

obtenu en substituant la valeur de x dans l'équation de la première sécante. Telles sont les coordonnées du point de rencontre de la première sécante AB, avec la sécante infiniment voisine. Si l'on veut considérer maintenant l'intersection d'une sécante quelconque de la suite de AB, par

exemple GH... $\frac{x}{\alpha+h} + \frac{y}{\epsilon+Ah} = 0$ (h étant un accroissement fini AG), avec sa sécante infiniment voisine, on conçoit qu'on y parviendra en remplaçant dans les calculs

la première sécante AB par la sécante GH, et la sécante infiniment voisine de AB, par la sécante infiniment voisine de GH, savoir

$$\frac{x}{\alpha+h+h'} + \frac{y}{\epsilon+Ah+Ah'} = 1, \quad h' \text{ devenant une}$$

quantité infiniment petite. Il suffira donc pour avoir le point de rencontre de GH avec la sécante voisine, de remplacer dans les valeurs ci-dessus, α par $\alpha+h$ et ϵ par $\epsilon+Ah$, d'où

$$x = \frac{A(\alpha+h)^2}{A\alpha - \epsilon}, \quad y = \frac{-(\epsilon+Ah)^2}{A\alpha - \epsilon}.$$

Maintenant, comme on a l'intersection de deux sécantes infiniment voisines quelconques de la suite de AB, il est évident qu'en éliminant la quantité finie h de signe quelconque entre les deux équations précédentes, il s'agira des intersections consécutives de toutes les sécantes infiniment voisines à droite et à gauche de AB, c'est-à-dire qu'on aura l'équation du lieu cherché. Les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$Ax(Ax - \epsilon) = A^2(x + h)^2, \quad y(Ax - \epsilon) = -(\epsilon + Ah)^2.$$

En les ajoutant ensemble, on a

$$(Ax - \epsilon)(Ax + y) = A^2x^2 - \epsilon^2 + 2Ah(Ax - \epsilon),$$

ôtant le facteur commun $Ax - \epsilon$, et tirant la valeur de Ah on a

$$Ah = \frac{Ax + y - Ax - \epsilon}{2};$$

enfin, remplaçant cette valeur de Ah dans l'équation en y , on trouve, après réduction,

$$(1) \ y^2 + 2Axy + A^2x^2 + 2y(Ax - \epsilon) - 2A\epsilon(Ax - \epsilon) + (Ax - \epsilon)^2 = 0.$$

pour l'équation du lieu cherché, lequel est comme on voit une parabole tangente à l'axe des x et à l'axe des y , car les coordonnées à l'origine sont fournies par les équations $(Ax - Ax + \epsilon) = 0$, $(y + Ax - \epsilon)' = 0$. La droite $y = -Ax$ est un diamètre qui rencontre la parabole en un point dont les coordonnées sont les quarts des coordonnées des contacts avec les axes. Si l'on suppose $A = \frac{\epsilon}{\alpha}$, c'est-à-dire toutes les sécantes parallèles à la première, l'équation de la parabole devient $(y + Ax)^2 = 0$, diamètre de l'origine. Cela n'a pas besoin d'interprétation.

5. On prévoit que toute droite obtenue en portant à partir de AB sur les axes, deux longueurs dans le rapport A , sera aussi bien que les axes et la sécante AB, tangente à

la parabole. Pour le vérifier par le calcul, j'observe que l'équation de la parabole trouvée est de la forme

$$(2) \quad y^2 + 2Axy + A^2x^2 + 2my - 2Amx + m^2 = 0;$$

et même c'est là la forme de l'équation de toute parabole rapportée à deux tangentes comme axes coordonnés, car toute parabole ainsi rapportée aura pour équation

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

avec les relations $b^2 - 4c = 0$, $d' - 4f = 0$, $e^2 - 4cf = 0$, de sorte qu'en éliminant les coefficients c , d , e , l'équation

$$\text{sera } y^2 + bxy + \frac{b^2}{4}x^2 \pm 2y\sqrt{f} \mp bx\sqrt{f} + f = 0. \text{ Les coeffi-}$$

cients d' y et d' x peuvent être pris avec l'un ou l'autre de leurs signes, parce qu'en effet rien n'oblige à porter les x et les y positifs d'un côté plutôt que d'un autre de l'origine des axes-tangentes; mais il faut les prendre ensemble en signe contraire... $\pm 2y\sqrt{f} \mp bx\sqrt{f}$... attendu qu'en prenant ensemble les deux $+$ ou les deux $-$, l'équation serait

$$\left(y + \frac{b}{2}x \pm \sqrt{f}\right)^2 = 0, \text{ et ne représenterait plus une para-}$$

bole. L'équation (2) convient donc bien à toute parabole rapportée à deux axes-tangentes, m et A étant des nombres de signes quelconques. Pour trouver les conditions auxquelles on reconnaît qu'une droite $y = ax + b$ est tangente à une parabole ainsi représentée, on remplacera y par $ax + b$ dans l'équation (2), ce qui donnera

$$x^2(A + a)^2 + 2x(Ab + ab - Am + am) + (b + m)^2 = 0.$$

Établissant que les racines de cette équation sont égales, on aura $a(b + m) + A(b - m) = \pm(a + A)(b + m)$. Le signe $+$ conduit à une absurdité et le signe $-$ à la relation

$$ab + am + Ab = 0,$$

pour la condition de tangence cherchée. Or la sécante AB et

toute autre de sa suite, étant représentée par $\frac{x}{\alpha+h} + \frac{y}{\xi+\Lambda h} = 1$,

satisfait à cette relation, car alors $a = -\frac{\xi+\Lambda h}{\alpha+h}$, $b = \xi + \Lambda h$,

de sorte que par la substitution de ces valeurs, la relation de tangence acquiert le facteur commun $\xi + \Lambda h$, se simplifie et devient une identité, ce qui démontre la propriété énoncée des sécantes aux axes. On voit donc qu'on peut mener des tangentes à la parabole trouvée (4) en employant le procédé cité n° 3. Cette propriété, que *les sécantes interceptant sur deux droites qui concourent des parties proportionnelles, sont toutes tangentes à une même parabole*, explique de nouveau pourquoi chacune des sécantes n'est parallèle à aucune autre (2), car on sait qu'à la parabole, il ne peut y avoir deux tangentes parallèles.

6. Lorsque deux droites qui concourent, sont fixées, ainsi que la position d'une première sécante, la parabole, lieu des concours des sécantes, est déterminée (4). Mais si, au contraire, on donne d'abord une parabole quelconque, on pourra toujours la rapporter à deux tangentes, puisqu'il n'y a pas de parallèles entre elles; alors son équation sera de la forme (2) n° 5, comme je l'ai démontré. En identifiant les équations (1) et (2), on a seulement $m = \Lambda x - \xi$. Une des coordonnées α , ξ reste donc arbitraire pour que la première sécante $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\xi} = 1$ soit tangente à la courbe, ce qui montre qu'on peut choisir, pour fixer le départ des parties proportionnelles sur les deux axes, telle tangente qu'on voudra.

Ensuite, quel que soit h , la droite $\frac{x}{\alpha+h} + \frac{y}{\xi+\Lambda h} = 1$, est toujours tangente à la parabole; cela suit des équations identiques (1) et (2). J'ajouterai seulement que le rapport Λ des parties proportionnelles, varie évidemment avec les deux

premières tangentes qu'on prend pour axes coordonnés ; car ce rapport est égal au rapport des sinus des angles de ces deux tangentes, avec le grand axe de la parabole. Il est donc démontré que si l'on mène deux tangentes quelconques à une parabole, toutes les tangentes qu'on lui mènera ensuite, intercepteront sur ces deux tangentes à partir d'une troisième fixée à volonté des parties constamment proportionnelles.

Observation. Si les deux droites du problème (4) sont situées dans l'espace, alors il est facile de démontrer que la sécante décrit un parabolôïde hyperbolique, engendré par le mouvement d'une droite qui s'appuie toujours sur les deux droites données, et sur une troisième droite facile à déterminer.

Il suffit de prendre pour plan des xy , un plan parallèle aux droites et pour axe des z , la direction de la plus courte distance. Alors les équations des deux droites sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} z = m, \\ y = ax, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = n \\ y = bx \end{array} \right.$$

Prenant sur la première droite un point dont les coordonnées sont $x = \alpha + kt$, $y = ax$, $z = m$, et sur la seconde un autre point ayant pour coordonnées $x = \beta + lt$, $y = bx$, $z = n$, (α , β , k , l , étant des constantes, et t une variable), éliminant t entre les équations de deux projections de la droite qui passe par ces deux points, on parvient à l'équation cherchée :

$$(z-m)^2(a-b)(l-\xi k) + (z-m)(m-n) [(k-l)y + (bl-ak)x + (a-b)(l-\xi k)] + (m-n)^2 k(y-ax) = 0.$$

Faisant $z=0$, on trouve l'équation d'une troisième directrice.

La surface est aussi engendrée par le mouvement d'une droite constamment parallèle au plan xy , et s'appuyant sur deux directrices. Tm.