MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

STANISLAS ZAREMBA

Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 82 (1937)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__82__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXII

Sur une conception nouvelle des forces intérieures dans un fluide en mouvement

Par M. Stanislas ZAREMBA
Professeur honoraire à l'Université de Cracovie

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1937

SUR UNE CONCEPTION NOUVELLE

DES

FORCES INTÉRIEURES

DANS UN

FLUIDE EN MOUVEMENT

Par M. Stanislas ZAREMBA,

Professeur honoraire à l'Université de Cracovie.

PRÉFACE.

Le travail actuel est consacré au sujet que j'avais traité dans les Conférences que, sur l'invitation dont m'a honoré M. Villat, j'ai faites au début du mois de juin de l'année 1934 à la Sorbonne.

Dans le premier Chapitre, j'énonce une hypothèse nouvelle relative aux forces intérieures dans un fluide en mouvement et j'y établis les équations du mouvement qui résultent de cette hypothèse. Dans le second Chapitre, j'étudie la propagation des ondes dans un fluide qui vérifierait l'hypothèse formulée dans le premier Chapitre et, dans le troisième Chapitre, j'étudie la rotation d'un cylindre de révolution baigné par un liquide. Je crois que les résultats que j'obtiens sont susceptibles d'être vérifiés par l'expérience.

CHAPITRE 1.

ÉNONCÉ D'UNE HYPOTHÈSE NOUVELLE RELATIVE AUX FORCES INTÉRIEURES QUI SE DÉVELOPPENT DANS UN FLUIDE EN MOUVEMENT ET ÉQUATIONS HYDRODYNAMIQUES CORRESPONDANTES.

1. Certains faits suggèrent l'idée que la théorie classique de la viscosité ne rend pas toujours compte d'une façon satisfaisante des efforts qui se développent au sein d'un fluide en mouvement. En effet, selon cette théorie, après la cessation du processus de déformation du fluide, les efforts au sein de celui-ci se réduiraient instantanément en chaque point à la pression constante dans tous les sens qui, en vertu de l'équation caractéristique du fluide considéré, correspondrait à la température et à la densité du fluide en ce point. Or, un corps pâteux, comme par exemple la poix considérée à une température pas trop basse, semble pouvoir être regardé comme un fluide très visqueux. D'autre part, si, après avoir déformé une portion d'un tel corps, on l'abandonne à lui-même sans l'avoir maintenu trop longtemps dans la forme qu'on lui avait donnée, on constate que le corps considéré esquisse un mouvement de retour à la forme qu'il avait initialement, ce qui est incompatible avec la théorie classique de la viscosité. D'ailleurs l'expérience prouve que, dans un fluide au repos par rapport à un système de référence désigné souvent par la dénomination impropre de *système de référence fixe* et que nous appellerons *système de référence galiléen*, il s'établit, en chaque point du fluide, du moins après qu'un temps assez long s'est écoulé depuis la cessation du mouvement, une pression constante normale à tous les éléments de surface passant par le point considéré. Il semble donc naturel d'admettre que, après la cessation du mouvement d'un fluide par rapport à un système de référence galiléen, l'état précédent des efforts intérieurs du fluide, ne s'établisse pas instantanément mais graduellement, avec une rapidité plus ou moins grande selon la nature du fluide.

Divers auteurs, comme l'a fait remarquer M. Natanson [1], ont

[1] Dans sa Note *Sur les lois de la viscosité*, présentée à l'Académie des Sciences

eu l'idée qu'en réalité les choses se passaient bien de cette façon, mais ils ont admis que, après la cessation du mouvement du fluide, une pression uniforme dans tous les sens en chaque point du fluide s'établissait si rapidement que l'on pouvait rendre compte d'une façon satisfaisante des phénomènes réels en supposant que, après la cessation du mouvement, l'uniformisation susdite des pressions autour de chaque point du fluide s'établissait instantanément.

C'est M. Natanson le premier qui dans la note citée ci-dessus, a essayé de fonder la dynamique des fluides sur l'hypothèse esquissée plus haut. Mais les considérations qu'il a développées et les équations auxquelles il est parvenu, ne s'accordent pas avec les principes de la Mécanique rationnelle et cela m'a engagé à reprendre la question. J'ai exposé les résultats auxquels je suis arrivé dans une communication faite le 12 octobre 1903 à l'Académie des Sciences de Cracovie et insérée dans son Bulletin. Actuellement je me propose d'indiquer rapidement avec quelques perfectionnements comment on peut établir les équations que j'ai obtenues dans la communication susdite et de présenter quelques-unes de celles des conséquences de ces équations qui seraient susceptibles, me semble-t-il, d'être vérifiées par l'expérience.

2. Considérons le mouvement d'un fluide (F) par rapport à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (S) constituant un système de référence galiléen et désignons par

$$u, \quad v, \quad w$$

les projections orthogonales sur les axes du système (S), de la vitesse du point physique M du fluide qui à une époque t a x, y, z pour coordonnées. Envisageons encore, à la même époque, les efforts, rapportés à l'unité de surface, qui s'exercent au point M sur les éléments de surface passant par ce point. L'ensemble de tous ces efforts sera déterminé au moyen de six quantités bien connues que

---

de Cracovie le 4 février 1901 et publiée dans le *Bulletin* de cette Académie, M. Natanson cite à ce sujet les travaux suivants : POISSON, *Mémoires sur les équations générales de l'Équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides* (*Journal de l'École polytechnique*, XX^e cahier, t. 13, février 1831), *voir* en particulier le paragraphe 7, pages 139 et suivantes; STOKES, *Mathematical and Physical Papers*, vol. I, p. 75; CLERK-MAXWELL, *Sciencific Papers*, vol. II, p. 26; *voir* en particulier la page 30.

nous représenterons, comme on le fait souvent, par les symboles

$$(2)\quad \begin{cases} p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}, \\ p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}. \end{cases}$$

Chacune des quantités (1) et (2) est une fonction des quatre variables x, y, z, t mais si dans le cours du temps, on regarde l'une quelconque de ces quantités comme se rapportant à un point physique déterminé du fluide (F) elle deviendra une fonction du temps seul et si l'on désigne dans ce cas par

$$\frac{d}{dt}$$

le symbole de dérivation de la quantité considérée par rapport au temps, on aura la formule symbolique bien connue que voici

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ces préliminaires posés, proposons-nous de formuler une hypothèse qui ferait connaître les dérivées

$$(3)\quad \frac{dp_{xx}}{dt}, \quad \frac{dp_{yy}}{dt}, \quad \frac{dp_{zz}}{at}, \quad \frac{dp_{yz}}{dt}, \quad \frac{dp_{zx}}{dt}, \quad \frac{dp_{xy}}{dt}$$

en fonction de l'état physique et cinématique du fluide (F) au point auquel se rapportent les dérivées considérées. Pour présenter à ce sujet une hypothèse admissible du point de vue de la Mécanique rationnelle, il ne faut pas perdre de vue ce fait que les variations des quantités (2), considérées comme se rapportant à un point physique déterminé M du fluide (F), dépendent non seulement de la variation intrinsèque des efforts qui règnent au point M, mais encore de la variation de l'orientation de la quadrique des efforts par rapport au système de coordonnées (S).

Pour tenir compte de la circonstance précédente, rappelons que, en vertu d'un théorème bien connu de la cinématique des corps continus, on peut faire correspondre à un point physique quelconque M du fluide considéré (F) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (S′), mobile par rapport au système de coordonnées (S), ayant le point M pour origine, tel que, par rapport au système de coordonnées (S′), la vitesse d'un point physique P du fluide (F), voisin du point M, ne diffère que d'une quantité d'ordre supérieur par rapport à la distance du point P au point M de ce qu'elle serait, à l'instant considéré, au cas où, par rapport au système de coordonnées (S'), le fluide (F) était en train de subir une certaine déformation pure ([1]).

Pour que le système de coordonnées (S'), ayant, rappelons-le, le point M pour origine, satisfasse à la condition précédente, il faut et il suffit que les projections orthogonales q_1, q_2, q_3 de la vitesse angulaire instantanée du système de coordonnées (S') par rapport au système de coordonnées (S) sur les axes de ce dernier aient les valeurs suivantes :

$$(4) \qquad q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad q_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

On peut donc, à une époque choisie arbitrairement, donner une orientation quelconque au système de coordonnées (S').

Supposons que l'on ait choisi le système de coordonnées (S') relatif à quelque point physique M du fluide (F) de telle façon que, à l'époque t à laquelle on veut considérer le point M, les axes du système de coordonnées (S') soient de même sens que ceux du système (S).

Posons

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{lll} a_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & a_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & a_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ c_1 = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, & c_2 = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, & c_3 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{array}\right.$$

en convenant de regarder dans ces formules la variable représentant le temps comme ayant la valeur t définissant l'époque à laquelle on envisage le point M et les symboles x, y, z — comme représentant les coordonnées du point M. Dans le système (S), à l'époque t, les quantités (5) représenteront les dérivées par rapport au temps à l'époque t des six composantes de la déformation en M que subit le fluide à partir de l'époque t, ces six composantes de la déformation étant rapportées au système de coordonnées (S). Pour aller plus loin, rappelons le théorème suivant :

([1]) *Voir*, par exemple, dans le tome III du *Traité de Mécanique rationnelle* d'Appell, paru en 1900, le n° 685, pages 262 et suivantes.

I. *Si après avoir rapporté un corps continu* (C) *à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires* (x, y, z), *on désigne par*

$$(5\ bis)\qquad p_{xx},\quad p_{yy},\quad p_{zz},\quad p_{yz},\quad p_{zx},\quad p_{xy}$$

les composantes des efforts en un point M *du corps considéré et par* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *celles de la déformation du même corps au même point, alors, au passage du système de coordonnées* (x, y, z) *à un autre système de coordonnées* (x_1, y_1, z_1) *du même genre, les quantités* (5 *bis*) *et les quantités*

$$2\varepsilon_1,\quad 2\varepsilon_2,\quad 2\varepsilon_3,\quad \gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \gamma_3$$

se transforment selon les mêmes règles que les coefficients A, A′, A″, B, B′, B″ *des termes du second degré*

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

dans l'équation d'une quadrique (¹).

Cela posé revenons au fluide (F) et désignons par

$$(6)\qquad \begin{cases} p'_{xx}, & p'_{yy}, & p'_{zz}, & p'_{yz}, & p'_{zx}, & p'_{xy}, \\ a'_1, & a'_2, & a'_3, & c'_1, & c'_2, & c'_3, \end{cases}$$

les transformées des quantités (2) et (5) au passage du système de coordonnées (S) au système de coordonnées (S′). Puisque, à l'époque t, les axes du système (S′) sont de même sens que ceux du système (S), il résulte du théorème I qu'à l'époque t on aura les relations :

$$(7)\qquad \begin{cases} p'_{xx} = p_{xx}, \quad p'_{yy} = p_{yy}, \quad p'_{zz} = p_{zz}, \quad p'_{yz} = p_{yz}, \quad p'_{zx} = p_{zx} \\ p'_{xy} = p_{xy}, \quad a'_i = a_i, \quad c'_i = c_i \quad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

ainsi que les suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dt} = \dfrac{dp'_{xx}}{dt} + 2(q_2 p'_{zx} - q_3 p'_{xy}), \\ \dfrac{dp_{yz}}{dt} = \dfrac{dp'_{yz}}{dt} + q_1(p'_{yy} - q'_{zz}) + q_3 p'_{zx} - q_2 p'_{xy} \end{cases}$$

(¹) Nous numérotons les énoncés auxquels nous aurons à renvoyer dans l'ordre où ils se présentent.

avec celles qui s'en déduisent par les permutations cycliques des lettres x, y, z et des indices 1, 2, 3, les quantités q_1, q_2, q_3 étant définies par les formules (4).

Pour aller plus loin, rappelons que, ainsi que nous l'avons fait observer plus haut, l'expérience nous apprend que, après la cessation du mouvement d'un fluide par rapport à un système de référence galiléen, il tend à s'établir en chacun de ses points, avec une rapidité plus ou moins grande, une pression constante, normale aux différents éléments de surface passant par le point considéré. Il est donc indiqué d'admettre que, après avoir désigné par p la pression que fait correspondre l'équation caractéristique du fluide à la température et à la densité du fluide en un de ses points, à l'époque considérée, les dérivées

$$(9) \qquad \frac{dp'_{xx}}{dt}, \quad \frac{dp'_{yy}}{dt}, \quad \frac{dp'_{zz}}{dt}, \quad \frac{dp'_{yz}}{dt}, \quad \frac{dp'_{zx}}{dt}, \quad \frac{dp'_{xy}}{dt},$$

en ce point et à cette époque sont des fonctions des quantités

$$(10) \quad p'_{xx}-p, \quad p'_{yy}-p, \quad p'_{zz}-p, \quad p'_{yz}, \quad p'_{zx}, \quad p'_{xy}, \quad a'_i, \quad c'_i \qquad (i=1, 2, 3),$$

ainsi que de la température et de la densité au point et à l'époque considérés, fonctions s'évanouissant en même temps que l'ensemble des quantités (10). Cela étant, nous admettrons, à titre de première approximation, que chacune des dérivées (9) est une fonction linéaire et homogène à coefficients, fonctions de la température et de la densité du fluide à l'époque et au point considérés. D'après cela, les expressions des dérivées (9) contiendraient 72 coefficients. En réalité le nombre de ces coefficients se réduit à 4. Pour établir qu'il en est bien ainsi, observons qu'un fluide en équilibre par rapport à un système de référence galiléen, soumis uniquement à la pression des parois du vase qui le contiendrait, serait un corps isotrope à partir de l'époque où les efforts intérieurs en chacun de ses points se réduiraient à la pression hydrostatique. Il résulte de là que la substitution au système de coordonnées (S') d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires quelconque, invariablement lié au précédent, ne devra pas affecter les valeurs des coefficients des fonctions linéaires des quantités (10), représentant, en vertu de l'hypothèse adoptée, les dérivées (9). Or, si l'on renverse le sens de l'un des axes du système de coordonnées (S'), aucune des quantités

$$(11)\qquad p'_{xx}-p,\quad p'_{yy}-p,\quad p'_{zz}-p,\quad a'_1,\quad a'_2,\quad a'_3$$

ne changera de valeur (théorème I, p. 6) tandis que selon que l'on renverserait le sens du premier, du second ou du troisième axe du système (S'), il arriverait que, dans chacune des deux suites

$$(12)\qquad p'_{yz},\quad p'_{zx},\quad p'_{xy},\qquad \text{et}\qquad c'_1,\quad c'_2,\quad c'_3,$$

les premiers, les deuxièmes ou les troisièmes termes conserveraient il est vrai leurs valeurs, mais chacun des deux autres changerait de signe. Il résulte de là en particulier que nous aurons des formules de la forme suivante :

$$(13)\qquad \frac{dp'_{xx}}{dt} = \mathrm{A}\,a'_1 + \mathrm{A}'\,a'_2 + \mathrm{A}''\,a'_3 + \mathrm{B}(p'_{xx}-p) + \mathrm{B}'(p'_{yy}-p) + \mathrm{B}''(p'_{zz}-p),$$

$$(14)\qquad \frac{dp'_{yz}}{dt} = -\mu c'_1 - \frac{p'_{yz}}{\mathrm{T}}\,;$$

où les symboles A, A', A'', B, B', B'', μ et T représentent certaines fonctions de la température τ et de la densité ρ du fluide au point considéré. Permutons maintenant le deuxième et le troisième axe du système de coordonnées (S'). A la suite de cette opération les $\frac{dp'_{xx}}{dt}$; a'_1 et $p'_{xx}-p$ ne changeront pas, mais il y aura permutation : d'une part des valeurs de a'_2 et de a'_3 et d'autre part des valeurs de $p'_{yy}-p$ et de $p'_{zz}-p$. Donc, pour que dans l'expression de $\frac{dp'_{xx}}{dt}$ les coefficients des nouvelles valeurs de a'_2, a'_3, $p'_{yy}-p$ et $p'_{zz}-p$ ne subissent pas de changement, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}'' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}' = \mathrm{B}'',$$

cela étant, après avoir posé

$$\mathrm{A}-\mathrm{A}' = m,\qquad \mathrm{B}-\mathrm{B}' = n,\qquad \mathrm{A}' = -\lambda,\qquad \mathrm{B}' = -\frac{1}{3\mathrm{T}},$$

on pourra donner à la formule (13) la forme suivante :

$$(15)\qquad \frac{dp'_{xx}}{dt} = ma'_1 - \lambda(a'_1+a'_2+a'_3) + n(p'_{xx}-p) - \frac{p'_{xx}+p'_{yy}+p'_{zz}-3p}{3\mathrm{T}}.$$

Envisageons maintenant la substitution, au système de coordonnées (S'), d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (ξ, η, ζ), invariablement lié au précédent mais ayant une orientation quelconque par rapport à celui-ci et désignons par

$$p'_{\xi\xi},\quad p'_{\eta\eta},\quad p'_{\zeta\zeta},\quad p'_{\eta\zeta},\quad p'_{\zeta\xi},\quad p'_{\xi\eta},\quad \alpha'_i,\quad \gamma'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les transformées correspondantes des quantités (6).

D'une part, on devra avoir

$$\frac{dp'_{\xi\xi}}{dt} = m\alpha'_1 - \lambda(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) + n(p'_{\xi\xi} - p) - \frac{p'_{\xi\xi} + p'_{\eta\eta} + p'_{\zeta\zeta} - 3p}{3T'}, \tag{16}$$

et d'autre part, après avoir désigné par l, l', l'' les cosinus directeurs du premier axe du système de cordonnées (ξ, η, ζ) par rapport au système (S'), les formules (15) et (14) et celles qui s'en déduisent par voie de permutations cycliques des lettres x, y, z et des indices 1, 2, 3 nous donneront (théorème I, p. 6) une formule qui pourra s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dp'_{\xi\xi}}{dt} &= (m + 2\mu)(\alpha'_1 l^2 + \alpha'_2 l'^2 + \alpha'_3 l''^2) - 2\mu\alpha'_1 - \lambda(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)\\ &\quad + \left(n + \frac{1}{T}\right)(p'_{xx} l^2 + p'_{yy} l'^2 + p'_{zz} l''^2) - \frac{p'_{\xi\xi}}{T} - np,\end{aligned}$$

Pour que cette formule soit identique à la formule (16), il faut et il suffit que l'on ait

$$n = -\frac{1}{T}, \qquad m = -2\mu.$$

Cela posé, après avoir porté les valeurs précédentes de n et m dans la formule (15) et en adjoignant au résultat obtenu de cette façon la formule (14), on trouvera les deux formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dp'_{xx}}{dt} &= -2\mu\alpha'_1 - \lambda(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3) - \frac{p'_{xx} - p}{T}\\ &\quad - \frac{p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz} - 3p}{3T'},\\ \frac{dp'_{yz}}{dt} &= -\mu c'_1 - \frac{p'_{yz}}{T}.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

On vérifiera aisément que ces formules, conjointement avec celles qui s'en déduisent par voie de permutations cycliques des lettres x, y, z et des indices 1, 2, 3, fournissent des expressions des dérivées (9) sous forme de fonctions linéaires et homogènes des quantités (11), fonctions dont les coefficients conservent des valeurs invariables quand on passe du système de coordonnées (S′) à n'importe quel autre système de coordonnées cartésiennes rectangulaires invariablement lié au précédent.

Cela étant, nous considèrerons les formules susdites comme définitives.

3. Pour obtenir l'ensemble de toutes les équations qui doivent être vérifiées à l'intérieur du fluide, il faut tout d'abord, en ce qui concerne les efforts qui subsistent à l'intérieur du fluide, revenir au système de coordonnées initiales (S) ; autrement dit, il faut établir les expressions des dérivées (3) (p. 4). Après avoir posé

$$3p_m = p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}, \tag{18}$$

$$\varpi = a_1 + a_2 + a_3, \tag{19}$$

et s'être reporté aux égalités (7) et (8), on trouve immédiatement que les équations demandées sont les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dp_{xx}}{dt} &= -2\mu a_1 - \lambda\varpi - \frac{p_{xx} - p}{\mathrm{T}} - \frac{p_m - p}{\mathrm{T}'} + 2(q_2 p_{zx} - q_3 p_{xy}),\\
\frac{dp_{yy}}{ds} &= -2\mu a_2 - \lambda\varpi - \frac{p_{yy} - p}{\mathrm{T}} - \frac{p_m - p}{\mathrm{T}'} + 2(q_3 p_{xy} - q_1 p_{yz}),\\
\frac{dp_{zz}}{dt} &= -2\mu a_3 - \lambda\varpi - \frac{p_{zz} - p}{\mathrm{T}} - \frac{p_m - p}{\mathrm{T}'} + 2(q_1 p_{yz} - q_2 p_{zx}),\\
\frac{dp_{yz}}{dt} &= -\mu c_1 - \frac{p_{yz}}{\mathrm{T}} + q_1(p_{yy} - p_{zz}) + q_3 p_{zx} - q_2 p_{xy},\\
\frac{dp_{zx}}{dt} &= -\mu c_2 - \frac{p_{zx}}{\mathrm{T}} + q_2(p_{zz} - p_{xx}) + q_1 p_{xy} - q_3 p_{yz},\\
\frac{dp_{xy}}{dt} &= -\mu c_3 - \frac{p_{xy}}{\mathrm{T}} + q_3(p_{xx} - p_{yy}) + q_2 p_{yz} - q_1 p_{zx},
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

où, rappelons-le, les quantités a_i, c_i q_i $(i = 1, 2, 3)$ sont définies par les formules (5) et (4).

Aux équations précédentes, on devra joindre celles que fournit le principe de d'Alembert et qui, après avoir désigné par ρ la densité du fluide et par X, Y, Z les projections orthogonales sur les axes du système de coordonnées (S) de la force, rapportée à l'unité de volume, sollicitant le fluide au point que l'on considère, peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= X - \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right),\\
\rho\frac{dv}{dt} &= Y - \left(\frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}\right),\\
\rho\frac{dw}{dt} &= Z - \left(\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Pour avoir tout l'ensemble des équations vérifiées à l'intérieur du fluide, on n'aura plus qu'à joindre aux équations (20) et (21) l'équation de continuité

$$
(22)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,
$$

l'équation caractéristique du fluide considéré et l'équation qui régit la distribution des températures à l'intérieur du fluide.

4. Pour nous rendre compte de la signification physique des équations (20) et s'il ne serait pas possible de découvrir certaines restrictions en ce qui concerne les valeurs admissibles pour les coefficients qui entrent dans ces équations, supposons d'abord qu'à une certaine époque, soit $t = 0$, le mouvement du liquide ait cessé et que, à partir de cette époque, le fluide soit maintenu à une température constante. Dans ces conditions, la première et la quatrième des équations (20) se réduiront aux suivantes :

$$
(23)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dp_{xx}}{dt} &= -\frac{p_{xx}-p}{T} - \frac{p_m - p}{T'},\\
\frac{dp_{yz}}{dt} &= -\frac{p_{yz}}{T},
\end{aligned}
\right.
$$

lesquelles seront des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants.

La seconde de ces équations et celles qui s'en déduisent par voie de permutations circulaires des lettres x, y, z donnent

$$
(24)\qquad p_{yz} = p_{yz}^{(0)} e^{-\frac{t}{T}}, \qquad p_{zx} = p_{zx}^{(0)} e^{-\frac{t}{T}}, \qquad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} e^{-\frac{t}{T}},
$$

en désignant par $p_{yz}^{(0)}$, $p_{zx}^{(0)}$ et $p_{xy}^{(0)}$ les valeurs respectives des fonctions p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} pour $t = 0$. Il résulte de ces formules qu'on doit avoir

$$
(25)\qquad T > 0
$$

puisque les efforts tranchants, dans les conditions où nous sommes placés, doivent tendre verszérolorsque t croît indéfiniment. Ajoutons maintenant membre à membre à la première des équations (23) les deux équations qui s'en déduisent par voie de permutations circulaires des lettres x, y, z, et posons

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T'}, \tag{26}$$

il viendra, comme cela résulte de la formule (18),

$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{p_m - p}{T_1}, \tag{27}$$

et, comme p représente actuellement une constante, l'équation précédente nous donnera

$$p_m - p = (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t}{T_1}}, \tag{28}$$

où $p_m^{(0)}$ représente la valeur de p_m à l'époque $t = 0$. La quantité p_m devant tendre vers p lorsque t croît indéfiniment, on devra avoir nécessairement

$$T_1 > 0. \tag{29}$$

Pour calculer p_{xx} retranchons membre à membre l'équation (27) de la première des équations (23).

Après s'être reporté à l'équation (26), on trouvera, en effectuant l'intégration de l'équation obtenue de la facon précédente, que l'on a

$$p_{xx} - p_m = (p_{xx}^{(0)} - p_m^{(0)})\, e^{-\frac{t}{T}},$$

en désignant par $p_{xx}^{(0)}$ la valeur de p_{xx} pour $t = 0$. La formule précédente et la formule (28) donnent

$$p_{xx} = p + (p_{xx}^{(0)} - p_m^{(0)})\, e^{-\frac{t}{T}} + (p_m^{(0)} - p)\, e^{-\frac{t}{T_1}}. \tag{30}$$

Voici maintenant ce qu'expriment les formules (24) et (30) ainsi que celles qui s'en déduisent par voie de permutations circulaires des lettres x, y, z. Si, après la cessation du mouvement du fluide par rapport à un système de référence galiléen, la température de celui-ci reste constante, alors les quantités p_{yz}, p_{zy} et p_{zy} qui représentent les efforts tranchants au sein du fluide tendent vers zéro avec le cours du temps tandis que les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} qui représentent les efforts normaux tendent vers une limite commune p, égale à la pression qui correspond, en vertu de l'équation caractéristique du fluide, à sa densité au point considéré.

Nous donnerons le nom de relaxation au phénomène précédent et comme, d'une part, chacune des quantités T et T_1 a les dimensions d'un intervalle de temps et que, d'autre part, la rapidité avec laquelle les efforts tranchants tendent vers zéro après la cessation du processus de déformation du fluide est déterminée par la quantité T tandis que la rapidité avec laquelle, dans les mêmes conditions, la pression moyenne p_m tend vers la pression désignée plus haut par p est déterminée par la quantité T_1, on peut dire que T représente le temps de relaxation des efforts tranchants, T_1 celui de la relaxation de la différence entre la pression moyenne p_m et la pression p.

Envisageons maintenant certains cas-limites des formules (20) en considérant en premier lieu le cas où

$$\frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T'}$$

tendraient vers zéro. On vérifiera, avec quelque attention, que les équations-limites des équations (20) seraient celles qui conviendraient au cas où l'on aurait substitué au fluide (F) un solide isotrope, parfaitement élastique, maintenu à une température constante, dont le mouvement ne donnerait lieu qu'à des valeurs assez petites des composantes de la déformation et dont les propriétés élastiques seraient caractérisées, dans les notations adoptées par M. Appell [1], précisément par les quantités λ et μ.

J'ajoute que les expressions des efforts, présentées ordinairement en théorie de l'élasticité, ne se prêteraient pas à la vérification précédente parce qu'elles ne sont valables qu'au cas où non seulement les six composantes de la déformation sont assez petites mais où, en outre, les changements d'orientation des éléments linéaires du solide seraient eux aussi assez petits; mais on trouvera dans l'excellent mémoire des frères Cosserat [2] tous les éléments voulus pour effectuer la vérification susdite.

---

[1] Paul APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, paru en 1900, n° 799, p. 507 et suivantes.

[2] *Sur la théorie de l'élasticité* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. 10, année 1896).

Il résulte de la signification indiquée plus haut qu'acquièrent les coefficients λ et μ dans le cas-limite qui vient de nous occuper, qu'il est permis de supposer que les inégalités

$$\mu > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu > 0,$$

probables dans le cas d'un solide élastique isotrope, le sont aussi dans le cas d'un fluide.

Envisageons maintenant le cas où les quantités T et T' tendraient vers zéro, le rapport

$$\frac{T}{T'}$$

tendant vers une limite finie k. Deux éventualités méritent d'être distinguées dans ce cas. On peut concevoir que chacun des produits

$$\mu T \quad \text{et} \quad \lambda T \tag{31}$$

tende vers zéro. Il résulte des équations (20) que, dans ce cas les quantités p_{xx}, p_{yy} et p_{zz} tendraient vers une même limite et chacune des quantités p_{yz}, p_{zx} et p_{xy} vers zéro. Donc, dans l'hypothèse considérée, on arriverait aux équations du mouvement d'un fluide parfait dépourvu de viscosité. En second lieu, il est intéressant d'admettre que les produits (31) ont pour limites respectives des quantités déterminées m et l' non nulles l'une et l'autre.

Dans le cas général où l'on aurait

$$1 + k \neq 0,$$

on pourra poser

$$l = l' + k\frac{2m + 3l'}{3(1+k)},$$

et, pour le cas-limite considéré, les équations (20) donneront alors les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} p_{xx} - p &= -2ma_1 - l\varpi, \\ p_{yy} - p &= -2ma_2 - l\varpi, \\ p_{zz} - p &= -2ma_3 - l\varpi, \\ p_{yz} &= -mc_1, \\ p_{zx} &= -mc_2, \\ p_{xy} &= -mc_3, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

lesquelles constituent les expressions des efforts à l'intérieur d'un fluide visqueux selon la théorie classique de la viscosité.

Dans le cas exceptionnel où l'on aurait

$$(33) \qquad 1 + k = 0,$$

les équations-limites des équations (20) se composeraient des équations

$$(34) \qquad \begin{cases} -2ma_1 - l'\varpi - (p_{xx} - p_m) = 0, \\ -2ma_2 - l'\varpi - (p_{yy} - p_m) = 0, \\ -2ma_3 - l'\varpi - (p_{zz} - p_m) = 0, \end{cases}$$

et de trois équations identiques aux trois dernières équations du système (32).

En ajoutant membre à membre les équations (34), on trouve une équation qui entraîne la relation suivante :

$$(35) \qquad 2m + 3l' = 0.$$

Il résulte d'ailleurs des équations-limites obtenues qu'en cas de cessation de mouvement : les efforts tranchants seraient nuls et les efforts normaux aux éléments superficiels auraient p_m pour valeur commune. Il semble donc naturel d'admettre que l'on aura

$$p_m = p,$$

et, en définitive, on retomberait encore sur les formules de la théorie classique de la viscosité relative au cas particulier où les coefficients de la viscosité vérifieraient la relation (35).

Dans les applications que nous allons faire de la théorie que nous venons d'exposer, nous admettrons à titre de première approximation que les quantités λ, μ, T et T' sont des constantes et que la densité ρ du fluide est fonction de la pression seule, cette dernière hypothèse étant réellement vérifiée tant dans le cas où le fluide serait maintenu à une température constante que dans celui où la conductibilité calorifique du fluide serait nulle.

CHAPITRE II.

SUR LA PROPAGATION DES DISCONTINUITÉS DU SECOND ORDRE DANS UN FLUIDE EN MOUVEMENT.

5. Nous nous proposons maintenant d'étudier la propagation des discontinuités du second ordre dans un fluide en mouvement. Pour effectuer cette étude, nous n'aurons qu'à appliquer la théorie que M. Hadamard a complétée et développée avec tant de perfection dans ses remarquables *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*.

Les éléments qui se présentent en dynamique des corps continus sont des fonctions de quatre variables dont trois représentent les coordonnées du point physique du corps considéré et dont la quatrième définit l'époque à laquelle on envisage ce point.

Il est donc commode de se servir, en dynamique des corps continus, du langage de la géométrie à quatre dimensions.

Considérons un fluide (F) rapporté à un système galiléen (S) de coordonnées cartésiennes rectangulaires. Les éléments relatifs à un point physique M du fluide devront être considérés comme définis dans un domaine à quatre dimensions (E_4) et seront fonctions des coordonnées cartésiennes x, y, z du point M et de l'époque t à laquelle on considère ce point.

Pour éviter des difficultés d'ordre topologique, nous ne supposerons pas que le domaine (E_4) coïncide avec tout le domaine (E'_4) qu'il faut envisager pour étudier le mouvement de toute la masse du fluide; nous admettrons, au contraire, que le domaine (E_4) constitue une partie assez petite du domaine (E'_4) pour que les considérations que nous allons développer soient légitimes.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation d'une hypersurface partageant le domaine (E_4) en deux régions (R_1) et (R_2) telles que, à l'intérieur de chacune d'elles les équations du mouvement du fluide soient vérifiées sans l'être sur l'hypersurface (1) elle-même. Nous supposerons que les dérivées premières

(2) $$f'_x, \quad f'_y, \quad f'_z, \quad f'_t$$

de la fonction $f(x, y, z, t)$ sont continues dans le domaine que l'on a à envisager, et que, en tout point de l'hypersurface (1) situé à l'intérieur du domaine (E_4), on a

(3) $$f'_t \neq 0.$$

Nous admettrons que les composantes u, v, w de la vitesse d'un point physique M du fluide, ainsi que la densité ρ et les efforts p_{xx}, p_{yz}, ... en M sont continus même à la traversée de l'hypersurface (1) mais qu'il n'en est pas de même des dérivées premières des fonctions u, v, w et peut-être des dérivées des fonctions p_{xx}, p_{yz}, ... ainsi que de la fonction ρ.

Nous supposerons, en outre, que les dérivées premières des fonctions précédentes tendent vers des limites déterminées lorsque le point (x, y, z, t), en restant à l'intérieur de l'une des régions (R_1) ou (R_2), tend vers quelque point M de l'hypersurface (1). Enfin nous supposerons que ces limites sont des fonctions continues des coordonnées du point M. Cela posé nous allons chercher à déterminer la nature de l'hypersurface (1). A cet effet désignons pour un moment par $\Phi(x, y, z, t)$ l'une quelconque des fonctions

(4) $$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}, \quad p_{yz}, \quad p_{zx}, \quad p_{xy},$$

par σ l'une quelconque des variables x, y, z, t, par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_1$ la limite de la dérivée $\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}$ lorsque le point (x, y, z, t) tend vers un point M situé sur l'hypersurface (1) à l'intérieur du domaine (E_4) en restant à l'intérieur de la région (R_1) et par $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_2$ la limite de la même dérivée lorsque le point (x, y, z, t) tend vers le même point M en restant à l'intérieur de la région (R_2). Nous poserons enfin

(5) $$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right] = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_1.$$

Ces notations étant bien comprises, on démontre, en tenant compte de la continuité de la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ à la traversée de l'hypersurface (1) ainsi que de l'inégalité (3), qu'il correspondra à la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ une fonction l des coordonnées du point M vérifiant le système suivant d'équations

$$(6) \quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] = l f'_x, \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right] = f'_y, \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] = l f'_z, \qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] = l f'_t.$$

6. Les équations du mouvement du fluide (F) n'étant pas linéaires, il est indispensable de préciser le problème de la recherche de l'hypersurface (1) en se donnant l'état du fluide dans l'une des régions (R_1) ou (R_2), soit dans la région (R_1). Le cas le plus intéressant, comme accessible à une étude expérimentale, est celui où le fluide serait au repos dans la région (R_1) et où les efforts intérieurs se réduiraient à la pression hydrostatique dans cette région. C'est à l'étude de ce cas que nous allons nous borner. Nous admettrons que le fluide considéré (F) est pesant et, en remarquant que, dans le cas actuel, l'effet perturbateur de la rotation de la terre est négligeable, nous rapporterons le fluide à un système de coordonnées fixe par rapport à la terre en dirigeant le troisième axe de ce système de coordonnées (l'axe des z) vers le haut suivant la verticale du lieu où l'on se trouve. Nous aurons donc dans les équations (21) (p. 11)

$$X = Y = 0, \qquad Z = -\rho g,$$

où g désigne l'accélération due à la pesanteur.

Il résulte des équations (20) (p. 10), (21) et (22) (p. 11) que les quantités représentées par les expressions déduites de celles qui forment les premiers membres des équations (5) en y substituant, à la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, successivement chacune des fonctions (4), vérifieront un certain système (Σ) d'équations linéaires et homogènes.

En formant le système d'équations (Σ) on devra tenir compte de ce que, en vertu de l'hypothèse faite au sujet de l'état du fluide dans la région (R_1) et de la continuité des quantités (4) à la traversée de l'hypersurface (1), l'on aura, sur cette hypersurface les égalités suivantes :

$$(7) \qquad u = v = w = p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0, \qquad p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p.$$

Cela posé, le système d'équations (Σ) sera le suivant :

$$(8)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial p_{xx}}{dt}\right] = -2\mu\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] - \lambda\left\{\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[\dfrac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]\right\}, \\ \left[\dfrac{\partial p_{yz}}{dt}\right] = -\mu\left\{\left[\dfrac{\partial v}{\partial z}\right] + \left[\dfrac{\partial w}{\partial y}\right]\right\}, \\ \rho\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}\right] = -\left\{\left[\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x}\right] + \left[\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y}\right] + \left[\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right]\right\}, \end{cases}$$

avec les équations qui se déduisent des précédentes par voie de permutations cycliques des lettres x, y, z et en même temps des lettres u, v, w, ainsi que l'équation suivante :

$$(8')\qquad \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] + \rho\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\} = 0.$$

7. Désignons maintenant par l_1, l_2, et l_3 les quantités qu'il faudra substituer dans les formules (6) à l quand on substitue successivement à la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ les fonctions u, v, w, par h_1, h_2, h_3, les quantités analogues à l_1, l_2, l_3, mais relatives aux fonctions p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, par s_1, s_2, s_3 les quantités analogues aux précédentes mais relatives aux fonctions p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} et enfin par k la quantité qui, dans les formules (6), devra être substituée à l à la suite de la substitution, dans ces formules, de la fonction ρ à la fonction Φ. Ces notations étant adoptées, substituons à la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, dans les formules (6), successivement chacune des fonctions (4) et, au moyen des formules obtenues de cette façon, éliminons des équations (8) les quantités en lesquelles se transforment les premiers membres des égalités (6) quand on y substitue à la fonction $\Phi(x, y, z, t)$ successivement chacune des fonctions (4). On obtiendra de cette façon un système de dix équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues

$$(9)\qquad l_1,\quad l_2,\quad l_3,\quad h_1,\quad h_2,\quad h_3,\quad s_1,\quad s_2,\quad s_3,\quad k.$$

En écrivant que les équations précédentes admettent une solution avec des valeurs non toutes nulles des inconnues, on obtiendra une condition nécessaire que devra vérifier la fonction $f(x, y, z, t)$, formant le premier membre de l'équation (1).

Pour obtenir cette condition, on pourra, en tenant compte de ce que, par hypothèse, on a l'inégalité (3), éliminer entre les équations susdites les inconnues h_1, h_2, h_3, s_1, s_2, s_3 ce qui donnera un système d'équations qui, après avoir posé

$$(10)\qquad A = l_1 f'_x + l_2 f'_y + l_3 f'_z,$$

$$(11)\qquad B = f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z,$$

se composera des trois équations suivantes :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\rho f'^2_t - \mu B) l_1 - (\lambda + \mu) f'_x A = 0, \\ (\rho f'^2_t - \mu B) l_2 - (\lambda + \mu) f'_y A = 0, \\ (\rho f'^2_t - \mu B) l_3 - (\lambda + \mu) f'_z A = 0, \end{array}\right.$$

et de l'équation que voici :

$$(13)\qquad f_t k + \rho A = 0.$$

On reconnaît de suite que, pour que les dix équations linéaires et homogènes aux inconnues (9), définies plus haut, puissent être satisfaites par des valeurs non toutes nulles des inconnues, il faut et il suffit que le système d'équations (12) puisse être vérifié par des valeurs non toutes nulles des trois inconnues l_1, l_2, l_3. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est la suivante :

$$(\rho f'^2_t - \mu B)(\rho f'^2_t - [2\mu + \lambda] B) = 0.$$

Il résulte de là et de l'expression (11) de B que la fonction $f(x, y, z, t)$ doit vérifier soit l'équation aux dérivées partielles

$$(14)\qquad \rho f'^2_t - \mu \{ f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z \} = 0,$$

soit l'équation aux dérivées partielles :

$$(15)\qquad \rho f'^2_t - (2\mu + \lambda) \{ f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z \} = 0.$$

Nous avons été conduit à admettre (p. 14) que l'on a

$$(16)\qquad \mu > 0$$

ainsi que

$$3\lambda + 2\mu > 0.$$

On aura donc aussi

$$(17)\qquad 2\mu + \lambda > 0.$$

Il résulte des inégalités (16) et (17) que chacune des équations (14) et (15) admettra des intégrales réelles.

Voici maintenant la question qui se présente d'elle-même à notre attention. La fonction $f(x, y, z, t)$ vérifiant l'une des équations (14) ou (15), existe-t-il un mouvement du fluide tel que l'équation (1) représente une hypersurface de discontinuité de ce mouvement de la nature considérée? Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que les équations du mouvement du fluide admettent une solution telle que, dans la région (R_2), les fonctions u, v, w ne soient pas toutes nulles et que, sur l'hypersurface (1), les conditions (7) soient satisfaites. Sans approfondir la question, nous nous bornerons à dire que, du moins lorsque l'intégrale $f(x, y, z, t)$ de l'une des équations (14) ou (15) satisfait à des conditions de régularité convenables, il existe certainement une solution des équations du mouvement du fluide vérifiant les conditions susdites.

Si l'hypersurface de discontinuité du mouvement du fluide, définie par l'équation (1), satisfait à l'équation (14), la quantité A, définie par la formule (10), est, en vertu des équations (12), égale à zéro; on a donc

$$l_1 f'_x + l_2 f'_y + l_3 f'_z = 0,$$

ce qui prouve que, dans le cas actuel, on a une onde transversale [1] laquelle, comme nous l'apprend l'équation (14), se propage avec une vitesse dont le carré est égal à

$$\frac{\mu}{\rho}.$$

Si au lieu de vérifier l'équation (14), la fonction $f(x, y, z, t)$ vérifiait l'équation (15), les quantités l_1, l_2, l_3 seraient, comme cela résulte des équations (12), proportionnelles aux dérivées f'_x, f'_y, f'_z de la fonction $f(x, y, z, t)$; on aurait donc une onde longitudinale et il résulte de l'équation (15) que le carré de la vitesse de propagation de cette onde serait égal à

$$\frac{2\mu + \lambda}{\rho}.$$

Les vitesses de propagation des ondes transversales et des ondes longitudinales étant différentes, la constatation expérimentale de ce fait constituerait une confirmation de la théorie que nous proposons.

---

(1) HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Paris, chez Hermann, n° 115, p. 117.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE LA ROTATION D'UN CYLINDRE SOLIDE DE RÉVOLUTION, BAIGNANT DANS UN LIQUIDE.

1. Position du problème et introduction d'un système approprié de variables.

8. Désignons par $(\mathcal{C})$ un cylindre solide de révolution et supposons que ce cylindre puisse tourner autour de son axe de révolution, fixe par rapport à la terre et vertical. Supposons, en outre, que le cylindre $(\mathcal{C})$ baigne dans un liquide incompressible, pesant, contenu dans un vase $(\mathcal{V})$, fixe par rapport à la terre et ayant la forme d'un cylindre de révolution de même axe que le cylindre $(\mathcal{C})$. Supposons que le cylindre $(\mathcal{C})$ tourne sous l'influence d'un couple de moment constant et, qu'à une époque t_0, où un régime permanent dans le système matériel considéré se serait établi, on supprime le couple précédent en abandonnant le cylindre $(\mathcal{C})$ à lui-même. Cela posé, nous nous proposons d'étudier le mouvement du cylindre $(\mathcal{C})$ à partir de l'époque t_0, après avoir, bien entendu, déterminé le mouvement du système matériel considéré jusqu'à l'époque t_0 pendant une période où un régime permanent aurait persisté.

Pour rendre ce problème abordable, il faudra évidemment adopter certaines hypothèses simplificatrices. Tout d'abord nous négligerons l'effet perturbateur de la rotation de la terre en regardant celle-ci comme un système de référence galiléen. Nous admettrons encore que la surface libre du liquide se réduit à une portion de plan horizontal; ce plan sera situé entre les deux bases du cylindre puisque nous avons admis que le cylindre émergeait partiellement du liquide. L'hypothèse que la surface libre du liquide est plane est certainement très approximativement conforme à la réalité lorsque la vitesse angulaire du cylindre $(\mathcal{C})$ est assez petite et lorsque le rapport de la différence des rayons du cylindre $(\mathcal{C})$ et du vase contenant le liquide qui baigne le cylindre $(\mathcal{C})$ au rayon de celui-ci est assez petit. En dehors des hypothèses précédentes, nous admettrons encore que la portion du liquide comprise entre le plan de la surface libre et le plan de la base inférieure du cylindre ($\mathcal{C}$) se meut par tranches cylindriques de révolution de même axe que le cylindre ($\mathcal{C}$) et enfin, en formant l'équation du mouvement du cylindre ($\mathcal{C}$), nous supposerons que l'effet du liquide sur la base inférieure de celui-ci est négligeable. Ces hypothèses sont, nous semble-t-il, admissibles au cas où le rapport du rayon du cylindre ($\mathcal{C}$) à la distance de la surface libre du liquide au plan de la base inférieure du cylindre est assez petit.

Cela posé nous rapporterons le système matériel dont il s'agit d'étudier le mouvement à un système (S) de coordonnées cartésiennes rectangulaires, fixe par rapport à la terre et ayant pour axe des z l'axe du cylindre ($\mathcal{C}$); pour fixer les idées, nous placerons l'origine O du système de coordonnées (S) dans le plan de la base inférieure du cylindre et nous dirigerons l'axe des z vers le haut. Considérons maintenant un point physique M du liquide, situé entre la base inférieure du cylindre ($\mathcal{C}$) et la surface libre du liquide, et désignons par

$$(1)\qquad \mathcal{T}_1,\quad \mathcal{T}_2,\quad \mathcal{T}_3,\quad \mathcal{N}_1,\quad \mathcal{N}_2,\quad \mathcal{N}_3,$$

les transformées des quantités

$$(2)\qquad p_{xx},\quad p_{yy},\quad p_{zz},\quad p_{yz},\quad p_{zx},\quad p_{xy},$$

quand on passe du système de coordonnées (S) au système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x', y', z') de même origine que le système (S), et dont l'axe des z' se confond avec l'axe des z du système (S) mais dans lequel les coordonnées du point M ont les valeurs suivantes :

$$x' > 0,\qquad y' = 0,\qquad z' = z.$$

Posons

$$x' = r$$

et désignons par φ l'angle formé par l'axe des x' du système de coordonnées (S') avec l'axe des x du système (S). Nous aurons pour les deux premières coordonnées du point M dans le système (S) les formules suivantes :

$$x = r\cos\varphi,\qquad y = r\sin\varphi$$

et les projections u, v, w de la vitesse du point M sur les axes du système de coordonnées (S) auront les valeurs suivantes :

$$(3)\qquad u = -r\omega\sin\varphi,\qquad v = r\omega\cos\varphi,\qquad w = 0,$$

où l'on a posé

$$(4) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

En vertu des hypothèses que nous avons adoptées, la quantité ω ne sera fonction que des variables r et t, mais les quantités (1) pourront dépendre non seulement de ces deux variables mais encore de la coordonnée z du point M.

En s'appuyant sur le théorème I (p. 6) on exprimera les quantités (2) en fonction des quantités (1) et, après avoir porté ces expressions des quantités (2) et les valeurs (3) de u, v, w dans les équations générales de l'hydrodynamique établies au Chapitre I, on arrivera finalement, après avoir effectué quelques simplifications évidentes, au système d'équations suivant :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{N}_1 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} - r\frac{\partial \omega}{\partial r}\mathfrak{T}_3, \\ \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{N}_2 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} + r\frac{\partial \omega}{\partial r}\mathfrak{T}_3, \\ \frac{\partial \mathfrak{N}_3}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{N}_3 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'}, \\ \frac{\partial \mathfrak{T}_1}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{T}_1}{T} + \frac{r}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r}\mathfrak{T}_2, \\ \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathfrak{T}_2}{T} - \frac{r}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r}\mathfrak{T}_1, \\ \frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial t} &= -\mu r\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\mathfrak{T}_3}{T} + \frac{r}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r}(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2), \\ -\rho r \omega^2 &= -\left\{ \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) \right\}, \\ \rho r \frac{d\omega}{dt} &= -\left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial r} + \frac{2}{r}\mathfrak{T}_3 \right\}, \\ 0 &= -\left\{ \frac{\partial \mathfrak{T}_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathfrak{T}_2 \right\} - \frac{\partial \mathfrak{N}_3}{\partial z} - \rho g, \end{aligned} \right.$$

où g représente l'accélération due à la pesanteur et où l'on a posé

$$(6) \qquad 3p_m = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3.$$

Nous admettrons dans ce qui va suivre qu'il y a adhérence du liquide, sans glissement, tant au cylindre ($\mathcal{C}$) qu'aux parois du vase qui le contient.

2. Cas où un régime permanent se serait établi.

9. Pour résoudre le problème énoncé dans le numéro précédent, il nous faut d'abord faire l'étude du cas où, dans le système matériel considéré, un régime permanent se serait établi. Dans ce cas la vitesse angulaire ω sera fonction de la seule variable r et chacune des quantités (1) ne pourra dépendre que de cette variable et de la coordonnée z du point physique du liquide auquel elle se rapporte. Par conséquent le système d'équations (5) se réduira au suivant :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
0 &= -\frac{\mathfrak{N}_1 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} - r\frac{d\omega}{dr}\mathfrak{T}_3,\\
0 &= -\frac{\mathfrak{N}_2 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'} + r\frac{d\omega}{dr}\mathfrak{T}_3,\\
0 &= -\frac{\mathfrak{N}_3 - p}{T} - \frac{p_m - p}{T'},\\
0 &= -\frac{\mathfrak{T}_1}{T} + \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr}\mathfrak{T}_2,\\
0 &= -\frac{\mathfrak{T}_2}{T} - \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr}\mathfrak{T}_1,\\
0 &= -\mu r\frac{d\omega}{dr} - \frac{\mathfrak{T}_3}{T} + \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr}(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2),\\
-\rho r\omega^2 &= -\left(\frac{d\mathfrak{N}_1}{dr} + \frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}{r}\right),\\
0 &= -\left(\frac{d\mathfrak{T}_3}{dr} + \frac{2}{r}\mathfrak{T}_3\right),\\
0 &= -\left(\frac{d\mathfrak{T}_2}{dr} + \frac{1}{r}\mathfrak{T}_2\right) - \frac{d\mathfrak{N}_3}{dz} - \rho g.
\end{aligned}\right.$$

Les quatrième et cinquième équations du système précédent donnent

$$(8)\qquad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 = 0.$$

Ajoutons membre à membre les deux premières équations du système (7) et retranchons membre à membre de l'équation obtenue la troisième équation, multipliée préalablement par 2. L'équation obtenue sera équivalente à la suivante :

$$(9)\qquad \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 - 2\mathfrak{N}_3 = 0.$$

Cette équation et la formule (6) nous donneront la suivante :

$$(10) \qquad p_m = \mathfrak{N}_3.$$

Cette égalité et la troisième équation du système (7) entraînent l'équation.

$$\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right)(\mathfrak{N}_3 - p) = 0,$$

d'où il résulte en vertu des relations (26) et (29) (p. 12) que l'on a :

$$(11) \qquad \mathfrak{N}_3 - p = 0.$$

Retranchons membre à membre de la deuxième des équations (7) la première et adjoignons à l'équation obtenue les quatre dernières équations du système (7), en simplifiant la dernière de ces équations au moyen de la seconde des équations (8). Nous arriverons de cette façon au système d'équations suivant :

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}{T} + 2r\frac{d\omega}{dr}\mathfrak{T}_3 = 0,\\
&-\mu r\frac{d\omega}{dr} - \frac{\mathfrak{T}_3}{T} + \frac{r}{2}\frac{d\omega}{dr}(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2) = 0,\\
&-\rho r\omega^2 = -\left(\frac{d\mathfrak{N}_1}{dr} + \frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}{r}\right),\\
&-\left(\frac{d\mathfrak{T}_3}{dr} + \frac{2}{r}\mathfrak{T}_3\right) = 0,\\
&-\frac{d\mathfrak{N}_3}{dz} - \rho g = 0.
\end{aligned}\right.$$

On vérifiera aisément que l'ensemble des équations (8), (9), (10), (11) et (12) est équivalent à l'ensemble du système d'équations (7) et de la formule (6). C'est donc à la résolution du système susdit d'équations que le problème est ramené.

En portant la valeur de $\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2$, tirée de la première des équations (12) dans la deuxième de ces équations, on trouve une équation équivalente à la suivante :

$$(13) \qquad T^2 r^2 \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 \mathfrak{T}_3 + \mu T r \frac{d\omega}{dr} + \mathfrak{T}_3 = 0.$$

La quantité ω étant, par hypothèse, fonction de la seule variable r, il résulte de l'équation précédente que la quantité $\mathfrak{T}_3$ sera aussi fonction de cette seule variable. Cela posé, la quatrième des équations (12) donne

$$(14) \qquad \mathfrak{T}_3 = \frac{A}{r^2},$$

en désignant par A une constante d'intégration. Après avoir porté la valeur (14) de $\mathfrak{T}_3$ dans l'équation (13) et après avoir multiplié l'équation obtenue par r^2 on trouvera l'équation suivante :

$$(15) \qquad AT^2 r^2 \left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 + \mu T r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} + A = 0.$$

Désignons maintenant par R_0 le rayon du cylindre ($\mathcal{C}$), par R celui du vase qui contient le liquide baignant ce cylindre et soit ω_0 la vitesse angulaire donnée de la rotation du cylindre considéré. La constante A et la constante d'intégration de l'équation (15) se détermineront sans ambiguïté par les conditions que, pour $r = R_0$, l'on ait $\omega = \omega_0$ et que, pour $r = R$, l'on ait $\omega = 0$. L'intégration exacte de l'équation (15) n'offre aucune difficulté (1) mais, comme pour étudier le mouvement du cylindre ($\mathcal{C}$) à partir de l'époque où il serait abandonné à lui-même, nous admettrons, pour rendre le problème abordable, que la rotation du cylindre ($\mathcal{C}$) est assez lente pour que les termes du second degré par rapport aux quantités ω, $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ et $\mathfrak{T}_3$ soient négligeables, nous remplacerons, pour éviter des complications inutiles, l'équation (15) par l'équation approchée suivante :

$$\eta T r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} + A = 0.$$

Après avoir déterminé la constante A et la constante qui s'introduit par l'intégration de l'équation précédente, par les conditions indiquées

---

(1) On trouve en effet

$$\omega = \frac{1}{T}\left\{ \operatorname{arc\,tg} s - \frac{s}{2} \right\} + \text{const.}$$

en posant

$$s = \frac{\mu r^2 - \sqrt{\mu^2 r^4 - 4A^2}}{2A},$$

où l'on doit prendre la détermination positive du radical puisque l'on doit avoir

$$\lim_{A \to 0} \omega = 0.$$

plus haut, on arrive aux formules définitives suivantes :

$$(16)\qquad A = \frac{2\mu T}{\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}}\,\omega_0; \qquad \omega = \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}}\,\omega_0.$$

Il résulte d'ailleurs de la première et de la troisième des équations (12) que, avec le degré d'approximation adopté, nous aurons

$$(17)\qquad \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = 0,$$

$$(18)\qquad \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial r} = 0.$$

Les égalités (9) et (17) donnent

$$\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_1.$$

Par conséquent, à cause de l'égalité (18), la quantité $\mathcal{N}_3$ sera indépendante de r et la dernière des équations (12) nous donnera

$$\mathcal{N}_3 = -\rho g z + \text{const.},$$

où la constante d'intégration devra être déterminée par la condition que, à la surface libre du liquide, la pression $\mathcal{N}_3$ devra être égale à

$$+p_0,$$

en désignant par p_0 la valeur absolue de la pression atmosphérique. Nous aurons donc en définitive

$$\mathcal{N}_3 = +\rho g(h - z) + p_0,$$

en désignant par h la distance verticale de la surface libre du liquide au plan de la base inférieure du cylindre. J'ajoute qu'il est très aisé de calculer le moment $\mathcal{E}$ par rapport à l'axe du cylindre du couple moteur. En effet, si l'on désigne par $\mathcal{T}_3^{(0)}$ la valeur de l'effort tranchant $\mathcal{T}_3$ pour $r = R_0$ et par $\mathcal{E}_0$ le moment par rapport à l'axe du cylindre $(\mathcal{C})$ des forces de frottement aux pivots de celui-ci et si l'on néglige l'effet du liquide sur la base inférieure du cylindre, ce qui est permis lorsque le rapport de h au rayon du cylindre est assez grand, on aura

$$\mathcal{E} = 2\pi R_0^2 h \mathcal{T}_3^{(0)} - \mathcal{E}_0,$$

d'où, en se rapportant aux formules (14) et (16),

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi h \mu T R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2} - \mathcal{E}_0, \tag{19}$$

où, rappelons-le, le signe du nombre $\mathcal{E}_0$ est toujours opposé à celui du nombre ω_0.

La formule (19) pourrait évidemment être utilisée pour déterminer par l'expérience la valeur du produit μT.

3. Cas où le cylindre $(\mathcal{C})$ est abandonné à lui-même; réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles.

10. Abordons maintenant l'étude du système matériel considéré lorsque, à partir d'une certaine époque, soit $t = 0$, le couple moteur est supprimé et le cylindre $(\mathcal{C})$ est abandonné à lui-même.

A cet effet il nous faudra recourir au système d'équations (5) (p. 24).

Le domaine dans lequel les fonctions qui entrent dans ces équations doivent être définies est déterminé par les relations suivantes :

$$R_0 \leqq r \leqq R, \qquad t \geqq 0, \qquad 0 \leqq z \leqq h, \tag{20}$$

où, rappelons-le, R_0 désigne le rayon du cylindre $(\mathcal{C})$, R celui du vase qui contient le liquide baignant le cylindre $(\mathcal{C})$ et h la distance verticale du plan de la surface libre du liquide au plan de la base inférieure du cylindre. La fonction ω sera, par hypothèse, indépendante de z, mais les quantités

$$\mathfrak{N}_1, \quad \mathfrak{N}_2, \quad \mathfrak{N}_3; \quad \mathfrak{T}_1, \quad \mathfrak{T}_2, \quad \mathfrak{T}_3; \quad p, \tag{21}$$

ou certaines d'entre elles, pourront dépendre de la variable susdite. Il est impossssible de demander que les équations (5) soient vérifiées en tout point du domaine défini par les relations (20) car, à cause des conditions aux limites auxquelles il faudrait satisfaire, on se heurterait à un problème insoluble. Nous n'excluerons donc pas l'éventualité où sur certaines caractéristiques du système d'équations (5), ces équations cesseraient d'être vérifiées, mais nous rechercherons une solution où toutes les fonctions (21) ainsi que la fonction ω seraient des fonctions continues dans tout le domaine (20). Cela posé, ajoutons membre à membre les deux premières équations du système (5) (p. 24) et retranchons de l'équation obtenue, la troisième du même système après l'avoir multipliée préalablement par 2; il viendra :

$$\frac{\partial(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2-2\mathfrak{N}_3)}{\partial t}=-\frac{\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2-2\mathfrak{N}_3}{T}.$$

L'expression $\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2-2\mathfrak{N}_3$ représentant une fonction continue, l'équation précédente donne

$$\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2-2\mathfrak{N}_3=f(r,z)e^{-\frac{t}{T}},$$

où $f(r. z)$ représente une fonction arbitraire de r et de z. Mais, pour $t=0$, on a l'égalité (9). Donc la fonction $f(r,z)$ est identiquement nulle et, par conséquent. on a

$$\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2-2\mathfrak{N}_3=0 \tag{22}$$

dans tout le domaine (20).

La quatrième et la cinquième équation du système (5) (p. 24) donnent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\mathfrak{T}_1^2+\mathfrak{T}_2^2)}{\partial t}=-\frac{\mathfrak{T}_1^2+\mathfrak{T}_2^2}{T}.$$

Or, pour $t=0$, on a les égalités (8). Il résulte donc de l'équation différentielle précédente et de la continuité des fonctions $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ que l'on a

$$\mathfrak{T}_1=\mathfrak{T}_2=0 \tag{23}$$

dans tout le domaine (20). Eu égard aux équations (22) et (23) il suffira, pour satisfaire aux équations (5) (p. 24), de satisfaire aux deux premières de ces équations ainsi qu'aux quatre dernières d'entre elles. D'ailleurs, puisque nous sommes convenus de ne considérer qu'un mouvement assez lent du système matériel qui nous occupe pour que les termes du second degré par rapport aux quantités ω, $\frac{\partial\omega}{\partial r}$ et $\mathfrak{T}_3$ soient négligeables, on pourra substituer aux équations auxquelles il nous reste à satisfaire, les suivantes :

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{N}_1 - p}{\mathrm{T}} - \frac{p_m - p}{\mathrm{T}'},\\
\frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial t} &= -\frac{\mathcal{N}_2 - p}{\mathrm{T}} - \frac{p_m - p}{\mathrm{T}'},\\
\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial t} &= -\mu r\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\mathcal{E}_3}{\mathrm{T}} + \frac{r}{2}\frac{\partial \omega}{\partial r}(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2),\\
0 &= -\left(\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial r} + \frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2}{r}\right),\\
\rho r\frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial r} + \frac{2}{r}\mathcal{E}_3\right),\\
0 &= -\frac{\partial \mathcal{N}_3}{\partial z} - \rho g,
\end{aligned}\right.$$

où, en écrivant la dernière équation, nous avons tenu compte de la deuxième des équations (23).

En retranchant membre à membre la seconde équation du système précédent de la première, on trouve

$$\frac{\partial(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)}{\partial t} = -\frac{\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2}{\mathrm{T}}.$$

Or, nous avons reconnu que, avec le degré d'approximation adopté, on a, pour $t = 0$, l'égalité (17). Nous aurons donc

$$(27)\qquad \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = 0$$

dans tout le domaine (20). En se reportant à l'équation (22) ainsi qu'à la formule (6) (p. 24) qui sert de définition au symbole p_m, on reconnaîtra que, en vertu de l'équation (27), l'on a les égalités suivantes :

$$(28)\qquad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_3 = p_m.$$

Désignons par p_0 la valeur absolue de la pression atmosphérique sur la surface libre du liquide. On devra évidemment avoir

$$(\mathcal{N}_3)_{z=h} = p_0$$

Donc, en vertu de la dernière des équations du systéme (26), nous aurons

$$(29)\qquad \mathcal{N}_3 = g\rho(h - z) + p_0.$$

Les équations (28) et (29) entraînent en particulier l'égalité

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial t} = 0.$$

Par conséquent la première des équations (26) et les équations (28) donnent

$$-\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right)(p_m - p) = 0,$$

d'où, en vertu des relations (26) et (29),

$$p_m - p = 0. \tag{30}$$

Les relations (28), (29) et (30) entraînent la première, la seconde, la quatrième et la sixième des équations (26). Il ne nous reste donc plus qu'à satisfaire à la troisième et à la cinquième de ces équations. En vertu de l'une des égalités (28), les deux équations que nous avons encore à résoudre peuvent s'écrire comme il suit :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial t} &= -\mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\mathfrak{T}_3}{T}, \\ \rho r \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial t} + \frac{2}{r}\mathfrak{T}_3\right). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Il est aisé de reconnaître que la fonction $\mathfrak{T}_3$ est indépendante de la variable z. En effet, dérivons la première des équations précédentes par rapport à z. La fonction ω ne dépendant pas de cette variable, il viendra

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial z}\right) = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial z}\right). \tag{32}$$

Or, pour $t = 0$, la fonction $\mathfrak{T}_3$ est définie par la formule (14) où A est une constante. Donc, pour $t = 0$, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_3}{\partial z} = 0. \tag{33}$$

Par conséquent, il résulte de l'équation (32) que l'égalité (33) subsiste dans tout le domaine (20). La fonction $\mathfrak{T}_3$ est donc bien indépendante de la variable z.

La seconde des équations (31) équivaut à la suivante :

$$\rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial (r^2 \mathfrak{T}_3)}{\partial r},$$

qui exprime qu'il existe une fonction $\Phi(r, t)$ des variables r et t telle que l'on ait :

$$\left\{\begin{aligned} \rho r^3 \omega &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ r^2 \mathfrak{T}_3 &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Portons ces valeurs de ω et de $\mathfrak{T}_3$ dans la première des équations (31) et posons

$$a = \frac{\mu T}{\rho}. \tag{35}$$

Nous obtiendrons une équation équivalente à la suivante :

$$a\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 3\frac{a}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - T\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{36}$$

Bien entendu, dans tout le domaine (D) dans lequel la fonction $\Phi(r, t)$ devra être déterminée, domaine défini par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} & R_0 \leqq r \leqq R, \\ & t \geqq 0, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

les dérivées premières de la fonction $\Phi(r, t)$, comme d'ailleurs cette fonction elle-même, devront être continues; c'est ce qui résulte des équations (34) et de ce que, dans le domaine considéré, la vitesse angulaire ω et l'effort tranchant $\mathfrak{T}_3$ seront nécessairement continus.

En revanche les dérivées secondes de la fonction $\Phi(r, t)$ pourront cesser d'exister en certains points situés à l'intérieur du domaine, points dont l'ensemble constituera un système de portions de caractéristiques de l'équation (36) et où, évidemment, l'équation (36) ne sera pas vérifiée.

Occupons-nous maintenant des « conditions aux limites » auxquelles la fonction $\Phi(r, t)$ devra satisfaire.

1° On doit avoir, pour $t \geqq 0$,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \tag{38}$$

comme cela résulte de la première des égalités (34) et de ce que le liquide adhère au vase qui le contient.

2° Les formules (34) doivent fournir pour $t = 0$ et pour les valeurs de r qui satisfont aux relations

$$R_0 \leqq r \leqq R \tag{39}$$

des valeurs de ω et de $\mathfrak{T}_3$ identiques à celles que fournissent la seconde des formules (16) (p. 28) et la formule (14) avec la valeur de A donnée par la première des formules (16). Donc, après avoir posé pour abréger l'écriture

$$B = \frac{R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2}, \tag{40}$$

les conditions considérées pourront s'énoncer comme il suit : pour les valeurs de r vérifiant les relations

$$R_0 \leqq r \leqq R, \tag{41}$$

on doit avoir

$$B\rho\left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{t=0}, \tag{42}$$

$$2\mu TB = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{t=0}. \tag{43}$$

3° La condition que doit vérifier la fonction $\Phi(r, t)$ sur la partie de la frontière du domaine (D) que définissent les relations

$$t \geqq 0, \qquad r = R_0$$

s'obtiendra en écrivant que le principe de d'Alembert est vérifié en ce qui concerne le cylindre ($\mathcal{C}$). En se reportant à la première des formules (34) et en désignant par $\mathcal{J}$ le moment d'inertie du cylindre ($\mathcal{C}$) par rapport à son axe de révolution Oz, on reconnaîtra que le moment de la force d'inertie par rapport à l'axe Oz est égal à

$$-\frac{\mathcal{J}}{\rho R_0^3}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial t}\right)_{r=R_0}.$$

D'autre part la somme des moments des forces sollicitant le cylindre ($\mathcal{C}$) par rapport à l'axe Oz se compose du moment $\mathcal{E}_0$ du frottement des pivots et du moment des forces exercées par le liquide sur le cylindre ($\mathcal{C}$) à cause de l'adhérence de celui-ci à la surface du cylindre; en négligeant l'effet du liquide sur la base inférieure du cylindre et en continuant à désigner par h la distance verticale du plan de cette base à la surface libre du liquide, on trouvera pour le moment en question l'expression suivante

$$-2\pi R_0^2\, h(\mathfrak{T}_3)_{r=R_0},$$

qui, en vertu de la deuxième des formules (34) est égale à

$$2\pi h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{r=R_0}.$$

En définitive, la condition qu'il s'agissait d'exprimer, peut se formuler comme il suit : pour $t \geqq 0$, on doit avoir

$$(44) \qquad -\frac{\mathcal{J}}{\rho R_0^3}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial t}\right)_{r=R_0} + 2\pi h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{r=R_0} + \mathcal{E}_0 = 0.$$

Il est presque superflu d'ajouter que, pour $\omega_0 \neq 0$, l'on aura

$$(45) \qquad \omega_0\,\mathcal{E}_0 < 0.$$

11. Les conditions que doit vérifier la fonction $\Phi(r, t)$ ne peuvent évidemment la déterminer qu'à une constante additive près que nous pourrons choisir à notre gré et nous en profiterons en transformant, comme nous allons l'expliquer maintenant, les conditions « aux limites » relatives à cette fonction.

Nous admettrons que le moment $\mathcal{E}_0$ du frottement des pivots du cylindre $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe de ce cylindre reste constant tant que la vitesse angulaire ω_0 du cylindre considéré reste différente de zéro.

Cela posé, nous transformerons les conditions (42) et (44) en intégrant les deux membres de l'égalité (42) par rapport à r et les deux membres de l'égalité (44) par rapport à t. Les constantes introduites par ces intégrations devront vérifier la relation qui dérive de la continuité de la fonction $\Phi(r, t)$, mais l'une d'elle pourra être choisie arbitrairement. Nous choisirons la constante introduite par l'intégration de l'équation (44) de façon que le résultat de cette intégration puisse s'écrire de la façon suivante :

$$(46) \qquad -\frac{\mathcal{J}}{\rho R_0^3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R_0} + 2\pi h\,\Phi(R_0, t) + \mathcal{E}_0 t = 0.$$

L'intégration de l'équation (42) nous donnera alors l'équation suivante :

$$\Phi(r, 0) = B\rho\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) + c_1, \tag{47}$$

où la constante c_1 sera donnée par la formule suivante :

$$c_1 = \frac{\mathcal{J}B}{2\pi h}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}\right) - B\rho\left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^4}{4R^2}\right). \tag{48}$$

En définitive le problème de la détermination du mouvement du cylindre $(\mathcal{C})$ est ramené au problème suivant :

II. *Déterminer une fonction* $\Phi(r, t)$ *des variables* r *et* t, *dans le domaine* (37), *continue avec ses dérivées premières dans tout ce domaine, vérifiant à l'intérieur du domaine susdit l'équation aux dérivées partielles* (36), *sauf peut-être sur certaines caractéristiques de cette équation et satisfaisant sur la frontière du domaine considéré aux équations* (38), (43), (47) *et* (46).

4. Transformation du problème II.

12. Il est très aisé de reconnaître qu'il est toujours possible de faire correspondre à un régime permanent donné du système matériel qui nous occupe, une intégrale $\Phi_1(r, t)$ de l'équation (36) telle que, après la substitution de la fonction $\Phi_1(r, t)$ à la fonction $\Phi(r, t)$ dans les formules (34), celles-ci fassent connaître les valeurs de ω et de $\mathfrak{T}_3$ qui conviennent au régime susdit de notre système matériel. Voici l'expression générale de la fonction $\Phi_1(r, t)$ qui convient à un régime permanent du système matériel que nous étudions

$$\Phi_1(r, t) = \frac{F}{2a}\left\{\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} - 2at\right\} + C, \tag{49}$$

où F et C sont des constantes dont la première dépend de la valeur constante ω_0 de la vitesse angulaire du cylindre $(\mathcal{C})$, la seconde étant tout à fait arbitraire.

Pour que les formules

$$r^2\mathfrak{T}_3 = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \tag{50}$$

et

$$\rho r^3 \omega = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \tag{51}$$

fournissent des valeurs de $\mathcal{T}_3$ et ω identiques à celles que fournissent les formules (14) et (16), il faut et il suffit que l'on ait

$$F = \frac{2\rho a \omega_0}{\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}} = \frac{2\mu T R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2} \quad (^1). \tag{52}$$

13. En revenant au problème II (p. 36), commençons par indiquer une forme nouvelle que l'on peut donner à ce problème. A cet effet, envisageons le mouvement dont le système matériel considéré est animé jusqu'à l'époque $t = 0$. D'après ce qui a été établi au numéro précédent, il suffira de porter dans la formule (49) la valeur (52) de la constante F, pour que les formules (50) et (51) fournissent les valeurs des fonctions ω et $\mathcal{T}_3$ qui conviennent aux époques non postérieures à l'époque $t = 0$.

Disposons de la constante arbitraire C qui subsistera dans l'expression de la fonction $\Phi_1(r, t)$ après y avoir porté la valeur (52) de F de façon que l'expression $\Phi_1(r, 0)$ représente une fonction identique à celle à laquelle doit se réduire, d'après la condition (47) (p. 36), la fonction $\Phi(r, t)$ pour $t = 0$.

En se reportant à la formule (40) on reconnaît que la chose est possible et que, pour la réaliser, il suffit de poser

$$C = c_1, \tag{53}$$

où c_1 a la valeur (48) (36).

Ayant disposé de la façon susdite des constantes arbitraires qui entrent dans l'expression (49) de la fonction $\Phi_1(r, t)$, on pourra, comme on le reconnaît de suite, formuler les conditions (43) (p. 34) et (47) de la façon suivante : pour les valeurs de r qui vérifient les relations

$$R_0 \leqq r \leqq R \tag{54}$$

(1) On rappelle qu'en vertu de la formule (35) on a : $a = \frac{\mu T}{\rho}$.

on doit avoir les égalités

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)_{t=0} \tag{55}$$

et

$$\Phi(r, 0) = \Phi_1(r, 0). \tag{56}$$

Mais la fonction $\Phi_1(r, t)$ n'est à considérer que pour les valeurs non positives de t et la fonction $\Phi(r, t)$ n'est définie jusqu'à présent que pour des valeurs non négatives de t. Par conséquent, eu égard à l'égalité (56), rien n'empêche d'étendre la définition de la fonction $\Phi(r, t)$ au domaine défini par l'ensemble des relations (54) et

$$t \leqq 0 \tag{57}$$

en spécifiant que, dans ce domaine, elle se confond avec ce que devient la fonction $\Phi_1(r, t)$ définie par la formule (49) quand on dispose des constantes arbitraires qu'elle contient en leur attribuant les valeurs (52) et (53).

Nous définirons donc la fonction $\Phi(r, t)$ dans le domaine déterminé par l'ensemble des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 \leqq r \leqq R, \\ t \leqq 0, \end{array} \right. \tag{58}$$

au moyen de la formule suivante :

$$\Phi(r, t) = \rho B\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) - 2\rho a B t + c_1, \tag{59}$$

où B a la valeur (40) et c_1 la valeur (48).

Actuellement le problème II peut être formulé de la façon suivante :

III. *La fonction $\Phi(r, t)$ étant définie dans le domaine* (58) *au moyen de la formule* (59), *prolonger cette fonction jusque dans le domaine déterminé par les relations*

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0 \leqq r \leqq R, \\ t > 0, \end{array} \right. \tag{60}$$

sans porter atteinte à la continuité de cette fonction elle-même et de ses dérivées premières de façon qu'elle vérifie dans ce domaine l'équation (36) (p. 33) *sauf peut-être sur certaines caractéris-*

tiques de cette équation et qu'elle satisfasse pour $t > 0$ ***aux conditions aux limites*** (38) *et* (46), *c'est-à-dire aux suivantes :*

$$(61)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \\ -\dfrac{\mathcal{J}}{\rho R_0^3}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=R_0} + 2\pi h\Phi(R_0, t) + \mathcal{E}_0 t = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, commençons par nous débarrasser du terme

$$\mathcal{E}_0 t$$

dans la seconde des conditions (61).

A cet effet posons

$$(62)\qquad \Phi(r, t) = \Phi_1(r, t) + \mathcal{F}(r, t),$$

où $\Phi_1(r, t)$ est la fonction définie par la formule (49) et, après avoir posé pour abréger l'écriture

$$(63)\qquad b = \frac{2\pi h R_0^3 \rho}{\mathcal{J}},$$

cherchons à disposer des constantes arbitraires F et C qui entrent dans l'expression de la fonction $\Phi_1(r, t)$, de façon que les conditions (61) entraînent, pour la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, les suivantes :

$$(64)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R} = 0, \\ \left\{\left(\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b\mathcal{F}(R_0, t)\right\}_{t>0} = 0. \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{F}(r, t)$ vérifiera la première des conditions précédentes quelles que soient les valeurs des constantes F et C; pour qu'elle satisfasse aussi à la seconde de ces conditions, il faut et il suffit, comme on le reconnaîtra aisément, que les constantes F et C soient déterminées au moyen des formules suivantes :

$$(65)\qquad \begin{cases} F = \dfrac{\mathcal{E}_0}{2\pi h} \\ C = \dfrac{\mathcal{E}_0}{4\pi a h}\left\{\dfrac{\mathcal{J}}{2\pi h\rho}\left(\dfrac{1}{R_0^2} - \dfrac{1}{R^2}\right) - \dfrac{R_0^2}{2} + \dfrac{R_0^4}{4R^2}\right\}. \end{cases}$$

Nous regarderons la fonction $\Phi_1(r, t)$ avec les valeurs (65) des constantes comme définie par la formule (49) dans tout le domaine déterminé par les relations

$$(66)\qquad \begin{cases} R_0 \leqq r \leqq R \\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$$

Dans la partie du domaine précédent où l'on a

$$(67)\qquad t \leqq 0,$$

la fonction $\Phi(r, t)$ est connue puisqu'elle coïncide avec ce que devient la fonction $\Phi_1(r, t)$ quand on porte dans la formule (49) la valeur (52) de F et la valeur (53) de C. D'autre part la fonction $\Phi_1(r, t)$ qui figure dans la formule (62) se confond avec celle que définirait la formule (49) si l'on y portait les valeurs (65) des constantes F et C.

Cela étant, on s'assure aisément que, après avoir posé

$$(68)\qquad \begin{cases} H = \dfrac{\rho R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2} - \dfrac{\mathcal{E}_0}{4\pi a h}, \\ G = \dfrac{2\rho a R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2} - \dfrac{\mathcal{E}_0}{2\pi h}, \\ L = \dfrac{\mathcal{J}}{2\pi h}\left\{\omega_0 - \dfrac{\mathcal{E}_0}{4\pi a \rho h}\left(\dfrac{1}{R_0^2} - \dfrac{1}{R^2}\right)\right\} \\ \qquad + \left\{-\dfrac{\rho R_0^2 R^2 \omega_0}{R^2 - R_0^2} + \dfrac{\mathcal{E}_0}{4\pi a h}\right\}\left(\dfrac{R_0^2}{2} - \dfrac{R_0^4}{4R^2}\right), \end{cases}$$

il arrivera que les relations

$$t \leqq 0 \qquad R_0 \leqq r \leqq R$$

entraîneront l'égalité

$$(69)\qquad \mathcal{F}(r, t) = H\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) - Gt + L.$$

En définitive le problème III (p. 38) et par conséquent le problème II (p. 36) sont ramenés au suivant :

IV. *Prolonger la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, définie dans le domaine déterminé par les relations*

$$t \leqq 0$$
$$R_0 \leqq r \leqq R$$

au moyen de la formule (69), *jusque dans le domaine défini par* *les relations*

$$\left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ R_0 \leqq r \leqq R \end{array} \right. \tag{70}$$

sans porter atteinte à la continuité de cette fonction elle-même et de ses dérivées premières, de façon qu'elle vérifie à l'intérieur de ce domaine l'équation aux dérivées partielles

$$a \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r^2} - 3 \frac{a}{r} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} - T \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial^2 t} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0, \tag{71}$$

sauf peut-être sur certaines caractéristiques de cette équation et qu'elle satisfasse en outre aux conditions (64).

Remarque. — A partir de l'époque $t = 0$ la vitesse angulaire du cylindre (C) conservera évidemment pendant un certain temps une valeur différente de zéro et de même signe que la valeur ω_0 qu'elle avait à l'époque $t = 0$ et, après avoir résolu le problème IV, on pourra calculer la vitesse angulaire du cylindre ($\mathcal{C}$), pendant ce temps, au moyen de la première des formules (34), en ayant soin d'y porter la valeur (62) de la fonction $\Phi(r, t)$ et de poser ensuite dans la formule obtenue

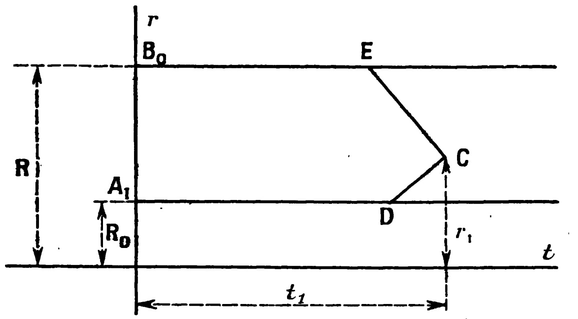
$$r = R_0,$$

mais, à partir de l'époque t_1, où la formule précédente aurait fourni la valeur nulle pour la vitesse angulaire du cylindre ($\mathcal{C}$) (et nous verrons que cette époque existera) la formule précédente ne sera plus valable. En effet deux éventualités sont en particulier concevables : ou bien le moment par rapport à l'axe du cylindre des forces dues à l'adhérence de celui-ci au liquide serait non supérieur en valeur absolue à celui du frottement des pivots pendant le mouvement de l'appareil et alors, à partir de l'époque t_1, la rotation du cylindre ($\mathcal{C}$) n'aurait plus lieu, ou bien la circonstance précédente ne se présenterait pas et alors, à l'époque t_1, il se produirait un changement de sens de la rotation du cylindre et par conséquent aussi un changement de signe du moment du frottement des pivots et une nouvelle étude du mouvement du cylindre ($\mathcal{C}$) deviendrait nécessaire.

5. Unicité de la solution du problème IV (p. 40).

14. Actuellement nous allons établir un théorème duquel il résultera immédiatement que le problème IV (p. 40) admet au plus une seule solution. A cet effet, dans un plan, rapporté à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, portons sur l'axe des abscisses

Fig. 1.



les valeurs de t et sur l'axe des ordonnées celles de r et envisageons l'image géométrique du domaine (D) défini par les relations (70), elle sera constituée comme l'indique la figure 1, par une bande limitée par le segment $A_1 B_0$ et deux demi-droites, issues respectivement des points A_1 et B_0 et de même sens que l'axe des t.

Désignons maintenant par t_1 et r_1 les coordonnées d'un point C arbitrairement choisi dans le domaine (D) et considérons les segments DC et CE situés sur les caractéristiques de l'équation (71). caractéristiques ayant pour équations respectives les équations suivantes :

$$(72)\qquad \begin{cases} (r-r_1)\sqrt{T}-(t-t_1)\sqrt{a}=0, \\ (r-r_1)\sqrt{T}+(t-t_1)\sqrt{a}=0, \end{cases}$$

où il faut prendre les déterminations positives des radicaux. Désignons alors par (D′) la partie du domaine (D) où l'on a

$$(r-r_1)\sqrt{T}-(t-t_1)\sqrt{a}\geqq 0,$$
$$(r-r_1)\sqrt{T}+(t-t_1)\sqrt{a}\leqq 0;$$

pour la position du point C à laquelle se rapporte la figure 1, le domaine (D') sera représenté par le pentagone $A_1 DCEB_0$.

Cela posé, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

V. *Si* $\psi(r, t)$ *représente la différence de deux intégrales de l'équation* (71), *intégrales dont chacune satisfait sur la partie commune des frontières des domaines* (D) *et* (D') *aux conditions que doit vérifier la fonction demandée dans le problème* IV (p. 40), *alors la fonction* $\psi(r, t)$ *est nulle identiquement dans tout le domaine* (D).

Nous allons baser la démonstration du théorème précédent sur l'identité suivante :

$$(73)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2a}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left\{a\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{T}{r^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{2}{r^3}\frac{\partial v}{\partial t}\left(a\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-3\frac{a}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-T\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{2}{r^3}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de faire remarquer que plusieurs cas peuvent se présenter quant à la nature du domaine (D') : suivant le choix du point C, le domaine (D') pourra avoir pour image géométrique soit un pentagone tel que le pentagone $A_1 DCEB_0$ représenté sur la figure 1, soit un quadrilatère, soit enfin un triangle. Nous nous bornerons à considérer la première des éventualités précédentes car on n'éprouvera aucune difficulté à traiter ensuite chacun des autres cas. Supposons que la fonction $\psi(r, t)$ satisfasse à l'hypothèse du théorème. Elle jouira alors des propriétés suivantes : elle sera continue avec ses dérivées premières dans tout le domaine fermé (D'), à l'intérieur de ce domaine elle vérifiera l'équation

$$(74)\qquad a\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-3\frac{a}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-T\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial\psi}{\partial t}=0,$$

sauf peut-être sur certaines caractéristiques de l'équation précédente, sur la portion $A_1 B_0$ de la frontière du domaine (D') la fonction $\psi(r, t)$ elle-même et sa dérivée $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ s'annuleront, sur le segment $A_1 D$ l'on aura

$$(75)\qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R_0}-b\,\psi(R_0, t)=0$$

et qu'enfin sur le segment EB_0 la fonction $\psi(r, t)$ satisfera à la condition que voici :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

Ces remarques faites, substituons à la fonction v dans l'identité (73) la fonction $\psi(r, t)$, multiplions les deux membres de l'égalité obtenue par le produit $dr\,dt$ et intégrons en étendant l'intégration au domaine (D'). Après avoir transformé le premier membre de l'égalité précédente au moyen du théorème de Green, on arrivera aisément en tenant compte des propriétés énumérées plus haut de la fonction $\psi(r, t)$ à l'égalité suivante :

$$(76)\quad \begin{aligned} -\frac{2a}{R_0^3}\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=R_0} dt - \int_{R_0}^{r_1}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\sqrt{a} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\sqrt{T}\right\}^2\frac{dr}{r^3} \\ - \int_{r_1}^{R}\left\{\frac{d\psi}{dr}\sqrt{a} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\sqrt{T}\right\}^2\frac{dr}{r^3} \\ = 2\iint_{(D')}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\frac{dr\,dt}{r^3}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$t_0 = t_1 - (r_1 - R_0)\sqrt{\frac{T}{a}}$$

et où il faut regarder la variable t comme une fonction de r définie dans la seconde intégrale du premier membre de l'égalité (76) par la première des équations (72) et dans la troisième par la seconde des équations (72).

En se reportant à l'égalité (75) et en remarquant que l'on a $\psi(R_0, 0) = 0$ [puisque sur tout le segment $A_1 B_0$ la fonction $\psi(r, 0)$ est nulle], on trouve :

$$(77)\quad \int_0^{t_0}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}_{r=R_0} dt = \frac{b}{2}\int_0^{t_0}\left\{\frac{d(\psi^2)}{dt}\right\}_{r=R_0} dt = \frac{b}{2}\left\{\psi(R_0, t_0)\right\}^2.$$

Cela posé, puisque, comme cela résulte de la formule (63) on a $b > 0$, les égalités (77) et (76) entraînent cette conséquence que chacune des intégrales qui figurent dans l'égalité (76) est nulle. Il résulte d'abord de là que l'égalité

$$(78)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

est vérifiée dans tout le domaine (D'). D'autre part puisque, en particulier, la seconde et la troisième des intégrales du premier membre de l'égalité (76) sont nulles, on a, à cause de l'égalité (78)

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

sur chacun des segments DC et CE. Mais on peut évidemment substituer au point C n'importe quel point, situé à l'intérieur du domaine (D'). Cela étant, on reconnaît que, en réalité l'égalité (α) subsiste dans tout le domaine (D') comme l'égalité (78). Mais sur $A_1 B_0$ la fonction $\psi(r, t)$ s'annule. Elle est donc nulle dans tout le domaine (D'). C. Q. F. D.

Le théorème précédent nous apprend que le problème IV (p. 40) et par suite chacun des problèmes III (p. 38) et II (p. 36) admettent au plus une seule solution, mais il résulte encore du théorème que nous venons d'établir la proposition plus générale que voici :

VI. *Lorsqu'il est possible de faire correspondre à deux intégrales de l'équation* (71) *une position telle du point désigné par* C *sur la figure* 1 (p. 42) *que sur la partie commune des frontières, du domaine* (D'), *déterminé par cette position du point* C, *et du domaine* (D), *déterminé par les relations* (70), *les conditions aux limites relatives à ces deux intégrales se confondent avec celles que, d'après l'énoncé* IV, *la fonction* $\mathcal{F}(r, t)$ *doit vérifier alors, dans le domaine* (D'), *les deux intégrales considérées de l'équation* (71) *se confondent, tout en pouvant être différentes dans le reste du domaine* (D).

6. Réduction du problème IV à certains deux autres problèmes.

15. Pour démontrer la possibilité du problème IV (p. 40), nous allons en présenter une solution en nous inspirant des idées de M. Hadamard [1]. Reprenons l'image géométrique du domaine (D),

---

(1) J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Traduit de l'anglais par Mlle J. Hadamard. Paris, chez Hermann et Cie, 1932. Appendice II. *Voir* aussi les travaux du même auteur cités dans le corps de l'ouvrage.

représentée sur la figure 1 (p. 42), et qui est celui dans lequel la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, demandée dans le problème IV (p. 40) doit être déterminée. Nous allons diviser ce domaine en domaines partiels de la façon suivante : envisageons les demi-droites A_1X_1 et B_0X_0 issues (figure 1 p. 42) des points A_1 et B_0 parallèles à l'axe des abscisses, puis définissons sur la première d'entre elles une suite illimitée de points distincts

$$A_2,\quad A_3,\quad A_4,\quad \ldots$$

à abscisses croissantes et sur la seconde une deuxième suite illimitée de points distincts aussi à abscisses croissantes

$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\quad \ldots,$$

de telle façon que, pour toute valeur entière et positive de l'indice k chacun des segments

$$A_k B_k \quad \text{et} \quad B_k A_{k+1}$$

constitue une portion d'une caratéristique de l'équation (71) (p. 41). Les segments précédents diviseront le domaine (D) en triangles dont quelques-uns sont représentés sur la figure 2, ci-contre. Cela posé, nous allons construire la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, demandée dans le problème IV (p. 40), en la déterminant successivement dans les domaines représentés par les triangles qui forment la suite suivante :

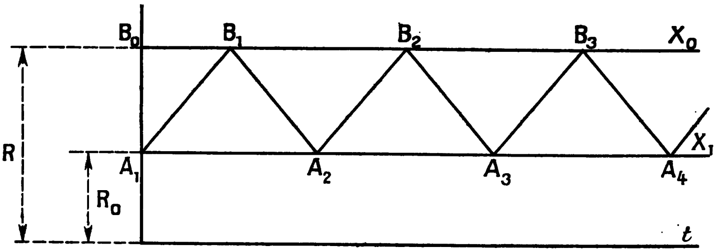
$$(78\,a)\quad A_1B_1B_0,\quad A_1A_2B_1,\quad A_2B_2B_1,\quad A_2A_3B_2,\quad A_3B_3B_2,\quad A_3A_4B_3,\quad \ldots.$$

Il est aisé de voir que l'expression de la fonction cherchée $\mathcal{F}(r, t)$, valable pour le domaine représenté par le triangle $A_1B_1B_0$, est la même que celle qui définit cette fonction pour les systèmes de valeurs de r et t qui satisfont aux relations $R_0 \leq r \leq R$, $t \leq 0$, à savoir la suivante :

$$(79)\qquad \mathcal{F}(r, t) = H\left\{\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right\} G\,t + L,$$

où les coefficients H, G et L ont les valeurs (68) (p. 40). En effet, d'une part le domaine que représente le triangle $A_1B_1B_0$ se confond avec le domaine désigné au n° 14 par (D′) lorsque l'on fait coïncider le point désigné par C sur la figure 1 (p. 42) avec le point B_1 et, d'autre part, sur les segments A_1B_0 et B_0B_1, dont l'ensemble représente la partie commune de la frontière du domaine $A_1B_1B_0$ et du domaine (D) défini par les relations (70), l'expression (79) de la

Fig. 2.



fonction $\mathcal{F}(r, t)$ satisfait aux conditions aux limites formulées dans l'énoncé IV (p. 40).

Donc, en vertu de la proposition VI (p. 45) la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ a bien, dans le domaine représenté par le triangle $A_1B_1B_0$, la valeur (79).

Pour déterminer successivement la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ dans les domaines représentés par les autres termes de la suite (78 a), il suffira, comme nous allons le démontrer, de savoir résoudre les problèmes de chacun des deux types suivants :

VII. *Déterminer une fonction $\mathcal{F}(r, t)$ vérifiant l'équation* (71) *dans le domaine déterminé par les relations*

$$(80)\qquad \begin{cases} (R-r)\sqrt{T}+t\sqrt{a}\geqq 0, \\ (R-r)\sqrt{T}-t\sqrt{a}\geqq 0, \\ r\geqq R_0, \end{cases}$$

connaissant les valeurs de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ sur la partie de la frontière du domaine précédent vérifiant l'équation

$$(R-r)\sqrt{T}+t\sqrt{a}=0$$

et sachant que, sur la partie de la frontière du domaine considéré où $r=R_0$, l'on a

$$\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R_0}-b\,\mathcal{F}(R_0, t)=0.$$

VIII. *Déterminer une fonction $\mathcal{F}(r, t)$ vérifiant l'équation* (71) *à l'intérieur du domaine défini par les relations*

$$(81) \qquad \begin{cases} (r - R_0)\sqrt{T} + t\sqrt{a} \geqq 0, \\ (r - R_0)\sqrt{T} - t\sqrt{a} \geqq 0, \\ r \leqq R, \end{cases}$$

connaissant les valeurs de cette fonction sur la partie de la frontière du domaine précédent vérifiant l'équation

$$(r - R_0)\sqrt{T} + t\sqrt{a} = 0$$

et sachant que sur la partie de la frontière de ce domaine où $r = R$, *on a*

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R} = 0.$$

En effet, supposons que l'on connaisse la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ demandée dans le problème IV dans le domaine (voir la figure 2, p. 47) que représente le quadrilatère $A_1 A_k B_k B_o$, [lequel, pour $k = 1$, se réduit au triangle $A_1 B_1 B_0$ dans lequel la fonction demandée est déterminée par la formule (79)]. Pour prolonger alors la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ jusque dans le domaine représenté par le triangle $A_k A_{k+1} B_k$, il faudra le déterminer de façon qu'elle satisfasse à l'intérieur de ce triangle à l'équation (71), qu'elle se réduise sur le côté $A_k B_k$ du triangle précédent à une fonction donnée, à savoir celle qui représente les valeurs de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ sur $A_k B_k$ et qui est connue par hypothèse et que sur le côté $A_k A_{k+1}$ elle satisfasse à la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b\mathcal{F}(R_0, t) = 0.$$

Or, on établira au moyen d'une démonstration calquée sur celle du théorème VI (p. 45) qu'il existe uue fonction au plus vérifiant, par rapport au domaine représenté par le triangle $A_k A_{k+1} B_k$, les conditions précédentes. D'autre part, il suffit d'effectuer un changement de variable consistant en le changement de t en $\overline{B_0 B_k} + t$ pour transformer le domaine $A_k A_{k+1} B_k$ en le domaine défini par les relations (80). Donc, dans les conditions où nous venons de nous placer, le prolongement de la fonction $\mathcal{F}(r,t)$ se ramène au problème VII (p. 47). Reste à considérer les cas où, connaissant la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ dans le domaine que représente le quadrilatère $A_1 A_{k+1} B_k B_0$, on aurait à la prolonger dans celui que représente le triangle $A_{k+1}B_{k+1}B_k$. On s'assurera, sans que nous ayons besoin d'insister, que ce problème se ramène au problème VIII. En définitive, pour démontrer la possibilité du problème IV (p. 40), il suffira de démontrer celle de chacun des problèmes VII et VIII et de vérifier ensuite que les dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, déterminée de la façon susdite, seront continues même à la traversée des segments A_kB_k et $A_{k+1}B_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

7. Solution de chacun des problèmes VII et VIII.

16. En abordant le problème VII remarquons (ce qui nous permettra de simplifier sensiblement l'écriture) qu'il suffit d'effectuer le changement de variables qui consiste à changer $\frac{r}{\sqrt{aT}}$ en r et $\frac{t}{T}$ en t, avec les déterminations positives des radicaux, pour ramener l'équation (71) (p. 41) à la suivante :

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial r} - \frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^2} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = 0. \tag{82}$$

Pour ne pas multiplier les notations sans nécessité, nous effectuerons, en même temps que le changement susdit de variables et de notations, le changement

$$\frac{R_0}{\sqrt{aT}} \text{ en } R_0, \qquad \frac{R}{\sqrt{aT}} \text{ en } R \text{ et de } b\sqrt{aT} \text{ en } b.$$

Après avoir effectué le changement précédent des variables et des notations, nous poserons

$$\mathcal{F}(r, t) = r^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{t}{2}}U(r, t). \tag{83}$$

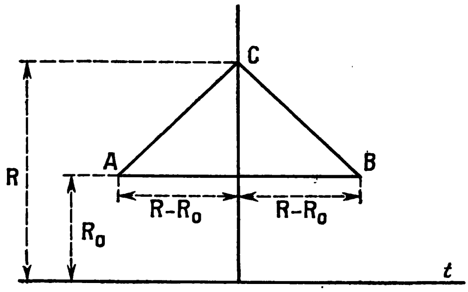
La fonction $U(r, t)$ devra satisfaire à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{r^2 - 15}{4r^2}U(r, t) = 0, \tag{84}$$

et le problème VII sera ramené au suivant :

IX. *Déterminer la fonction* $U(r, t)$ *de façon que, à l'intérieur du domaine, représenté* (*fig.* 3) *par le triangle* ABC, *elle vérifie l'équation* (84), *qu'elle se réduise sur la partie* AC *de la* *frontière du domaine précédent, à une fonction donnée $f(r)$ de l'ordonnée du point du segment* AC *en lequel on considère sa*

Fig. 3.



valeur et que sur la portion AB *de la frontière du domaine considéré, elle satisfasse à la condition*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b' U(R_0, t) = 0, \tag{85}$$

où l'on a posé

$$b' = b - \frac{3}{2R_0}. \tag{86}$$

Nous allons résoudre le problème précédent au moyen d'une adaptation convenable d'une méthode des approximations successives due à M. Picard [1].

Substituons pour un instant à l'équation (84) la suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\partial U}{\partial t^2} + s\,\frac{r^2 - 15}{r^2}\,U(r, t) = 0, \tag{87}$$

où s représente un paramètre indépendant des variables r et t, sans introduire aucun autre changement dans l'énoncé du problème IX et cherchons à développer la fonction $U(r, t)$ en une série de la forme suivante :

$$U(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r, t)\, s^k. \tag{88}$$

La fonction $U_0(r, t)$ devra vérifier à l'intérieur du domaine ABC

---

[1] PICARD in DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 353.

(*fig.* 3) l'équation

$$\frac{\partial U_0}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = 0 \tag{89}$$

sur la partie AC de la frontière du domaine considéré, elle devra se réduire à la fonction donnée $f(r)$ et, sur la partie AB du même domaine, elle devra satisfaire à la condition suivante :

$$\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b' U_0(R_0, t) = 0. \tag{90}$$

Pour $k \geqq 1$, la fonction $U_k(r, t)$ devra satisfaire, à l'intérieur du domaine ABC, à l'équation

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} + \frac{r^2 - 15}{r^2} U_{k-1}(r, t) = 0, \tag{91}$$

sur la portion AC du domaine considéré, elle devra se réduire à zéro et, sur la partie AB de la frontière du même domaine, on devra avoir

$$\left(\frac{\partial U_k}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b' U_k(R_0, t) = 0. \tag{92}$$

La détermination $U_0(r, t)$ n'offre aucune difficulté et l'on trouve :

$$\begin{aligned} U_0(r, t) = e^{+b'(r-t)} \int_R^{r-t} e^{-b'\sigma} \Big\{ & \frac{\partial}{\partial\sigma} f\left(\frac{2R_0 + R - \sigma}{2}\right) \\ & + b' f\left(\frac{2R_0 + R - \sigma}{2}\right) \Big\} d\sigma + \\ & + f\left(\frac{r + t + R}{2}\right). \end{aligned} \tag{93}$$

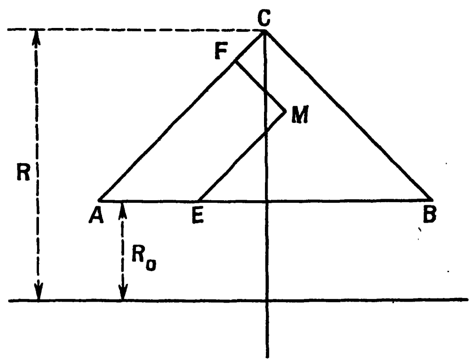
Voici maintenant la marche que nous allons suivre. Après avoir établi une formule faisant connaître la fonction $U_k(r, t)$ lorsque l'on connaît la fonction $U_{k-1}(r, t)$ $(k \geqq 1)$, nous prouverons que, après avoir désigné par M_0 la borne supérieure du module de la fonction $U_0(r, t)$ et par l un nombre positif convenablement choisi, on aura, dans tout le domaine représenté sur la figure 3 et pour toute valeur entière et positive de k, la relation suivante :

$$U_k(r, t) < M_0 \frac{l^k (R - r + t)^k}{\Gamma(k + 1)} \tag{94}$$

Ensuite nous démontrerons que, à l'intérieur de tout le domaine qui nous intéresse, la série (88) est deux fois dérivable terme à terme par rapport à chacune des variables r et t.

Les points précédents étant établis, il en résultera que, pour toute valeur déterminée de s, la formule (88) fera connaître une fonction

Fig. 4.



$U(r, t)$ qui, à l'intérieur du triangle ABC (*fig.* 3) vérifiera l'équation (87), qui sur le côté AC du triangle précédent se réduira à la fonction donnée $f(r)$ et qui, sur le côté AB du même triangle, satisfera à la condition (85).

Il résulte de là que, pour $s = 1$, la formule (88) fera connaître une solution du problème IX et la formule (83) nous fournira la solution du problème VII dont la possibilité sera, par cela même, établie.

Reprenons l'image géométrique ABC du domaine dans lequel les fonctions $U_k(r, t)$ doivent être déterminées (*fig.* 4), envisageons un point M, d'abscisse t et d'ordonnée r, situé dans le domaine considéré et construisons le trapèze AEMF en menant par le point M la parallèle ME à AC et la parallèle MF à BC. Puis, après avoir posé pour abréger l'écriture

$$(95) \qquad P_{k-1}(r, t) = \frac{r^2 - 15}{r^2} U_{k-1}(r, t),$$

définissons la fonction $V_k(r, t)$ par la formule

$$V_k(r, t) = \frac{1}{2} \int\int P_{k-1}(r', t')\, dr'\, dt',$$

où l'intégration, dans le second membre, doit être étendue au domaine représenté par le trapèze AEMF. Effectuons, dans l'intégrale précédente, le changement de variables défini par les formules suivantes :

$$(96) \qquad \begin{cases} \xi = R - (r - t), \\ \eta = r + t, \end{cases}$$

nous obtiendrons de cette façon la formule suivante :

$$(97) \quad V_k(r, t) = \frac{1}{4}\int_0^{R-(r-t)} \left\{ \int_{\xi-R+2R_0}^{r+t} P_{k-1}\left(\frac{\eta - \xi + R}{2}, \frac{\eta + \xi - R}{2}\right) d\eta \right\} d\xi.$$

On s'assurera aisément que l'on a

$$(97a) \qquad \frac{\partial V_k}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 V_k}{\partial t^2} + P_{k-1}(r, t) = 0,$$

et que, sur la partie AC (*fig.* 4) de la frontière du domaine ABC, la fonction $V_k(r, t)$ s'annule. Cela posé, en se reportant à la formule (95) et à l'équation (91) ainsi qu'aux conditions *aux limites* que doit vérifier la fonction $U_k(r, t)$, on reconnaîtra aisément que l'on aura

$$(98) \qquad U_k(r, t) = V_k(r, t) + \varphi_k(r - t),$$

où la fonction $\varphi_k(r - t)$ devra satisfaire à la condition

$$(99) \qquad \varphi_k(R) = 0,$$

ainsi qu'à l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k(r - t)}{\partial r}\right\}_{r=R_0} - b'\varphi_k(R_0 - t) + \left(\frac{\partial V_k}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b'V_k(R_0, t) = 0.$$

Mais on a

$$\left\{\frac{\partial \varphi_k(r - t)}{\partial r}\right\}_{r=R_0} = -\frac{\partial \varphi_k(R_0 - t)}{\partial t},$$

et, d'autre part, il est aisé de déduire de la formule (97) que l'on a

$$\left(\frac{\partial V_k}{\partial r}\right)_{r=R_0} = \frac{\partial V_k(R_0, t)}{\partial t}.$$

Par conséquent l'équation différentielle que doit vérifier la fonction $\varphi_k(r - t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$-\frac{\partial \varphi_k(R_0 - t)}{\partial t} - b'\varphi_k(R_0 - t) + \frac{\partial V_k(R_0, t)}{\partial t} - b'V_k(R_0, t) = 0.$$

Eu égard à la condition (99), on déduira de l'équation différentielle précédente la formule que voici :

$$\varphi_k(R_0 - t) = e^{-b't} \int_{R_0-R}^{t} \left\{ \frac{\partial V_k(R_0, \rho)}{\partial \sigma} - b' V_k(R_0, \sigma) \right\} e^{b'\sigma} d\sigma.$$

Moyennant une intégration par partie et la substitution à t de l'expression $R_0 - r + t$, on obtiendra la formule définitive suivante :

$$(100) \qquad \varphi_k(r - t) = V_k(R_0, R_0 - r + t) - 2b' e^{-b'(R_0 - r + t)} \int_{R_0-R}^{R_0-r+t} V_k(R_0, \sigma) e^{b'\sigma} d\sigma.$$

Supposons que, dans le domaine qui nous intéresse et dans lequel on a

$$R - r + t \geqq 0,$$

l'on ait

$$(101) \qquad |U_{k-1}| \leqq M_0 \frac{l^{k-1}(R - r + t)^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

où M_0 représente la borne supérieure du module de la fonction $U_0(r, t)$, définie par la formule (93), dans le domaine ABC (*fig.* 3, p. 50) et l un nombre positif dont nous nous réservons de préciser la valeur plus tard.

Soit l_1 le maximum de la valeur absolue de l'expression

$$\frac{r^2 - 15}{r^2}$$

lorsque r varie dans l'intervalle (R_0, R). Les relations (95) et (101) nous donneront la relation suivante :

$$(102) \qquad |P_{k-1}(r, t)| \leqq M_0 l_1 l^{k-1} \frac{(R - r + t)^{k-1}}{\Gamma(k)}.$$

Par conséquent la formule (97) nous donnera

$$|V_k(r, t)| \leqq \frac{M_0 l_1 l^{k-1}}{4\Gamma(k)} \int_0^{R-(r-t)} \left\{ \int_{\xi-R+2R_0}^{r+t} \xi^{k-1} d\eta \right\} d\xi,$$

d'où

$$(103) \qquad |V_k(r, t)| \leqq \frac{M_0(R - R_0) l_1 l^{k-1}}{2\Gamma(k+1)} (R - r + t)^k.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure de la valeur absolue de

$\varphi_k(r-t)$ et, à cet effet, reportons-nous à la formule (100). Considérons d'abord l'expression

$$2b'l^{b'(\sigma-R_0+r-t)}.$$

Il est très aisé de voir que, dans le domaine que nous avons à considérer, la valeur absolue de cette expression a une borne supérieure finie l_2. En tenant compte de cette circonstance ainsi que de la relation (103), on déduira de la formule (100) la relation suivante :

$$\begin{aligned} |\varphi_k(r-t)| \leqq & \frac{M_0(R-R_0)\,l_1\,l^{k-1}}{2\Gamma(k+1)}(R-r+t)^k \\ & + \frac{M_0(R-R_0)\,l_1 l_2 l^{k-1}}{2\Gamma(k+1)} \int_{R_0-R}^{R_0-r+t} (R-R_0+\sigma)^k\,d\sigma, \end{aligned}$$

d'où

$$|\varphi_k(r-t)| \leqq \frac{M_0\,l^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \left\{ \frac{(R-R_0)\,l_1}{2} + \frac{(R-R_0)\,l_1 l_2}{2(k+1)}(R-r+t) \right\} (R-r+t)^k,$$

et comme dans le domaine considéré on a

$$0 \leqq R-r+t \leqq 2(R-R_0),$$

on aura *a fortiori*

$$(104) \qquad \varphi(r-t) \leqq \frac{M_0\,l^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \left\{ \frac{(R-R_0)\,l_1}{2} + (R-R_0)^2\,l_1 l_2 \right\} (R-r+t)^k.$$

Il résulte de la formule (98), ainsi que des relations (103) et (104), qu'il suffit de définir la quantité l par la formule suivante :

$$(105) \qquad l = (R-R_0)\,l_1 + (R-R_0)^2\,l_1 l_2,$$

pour que la relation (101) entraîne la suivante :

$$(106) \qquad |U_k(r,t)| \leqq |V_k(r,t)| + |\varphi_k(r-t)| \leqq M_0\,\frac{l^k(R-r+t)^k}{\Gamma(k+1)}.$$

Or, il résulte des calculs que nous venons de développer que, pour $k=1$ et avec la valeur (105) de l, la relation (106) aura sûrement lieu ; donc puisque, avec la valeur (105) de l, la relation (101) entraîne la relation (106), cette dernière aura lieu pour toutes les valeurs entières et positives de k. Il résulte de là que la série (88) converge absolument et uniformément dans le domaine ABC (*fig.* 3, p. 50) pour toute valeur finie de s.

Cela étant, il résulte de la définition même des fonctions $U_k(r, t)$ que la fonction $U(r, t)$, somme de la série susdite, est continue dans tout le domaine fermé ABC. Il ne nous reste qu'à démontrer que, pour toute valeur finie de s, chacune des séries

$$(107)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial U_k}{\partial r}s^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial U_k}{\partial t}s^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}s^k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}s^k$$

est uniformément convergente dans tout le domaine représenté par le triangle ABC sur la figure 3 (p. 50). D'ailleurs, à cause de la relation (91), il suffira d'établir la proposition précédente pour les trois premières des séries (107).

La formule (97) donne

$$(108)\qquad \frac{\partial V_k}{\partial r} = -\frac{1}{4}\int_{2R_0-r+t}^{r+t} P_{k-1}\left(\frac{\eta+r-t}{2}, \frac{\eta-r+t}{2}\right)d\eta + \frac{1}{4}\int_0^{R-r+t} P_{k-1}\left(\frac{r+t-\xi+R}{2}, \frac{r+t+\xi-R}{2}\right)d\xi,$$

$$(109)\qquad \frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{1}{4}\int_{2R_0-r+t}^{r+t} P_{k-1}\left(\frac{\eta+r-t}{2}, \frac{\eta-r+t}{2}\right)d\eta + \frac{1}{4}\int_0^{R-r+t} P_{k-1}\left(\frac{r+t-\xi+R}{2}, \frac{r+t+\xi-R}{2}\right)d\xi.$$

Or, dans les intégrales qui entrent dans les formules précédentes, la différence des limites ne dépasse pas la quantité

$$2(R-R_0),$$

d'autre part il résulte de la formule (95), de la relation (106), déjà démontrée et de ce que l'on a

$$0 \leqq R-r+t \leqq 2(R-R_0)$$

l'existence de la relation

$$(110)\qquad |P_{k-1}(v, t)| \leqq M_0 l_1 \frac{\{2(R-R_0)l\}^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

où, rappelons le, l_1 représente le maximum du module de l'expression

$$\frac{r^2-15}{r^2}$$

lorsque r varie dans l'intervalle (R_0, R).

Donc, en vertu des formules (108) et (109), nous aurons

$$(111) \qquad \left|\frac{\partial V_k}{\partial r}\right|, \qquad \left|\frac{\partial V_k}{\partial t}\right| \leqq M_0 l_1 (R - R_0) \frac{\{2(R - R_0)\, l\}^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

relations valables dans tout le domaine qui nous intéresse. Il résulte de ces relations ainsi que de l'une des relations (106) que, pour toute valeur finie de s, chacune des séries

$$(112) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial V_k}{\partial r} s^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial V_k}{\partial t} s^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} V_k s^k$$

sera uniformément et même absolument convergente dans tout le triangle ABC (*fig.* 3, p. 50).

La formule (100) donne

$$(113) \qquad \frac{\partial \varphi_k(r-t)}{\partial r} = - \frac{\partial \varphi_k(r-t)}{\partial t} = - \frac{\partial V_k(R_0, R_0 - r + t)}{\partial t} + \\ - 2\, b'^2 e^{-b'(R_0 - r + t)} \int_{R_0 - R}^{R_0 - r + t} V_k(R_0, \sigma)\, e^{b'\sigma}\, d\sigma + \\ - 2\, b' V_k(R_0, R_0 - r + t).$$

Or, dans l'intégrale qui figure dans ces égalités, la différence des limites n'est pas négative et ne surpasse pas l'expression $2(R - R_0)$. D'autre part, pour toute valeur finie de s, les séries (112) sont absolument et uniformément convergentes dans le domaine que nous avons à considérer. Par conséquent, en vertu des formules (113), il en est de même des séries

$$(114) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial \varphi_k(r-t)}{\partial r} s^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial \varphi_k(r-t)}{\partial t} s^k.$$

Il résulte des propriétés que nous venons de reconnaître aux séries (112) et (114) ainsi que de la formule (98) que les deux premières des séries (107) convergent uniformément et absolument dans les mêmes conditions que les précédentes.

La formule (108) donne

$$(115)\quad \frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} = -\frac{1}{2}P_{k-1}(r,\,t) - \frac{1}{4}P_{k-1}(R_0,\,R_0 - r + t)$$
$$-\frac{1}{4}\int_{2R_0-r+t}^{r+t}\frac{\partial}{\partial r}P_{k-1}\left(\frac{\eta + r - t}{2},\,\frac{\eta - r + t}{2}\right)d\eta$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^{R-r+t}\frac{\partial}{\partial r}P\left(\frac{r + t - \xi + R}{2},\,\frac{r + t + \xi - R}{2}\right)d\xi.$$

D'autre part la formule (95) donne

$$(116)\quad \frac{\partial P_{k-1}}{\partial r} - \frac{30}{r^3}U_{k-1}(r,\,t) + \frac{r^2 - 15}{r^2}\frac{\partial U_k}{\partial r}; \qquad \frac{\partial P_{k-1}}{\partial t} = \frac{r^2 - 15}{r^2}\frac{\partial U_k}{\partial t}.$$

Or, en vertu de ce que nous avons déjà établi en ce qui concerne la convergence de la série (88) et des deux premières des séries (107), il résulte des formules (95) et (116) que les séries

$$(117)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} P_k s^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial P_k}{\partial r}s^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial P_k}{\partial r}s^k$$

sont absolument et uniformément convergentes dans le domaine qui nous intéresse pour toute valeur finie de s. Par conséquent, en vertu de la formule (115), il en est de même de la série

$$(118)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2}s^k.$$

Observons encore que, en vertu de l'équation ($97a$), la série

$$(119)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 V_k}{\partial t^2}s^k,$$

convergera dans les mêmes conditions que les séries (118) et (117). Il nous reste à nous assurer que la série

$$(120)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 \varphi_k(r - t)}{\partial r^2}s^k$$

converge dans les mêmes conditions que les précédentes. Or, la formule (113) donne

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(r-t)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V_k(R_0, R_0-r+t)}{\partial t^2} + $$
$$- 2b'^3 e^{-b'(R_0-r+t)} \int_{R_0-R}^{R-r+t} V_k(R_0, \sigma) e^{b'\sigma} d\sigma + $$
$$+ 2b'^2 V_k(R_0, R_0-r+t) + 2b' \frac{\partial V_k(R_0, R_0-r+t)}{\partial t},$$

donc, puisque dans l'intégrale qui figure au second membre de la formule précédente, la différence des limites ne surpasse pas $2(R-R_0)$, la série (120) convergera bien dans les mêmes conditions que les séries (112) et (119). Il suffit maintenant de se reporter à la formule (98) pour reconnaître que la troisième des séries (107) converge dans les mêmes conditions que les deux premières et que la série (88). Enfin il en est encore de même de la quatrième de ces séries en vertu de l'équation (91). Il résulte de ce qui précède que, pour toute valeur finie du paramètre s, la formule (88) fera connaître une fonction $U(r, t)$ vérifiant l'équation (87) à l'intérieur du domaine que représente le triangle ABC (*fig.* 3, p. 50), se réduisant à la fonction $f(r)$ sur la partie AC de la frontière du domaine considéré et satisfaisant sur la partie AB de la frontière de ce domaine à la condition (85). Il suffira donc de faire $s=1$ dans la formule (88) pour que la valeur correspondante de $U(r, t)$ constitue la fonction demandée dans le problème IX (p. 49). Mais le problème VII (p. 47) se ramène, comme nous l'avons fait remarquer au problème IX. Nous avons donc démontré la possibilité du problème (IX) en en donnant une solution.

Voici une remarque qui nous sera utile dans la suite :

Il résulte de l'uniformité de la convergence dans le triangle ABC (*fig.* 3, p. 50) des séries que nous avons eu à considérer et de la continuité des fonctions de r et t formant les termes de ces séries, ainsi que de celle des dérivées des deux premiers ordres de ces fonctions, que l'on a le théorème suivant :

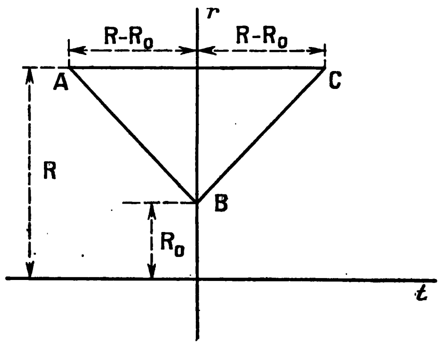
X. *La fonction* $\mathcal{F}(r, t)$ *demandée dans le problème* VII (p. 47) *et devant être définie dans le domaine* (80) *admet des valeurs périphériques continues et il en est encore de même de ses dérivées des deux premiers ordres.*

17. Occupons-nous maintenant du problème VIII.

En effectuant le même changement des variables indépendantes, de la fonction inconnue et des notations que pour résoudre le problème VII (p. 47), on ramènera le problème VIII au suivant :

XI. *Déterminer une fonction* $U(r, t)$ *des variables* r *et* t *vérifiant l'équation* (84) (p. 49) *à l'intérieur du domaine représenté sur la* figure 5 *ci-jointe par le triangle* ABC, *l'équation aux dérivées partielles* (84), *se réduisant sur* AB *à une fonction*

Fig. 5.



donnée de r *et satisfaisant sur la partie* AC *de la frontière du domaine considéré à la condition suivante :*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{3}{2R} U(R, t) = 0.$$

Il nous semble que l'adaptation au problème précédent de la méthode employée au numéro précédent pour résoudre le problème IX est assez aisée pour que nous puissions regarder le problème XI et par suite aussi le problème VIII comme résolu et qu'il nous soit permis d'énoncer sans démonstration un théorème analogue au théorème X, à savoir le suivant :

XII. *La fonction* $\mathfrak{F}(r,t)$ *demandée dans le problème* VIII (p. 47) *et devant être déterminée dans le domaine déterminé par les relations* (81) (p. 48) *admet non seulement elle-même des valeurs périphériques continues, mais il en est de même de ses dérivées des deux premiers ordres.*

8. La fonction $\mathcal{F}(r, t)$, construite de la façon indiquée au n° 15 (p. 45) **constitue la solution du problème IV** (p. 40).

18. Sachant résoudre les problèmes VII et VIII (p. 47) on peut prolonger la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, de la façon expliquée au n° 15, successivement aux domaines représentés par les différents triangles de la suite (78 a) (voir la figure 2, p. 47). La fonction $\mathcal{F}(r, t)$ définie de cette façon dans toute l'étendue du domaine (D), déterminé par les relations (70) (p. 41), satisfera à l'intérieur de ce domaine à l'équation aux dérivées partielles (71) (p. 41) sauf peut-être sur la ligne brisée formée par les segments A_iB_i et B_iA_{i+1}, ($i = 1, 2, 3, \ldots$) et dont les premiers six côtés sont représentés sur la figure 2 (p. 47); elle vérifiera en outre les conditions aux limites spécifiées dans le problème IV (p. 40). Donc, pour pouvoir affirmer que la fonction susdite est la fonction demandée dans ce problème, il suffit de s'assurer que les dérivées premières de cette fonction sont continues même à la traversée des segments A_iB_i et B_iA_{i+1} ($i = 1, 2, 3, \ldots$). A cet effet nous nous appuierons sur le théorème suivant :

XIII. *Supposons qu'un domaine* (D) *situé dans un espace euclidien à deux dimensions intercepte un segment* AB *sur une caractéristique d'une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire, du type hyperbolique, mise sous la forme*

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, n} + a\frac{\partial U}{\partial \xi} + b\frac{\partial U}{\partial \eta} + c\,U + d = 0,$$

où a, b, c et d représentent des fonctions continues des variables ξ et η. Supposons encore que le segment AB divise le domaine (D) en deux domaines différents (D_1) et (D_2) et qu'une fonction $U(\xi, \eta)$, continue dans tout le domaine (D), vérifie l'équation (E) dans tout le domaine (D) sauf peut-être sur le segment AB. Supposons enfin que les dérivées de la fonction $U(\xi, \eta)$ jusqu'au second ordre inclusivement tendent uniformément vers des limites déterminées lorsque le point (ξ, η), en restant à l'intérieur de l'un des domaines (D_1) et (D_2), tend vers un point du segment AB, les limites précédentes pouvant être différentes selon celui des domaines (D_1) et (D_2) à l'intérieur duquel le point (ξ, η) est assujetti à rester. Les hypothèses précédentes étant vérifiées, *s'il arrive encore qu'il existe sur le segment* AB *un point* C *tel que les limites des dérivées* $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ *et* $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ *lorsque le point* (ξ, η) *tend vers le point* C *en restant à l'intérieur de l'un des domaines* (D_1) *et* (D_2), *ne dépendent pas de celui de ces domaines dans lequel le point* (ξ, η) *est assujetti à rester*, *alors les dérivées premières de la fonction* $U(\xi, \eta)$ *sont continues à la traversée du segment* AB *en n'importe quel point.*

Ce théorème qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème que j'ai eu l'occasion d'établir ailleurs [1], peut se démontrer en quelques lignes comme il suit.

Supposons, ce que l'on peut admettre sans nuire à la généralité, que l'équation

$$\eta = 0$$

soit celle de la droite portant le segment AB.

En vertu des hypothèses du théorème, nous aurons sur tout le segment AB

$$(\alpha) \qquad \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta > 0}} \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta < 0}} \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi}$$

et si l'on pose

$$V(\xi) = \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta > 0}} \frac{\partial U}{\partial \eta} - \lim_{\substack{\eta \to 0 \\ \eta < 0}} \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

la fonction $V(\xi)$ vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{dV(\xi)}{d\xi} + b(\xi, 0) V(\xi) = 0,$$

pour toutes les valeurs de ξ qui définissent des points situés sur le segment AB. Donc, si pour une valeur particulière de ξ, soit ξ_0, on a

$$V(\xi_0) = 0,$$

l'on aura

$$V(\xi) = 0$$

sur tout le segment AB. Donc le théorème qu'il s'agissait d'établir a bien lieu.

(1) S. Zaremba, Un théorème général relatif aux équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaire et du type hyperbolique (*Bulletin de l'Académie polonaise des sciences et des lettres*, série A, 1934, p. 371).

Après la digression précédente, revenons à la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, construite de la façon expliquée au n° 15 (p. 45 et suivantes) et considérons la figure 2 (p. 47).

Le segment $A_1 B_1$ est porté par la droite dont voici l'équation

$$(r - R_0)\sqrt{T} - t\sqrt{a} = 0$$

et, dans le domaine déterminé par les relations

$$(121) \qquad \begin{cases} (r - R_0)\sqrt{T} - t\sqrt{a} \geqq 0, \\ R_0 \leqq r \leqq R, \end{cases}$$

on a, pour la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ la formule (79) (p. 46).

A cause de la continuité de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ l'expression

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}\sqrt{a} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\sqrt{T}$$

tend vers une même limite lorsque le point (r, t) tend vers le point A_1 en restant à l'intérieur du domaine (121) ou en restant à l'intérieur du domaine représenté par le triangle $A_1 B_1 A_2$. D'autre part la limite vers laquelle tend la dérivée $\frac{\partial F}{\partial r}$, lorsque le point (r, t) tend vers le point A_1 en restant à l'intérieur du domaine (121), est égale à celle vers laquelle cette dérivée tend lorsque le point (r, t) tend vers le point A_1 en restant à l'intérieur du triangle $A_1 B_1 A_2$, car l'expression (79) de $\mathcal{F}(r, t)$, valable dans le domaine (121), satisfait à l'égalité

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} - b\,\mathcal{F}(r, t)\right\}_{\substack{r=R_0 \\ t=0}} = 0$$

et, d'autre part, d'après la seconde des conditions (64) (p. 39), on a

$$\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}\right)_{r=R_0} - b\,\mathcal{F}(R_0, t)\right\}_{t>0} = 0,$$

d'où il résulte, à cause de la continuité de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, que les limites considérées plus haut sont bien égales entre elles. Supposons pour un instant que la continuité des dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, dans le trapèze $A_1 A_{k+1} B_k B_0$ (*fig.* 2, p. 47) ait été établie. En s'appuyant alors sur le théorème XIII (p. 61) ainsi que sur les théorèmes X (p. 59) et XII (p. 60), on démontrera sans peine que les dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ sont continues tant à la traversée du segment $B_k A_{k+1}$ qu'à celle du segment $A_{k+1} B_{k+1}$ et l'on prouvera par cela même que, dans l'hypothèse considérée, les dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ seront continues dans le domaine $A_1 A_{k+2} B_{k+1} B_0$.

Or nous avons déjà reconnu que l'hypothèse considérée il y a un instant se vérifie pour $k = 1$, donc, en vertu du principe d'induction mathématique, la continuité des dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, dans tout le domaine où elle est définie, est démontrée.

Mais comme nous l'avons fait remarquer au début du présent numéro, c'est tout ce qui restait à établir pour démontrer que la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, construite de la façon indiquée au n° 15, représente bien la fonction demandée dans le problème IV (p. 40). En définitive nous avons le théorème suivant :

XIV. *Le problème* IV (p. 40) *admet une solution et il n'en admet qu'une.*

9. Sur une propriété remarquable de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, solution du problème IV.

19. La solution du problème IV (p. 40) que nous venons d'exposer ne se prête pas au calcul numérique, aussi en présenterons-nous une autre dans la section suivante de ce chapitre, solution qui n'a pas cet inconvénient, mais cette deuxième solution ne fait pas apparaître une circonstance intéressante que la solution que nous avons exposée permet de mettre en évidence. La circonstance que nous avons en vue consiste en ce que l'on a le théorème suivant :

XV. *La ligne brisée* (L) *dont le tronçon de début est représenté sur la figure* 2 (p. 47) *par la ligne*

$$A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 A_4$$

représente le lieu des points où la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ *ne vérifie pas l'équation aux dérivées partielles* (71) (p. 41) *et cela parce que, sur la ligne considérée, la fonction* $\mathcal{F}(r, t)$ *n'a pas les dérivées voulues du second ordre.*

Pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, observons tout d'abord que, en vertu de la façon dont nous avons construit la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, les points où elle pourrait ne pas vérifier l'équation (71), ne peuvent être situés que sur la ligne (L).

D'autre part, il résulte de la construction de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ (X, p. 59 et XII, p. 60), que ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement, quand on les considère à l'intérieur du domaine représenté par n'importe lequel des triangles appartenant à la suite (78 a) (p. 46), admettent (X, p. 59 et XII, p. 60) des valeurs périphériques distribuées continûment sur la frontière du domaine considéré. Par conséquent si, à la traversée de la ligne (L) en un point P, l'une des dérivées

$$(122) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2},$$

éprouve une discontinuité, cette discontinuité est telle qu'elle exclut l'existence de la dérivée considérée au point P lui-même.

Donc, pour établir notre théorème, il suffira de démontrer que les dérivées (122) éprouvent des discontinuités à la traversée de la ligne (L) en n'importe quel point. A cet effet, commençons par justifier la remarque suivante :

(L_1). *La dérivée* $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t}$ *éprouve une discontinuité à la traversée de la ligne* (L) *au point* A_1.

En effet, dans le domaine représenté par le triangle $A_1B_1B_0$, la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ est déterminée par la formule (79) (p. 46). Donc, dans ce domaine on a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t} = 0.$$

D'autre part, à partir de l'époque $t = 0$, la vitesse angulaire du cylindre ($\mathcal{C}$) éprouve brusquement une accélération non nulle. Cela étant, il suffira de se reporter aux formules (34) (p. 33) ainsi qu'à la formule (62) (p. 39) pour reconnaître que la dérivée

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t}$$

tend vers une limite différente de zéro lorsque le point (r, t) tend vers le point A_1 en restant à l'intérieur du triangle $A_1B_1A_2$.

La justesse de la remarque (L_1) est donc établie.

Observons maintenant (IV, p. 40) que, pour toutes les valeurs non négatives de t, l'on a

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial r}\right\}_{r=\mathrm{R}} = 0 \tag{123}$$

ainsi que

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial r}\right\}_{r=\mathrm{R}_0} - b'\mathcal{F}(\mathrm{R}_0, t) = 0. \tag{124}$$

En s'appuyant sur le théorème XII (p. 60), on déduira aisément de l'égalité (123), la proposition suivante :

(L_2). *Lorsque le point* (r, t) *tend* (*fig.* 2, p. 47) *vers le point* B_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *en restant à l'intérieur du triangle* $B_k B_{k-1} A_k$ *ou à l'intérieur du triangle* $B_k A_{k+1} B_{k+1}$, *la dérivée*

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r \partial t} \tag{125}$$

tend vers une même limite (*égale à zéro*) *dans les deux cas, d'où il résulte que si la dérivée précédente éprouve une discontinuité à la traversée de l'un des segments* $B_k A_k$ *ou* $B_k A_{k+1}$, *dans le voisinage du point* B_k, *elle éprouve aussi une discontinuité à la traversée du second de ces segments dans le voisinage de ce point.*

En s'appuyant sur le théorème X (p. 59), on déduira d'une façon analogue de l'égalité (124), la conséquence que voici :

(L_3). *Lorsque la dérivée* (125) *éprouve une discontinuité à la traversée* $A_k B_{k-1}$ *ou* $A_k B_k$, *dans le voisinage du point* A_k ($k = 2, 3, \ldots$), *elle éprouve aussi une discontinuité à la traversée du second de ces segments dans le voisinage du même point* A_k.

Pour aller plus loin, il convient d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\xi = r\sqrt{\mathrm{T}} - t\sqrt{a}; \qquad \eta = r\sqrt{\mathrm{T}} + t\sqrt{a},$$

où l'on prend la détermination positive des radicaux.

L'équation (71) (p. 41) prendra alors la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi \partial \eta} + \mathrm{P}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} + \mathrm{Q}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} = 0, \tag{126}$$

où l'on aura

$$P = -\frac{3}{2(\xi+\eta)} + \frac{1}{4T\sqrt{a}}; \qquad Q = -\frac{3}{2(\xi+\eta)} - \frac{1}{4T\sqrt{a}}.$$

N'ayant à considérer l'équation (126) que dans un domaine où l'on a

$$\xi + \eta \geqq 2 R_0 \sqrt{T},$$

on voit que, dans le domaine qui nous intéresse, les fonctions P et Q seront les fonctions régulièrement analytiques des variables ξ et η.

Les côtés $A_k B_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) de la ligne brisée désignée par (L), dans l'énoncé du théorème qu'il s'agit de démontrer, sont situés sur les caractéristiques dont les équations sont les suivantes :

$$(127) \qquad \xi = \xi_k = R_0\sqrt{T} + 2(k-1)(R-R_0)\sqrt{a} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

tandis que les côtés $B_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) de la ligne brisée considérée sont situés sur les caractéristiques suivantes :

$$(127a) \qquad \eta = \eta_k = R_0\sqrt{T} + 2k(R-R_0)\sqrt{a},$$

Cela posé, on reconnaîtra aisément, en tenant compte de la continuité déjà démontrée des dérivées premières de la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ ainsi que des théorèmes X (p. 59) et XII (p. 60), que l'on a la proposition suivante :

(L_4). *La seule des trois dérivées*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\xi\partial\eta}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\eta^2}$$

qui puisse éprouver une discontinuité à la traversée du côté $A_k B_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *de la ligne* (L) *est la dérivée* $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\xi^2}$, *tandis que la seule des trois dérivées précédentes qui puisse éprouver une discontinuité à la traversée du segment* $B_k A_{k+1}$ *est la dérivée* $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\eta^2}$.

D'autre part, il est aisé de déduire de l'équation (126) la conséquence suivante : si l'on désigne par V_k la différence des valeurs limites de la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\xi^2}$ des deux côtés du côté $A_k B_k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$)

de la ligne (L) en un même point, l'on aura :

$$\frac{dV_k}{d\eta} + \{\mathfrak{L}\}_{\xi=\xi_k} V_k = 0.$$

Par conséquent on a le théorème suivant :

(L_5). *Lorsque la dérivée* $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$ *éprouve une discontinuité à la traversée du côté* $A_k B_k$ *de la ligne* (L) *en l'un de ses points, elle éprouve aussi une discontinuité à la traversée du segment* $A_k B_k$ *en n'importe quel autre de ces points.*

On établirait d'une façon tout à fait analogue la proposition suivante :

(L_6). *Lorsque la dérivée* $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}$ *éprouve une discontinuité à la traversée du côté* $B_k A_{k+1}$ *de la ligne* (L) *en l'un de ses points, elle éprouve aussi une discontinuité à la traversée du segment* $B_k A_{k+1}$ *en n'importe quel autre de ses points.*

Observons enfin que l'on a :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t} = \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi^2} \right\} \sqrt{a}\,\mathrm{T}. \tag{129}$$

Actuellement il est aisé de démontrer le théorème qu'il s'agit d'établir et qui est le théorème XV (p. 64). En effet, il résulte du lemme (L_1), que la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t}$ éprouve une discontinuité à la traversée de la ligne (L) dans le voisinage du point A_1. Donc, en vertu de l'égalité (129) et du lemme (L_4), la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi^2}$ éprouve une discontinuité à la traversée du segment $A_1 B_1$ dans le voisinage du point A_1; cette dérivée éprouve donc [lemme (L_5)] une discontinuité à la traversée du segment $A_1 B_1$ en n'importe lequel de ses points. Il résulte de là ainsi que de la formule (129) que la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t}$ éprouve une discontinuité à la traversée du segment $A_1 B_1$ en n'importe lequel de ses points. Par conséquent [lemme (L_2)] la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial r \partial t}$ et, en vertu de la formule (129) et du lemme (L_4), aussi la dérivée $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2}$ éprouvent chacune une discontinuité à la traversée du segment B_1A_2 dans le voisinage du point B_1, d'où il résulte [lemme (L_6)] que ces deux dérivées éprouvent chacune une discontinuité à la traversée du segment B_1A_2 en n'importe lequel de ses points et par conséquent, en particulier, dans le voisinage du point A_2. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on reconnaît que notre théorème peut être démontré en toute rigueur par la méthode d'induction mathématique. Nous le considérons donc comme établi.

10. **Seconde solution du problème IV** (p. 40).

20. Cherchons, en appliquant une méthode due à Fourier, à représenter la fonction $\mathcal{F}(r, t)$, demandée dans le problème IV (p. 40), au moyen d'une formule de la forme suivante :

$$\mathcal{F}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r)\,\varphi_k(t) \tag{1}$$

où les $u_k(r)$, sont des fonctions de la seule variable r, et les $\varphi(t)$, des fonctions de la seule variable t, les fonctions $u_k(r)$ et $\varphi_k(t)$ étant telles que leur produit vérifie l'équation aux dérivées partielles (71) (p. 41), c'est-à-dire l'équation

$$a\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial r^2} - 3\frac{a}{r}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial r} - \mathrm{T}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^2} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

et que, aux bornes de l'intervalle $(\mathcal{R}_0, \mathcal{R})$, le produit susdit satisfasse aux mêmes conditions que la fonction demandée dans le problème IV (p. 40).

On reconnaît immédiatement que la fonction $u_k(r)$ devra vérifier dans l'intervalle (R_0, R) une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2u_k(r)}{dr^2} - \frac{3}{r}\frac{du_k(r)}{dr} + \eta_k u_k(r) = 0, \tag{3}$$

où η_k représente une constante et que, aux bornes de l'intervalle (R_0, R), elle devra satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left\{\frac{du_k(r)}{dr}\right\}_{r=R_0} - b\,u_k(R_0) = 0 \quad \text{et} \quad \left\{\frac{du_k(r)}{dr}\right\}_{r=R} = 0. \tag{4}$$

On s'assure en même temps que la fonction $\varphi_k(t)$ devra satisfaire à l'équation différentielle

$$(5) \qquad T\varphi''_k(t) + \varphi'_k(t) + a\eta_k\varphi_k(t) = 0.$$

Après avoir désigné par $\varphi_k^{(1)}(t)$ et $\varphi_k^{(2)}(t)$ deux solutions particulières indépendantes de l'équation précédente, nous aurons

$$\varphi_k(t) = A_k\varphi_k^{(1)}(t) + B_k\varphi_k^{(2)}(t),$$

où les A_k et les B_k ($k = 1, 2, \ldots$) représentent des constantes qu'il faudrait déterminer de façon que les quantités

$$\mathcal{F}(r, 0) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)_{t=0}$$

se réduisent à des fonctions données de r dans l'intervalle (R_0, R). Cela étant, nous devons nous assurer de l'existence des fonctions $u_k(r)$ et de la possibilité de développer une fonction arbitraire de r dans l'intervalle (R_0, R) en une série à coefficients contants, procédant suivant les fonctions $u_k(r)$. Pour résoudre ces questions, on pourrait utiliser la théorie des fonctions de Bessel-Fourier. En effet, une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{3}{r}\frac{du}{dr} + \eta u = 0,$$

où η représente une constante et qui représente la forme générale des équations différentielles que doivent vérifier les fonctions $u_k(r)$, se ramène aisément à l'équation différentielle des fonctions de Bessel-Fourier d'ordre 2 car, si après avoir posé

$$V = \frac{u}{r^2},$$

on substitue à la variable r la variable s définie par la formule

$$s = r\sqrt{\eta},$$

on trouve que la fonction V vérifie l'équation différentielle

$$s^2\frac{d^2V}{ds^2} + s\frac{dV}{ds} + (s^2 - 4)V = 0,$$

qui est l'équation des fonctions de Bessel d'ordre 2.

Il y aurait tout avantage à utiliser la remarque précédente pour calculer effectivement les fonctions $u_k(r)$, mais, s'il s'agit de démontrer l'existence de ces fonctions et surtout d'étudier la possibilité de développer, suivant ces fonctions, dans l'intervalle (R_0, R), une fonction arbitraire de r, il est plus simple de faire appel à la théorie de l'équation intégrale de Fredholm.

21. Faisons correspondre à un paramètre σ compris dans l'intervalle (R_0, R) une fonction $K(r, \sigma)$ de r, définie dans l'intervalle (R_0, R) et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elle est continue dans tout l'intervalle (R_0, R);

2° Pour $r \neq \sigma$, on a

$$\frac{\partial^2 K(r, \sigma)}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial K(r, \sigma)}{\partial r} = 0;$$

3° on a

$$\lim_{\substack{r<\sigma \\ r \to \sigma}} \frac{\partial K}{\partial r} - \lim_{\substack{r>\sigma \\ r \to \sigma}} \frac{\partial K}{\partial r} = 1;$$

4° on a

$$\left\{\frac{\partial K}{\partial r} - b K\right\}_{r=R_0} = 0;$$

5° on a

$$\left\{\frac{\partial K}{\partial r}\right\}_{r=R} = 0.$$

Les conditions précédentes déterminent la fonction $K(r, \sigma)$ sans ambiguïté et l'on trouve que pour $r \leqq \sigma$ on a

$$K(r,\sigma) = \frac{1}{\sigma^3}\left\{\frac{r^4 - R_0^4}{4} + \frac{R_0^3}{b}\right\}, \tag{6}$$

et que pour $r \geqq \sigma$ on a

$$K(r,\sigma) = \frac{\sigma}{4} + \frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{R_0^3}{b} - \frac{R_0^4}{4}\right). \tag{6'}$$

Cela posé, on s'assure aisément que l'on a le théorème suivant :

XVI. *Si l'on désigne par $f(r)$ une fonction bornée définie sans ambiguïté dans l'intervalle* (R_0, R) *et intégrable au sens de M. Lebesgue dans cet intervalle, la formule*

$$v(r) = \int_{R_0}^{R} f(\sigma)\, K(r,\sigma)\, d\sigma \tag{7}$$

fait connaître une fonction $v(r)$ qui satisfait presque partout [et même partout lorsque la fonction $f(r)$ est continue] à l'intérieur de l'intervalle (R_0, R), *à l'équation différentielle*

$$(8)\qquad \frac{d^2 v}{dr^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + f(r) = 0,$$

et qui vérifie, en outre, aux bornes de l'intervalle considéré les conditions suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\frac{dv}{dr} - bv\right\}_{r=R_0} = 0; \qquad \left\{\frac{dv}{dr}\right\}_{r=R} = 0.$$

On reconnaît d'ailleurs avec la plus grande facilité qu'il ne peut exister qu'une seule fonction $v(r)$ vérifiant l'équation (8) dans l'intervalle (R_0, R) et les conditions (9) aux bornes de cet intervalle.

Il résulte des remarques précédentes que toute fonction $u_k(r)$ qui vérifie dans l'intervalle (R_0, R) l'équation différentielle (3) et qui satisfait aux bornes de cet intervalle aux conditions (4), satisfait aussi à l'équation fonctionnelle suivante :

$$(10)\qquad u_k(r) = \eta_k \int_{R_0}^{R} u_k(\sigma) K(r, \sigma) d\sigma.$$

Ce résultat ainsi que la théorie classique due à Fredholm, d'une classe d'équations intégrales, nous conduisent à envisager l'équation intégrale suivante :

$$(11)\qquad v(r, \eta) = \eta \int_{R_0}^{R} K(r, \sigma) v(\sigma, \eta)\, d\sigma + f(r),$$

où $f(r)$ représente une fonction réelle, définie dans l'intervalle (R_0, R), bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue. Il résulte du Mémoire fondamental de Fredholm [1] qu'il correspond au *noyau* $K(r, \sigma)$ de l'équation intégrale (11), une fonction $\Gamma(r, \sigma; \eta)$, quotient de deux fonctions entières du paramètre η dans lequel le diviseur ne dépend pas de la variable σ, dite *résolvante* de l'équation intégrale (11), telle que, pour toute valeur de η qui n'annule pas le dénominateur du rapport qui représente la fonction $\Gamma(r, \sigma; \eta)$, la

---

(1) FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica* t. 27, p. 365). E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. III, Paris, 1927, p. 372 et 373.

solution $v(r, \eta)$ de l'équation (11), solution d'ailleurs unique, puisse être représentée par la formule suivante :

$$v(r,\eta) = \eta \int_{R_0}^{R} \Gamma(r,\sigma,\eta) f(\sigma) d\sigma + f(r). \tag{12}$$

L'étude de l'équation (11) est particulièrement aisée parce que, l'expression

$$\frac{K(r,\sigma)}{r^3} \tag{12a}$$

étant une fonction symétrique des variables r et σ, le noyau $K(r, \sigma)$ est égal au produit d'une fonction symétrique des variables r et σ par une fonction positive de la variable r, à savoir r^3. Par conséquent [1] les principaux théorèmes relatifs aux équations intégrales linéaires à noyaux symétriques s'étendent au cas actuel. Cela étant, je crois pouvoir me borner à énoncer les résultats de l'étude de l'équation (11) et de sa résolvante. Voici ces résultats :

XVII. *L'ensemble des nombres caractéristiques du noyau* $K(r,\sigma)$ *coïncide avec l'ensemble des termes d'une certaine suite infinie, soit*

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \ldots, \tag{13}$$

de nombres réels et positifs, rangés dans l'ordre de grandeurs croissantes et non bornés dans leur ensemble,

XVIII. *Il correspond à tout terme* η_k *de la suite* (11) *une fonction* $u_k(r)$, *non nulle identiquement dans l'intervalle* (R_0, R), *fonction fondamentale de nombre caractéristique* η_k, *déterminée, à un facteur constant près, par le fait de vérifier l'équation fonctionnelle*

$$u_k(r) = \eta_k \int_{R_0}^{R} u_k(\sigma) K(r,\sigma) d\sigma, \tag{14}$$

ou ce qui revient au même, par la condition de satisfaire à l'équation (3) *dans l'intervalle* (R_0, R) *et de vérifier aux bornes de cet intervalle les conditions* (4).

---

[1] E. GOURSAT. *loc. cit.*, n° 593, p. 457.

Nous supposerons que l'on a disposé du facteur constant entrant dans l'expression générale de la fonction $u_k(r)$ de façon à avoir

$$\int_{R}^{R} \{u_k(r)\}^2 \frac{dr}{r^3} = 1. \tag{15}$$

XIX. *L'inégalité $j \neq k$, entraîne l'égalité suivante :*

$$\int_{R_0}^{R} u_j(r) u_k(r) \frac{dr}{r^3} = 0.$$

XX. *Lorsqu'une fonction $f(r)$, bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue, est telle que, pour toute valeur entière et positive de l'indice k on a*

$$\int_{R_0}^{R} f(r) u_k(r) \frac{dr}{r^3} = 0, \tag{16}$$

cette fonction satisfait à l'équation

$$\int_{R_0}^{R} \{f(r)\}^2 dr = 0, \tag{17}$$

et par conséquent elle est nulle presque partout dans l'intervalle (R_0, R) *et même, lorsqu'elle est continue, elle est identiquement nulle dans cet intervalle.*

La condition, pour une fonction $f(r)$ bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue, de satisfaire à l'équation (16) pour toutes les valeurs entières et positives de k équivaut visiblement à celle de satisfaire, pour toutes ces valeurs, de l'indice k à l'équation

$$\int_{R_0}^{R} r^3 f(r) \frac{u_k(r)}{r^3} dr = \int_{R_0}^{R} f(r) u_k(r) dr = 0,$$

donc, *l'énoncé* XX *équivaut au suivant : la suite de fonctions*

$$u_1(r), \quad u_2(r), \quad u_3(r), \quad \ldots, \tag{18}$$

est fermée.

XXI. *Si l'on continue à désigner par $f(r)$ une fonction bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue dans l'intervalle* (R_0, R) *et* *si pour toute valeur entière et positive de k, on pose*

$$C_k = \int_{R_0}^{R} f(r) u_k(r) \frac{dr}{r^3}, \tag{19}$$

on aura

$$\int_{R_0}^{R} \{f(r)\}^2 \frac{dr}{r^3} \geqq \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \quad (^1). \tag{20}$$

Pour reconnaître qu'il en est bien ainsi, il suffit de considérer que, eu égard à la relation (15) et au théorème XX, on a

$$\int_{R_0}^{R} \left\{ f(r) - \sum_{k=1}^{p} C_k u_k(r) \right\}^2 \frac{dr}{r^3} = \int_{R_0}^{R} \{f(r)\}^2 \frac{dr}{r^3} - \sum_{k=1}^{p} C_k^2.$$

Notons maintenant quelques conséquences des propositions précédentes.

Après avoir remplacé, dans les relations (19) et (20), la lettre r par la lettre σ et après avoir substitué ensuite à la fonction $f(\sigma)$ la fonction $\sigma^3 K(r, \sigma)$ on reconnaîtra, en se reportant à l'égalité (14), qu'on a

$$\int_{R_0}^{R} \{K(r,\sigma)\}^2 \sigma^3 \, d\sigma \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{u_k(r)\}^2}{\eta_k^2}. \tag{21}$$

Le premier membre de cette relation ayant une borne supérieure, soit A, on aura, dans tout l'intervalle (R_0, R), la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{u_k(r)\}^2}{\eta_k^2} \leqq A. \tag{27}$$

XXII. *Soit toujours $f(r)$ une fonction bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue et $\psi(r)$ la fonction définie par la formule*

$$\psi(r) = \int_{R_0}^{R} f(\sigma) K(r,\sigma) \, d\sigma. \tag{28}$$

---

(1) On peut prouver que, dans la relation (20), on peut remplacer le signe $\geqq$ par celui de l'égalité, mais il nous suffira de savoir que l'on a la relation (20) telle que nous l'avons écrite.

Si l'on pose pour toute valeur entière et positive de k

$$C_k = \int_{R_0}^{R} \psi(r)\, \frac{u_k(r)}{r^3}\, dr, \tag{29}$$

on aura

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(r), \tag{30}$$

la série du second membre de cette égalité étant absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R); *on aura, en outre, la formule suivante :*

$$\frac{\partial\psi(r)}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\partial u_k(r)}{\partial r}, \tag{31}$$

la série du second membre étant uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R).

Nous pourrions nous dispenser de démontrer la formule (30)(¹) mais pour mettre en évidence une circonstance sur laquelle nous aurons à nous appuyer pour établir la formule (31), nous présenterons cette démonstration, très simple d'ailleurs.

Portons la valeur (28) de $\psi(r)$ dans la formule (29) et utilisons le fait que la fonction (12 a) est symétrique, il viendra

$$C_k = \int_{R_0}^{R} \frac{f(\sigma)}{\sigma^3} \left\{ \int_{R_0}^{R} K(\sigma, r)\, u_k(r)\, dr \right\} d\sigma,$$

d'où il résulte, en vertu de l'égalité (14), que l'on a

$$C_k = \frac{C'_k}{\eta_k}, \tag{32}$$

en posant

$$C'_k = \int_{R_0}^{R} f(\sigma)\, u_k(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma^3}. \tag{33}$$

Mais (XXI, p. 74) la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} C'^2_k$$

(¹) *Voir* E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. III, Paris, 1927, n° 593, p. 457 et suivantes.

est convergente et, par conséquent, à cause de l'égalité (32), la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 C_k^2 \tag{34}$$

est convergente aussi. Posons

$$\mathcal{R}_{m,p} = \sum_{k=m}^{m+p} |C_k| \, |u_k(r)|.$$

Nous aurons

$$\mathcal{R}_{m,p}^2 \leqq \left\{ \sum_{k=m}^{m+p} C_k^2 \eta_k^2 \right\} \left\{ \sum_{k=m}^{m+p} \left(\frac{u_k(r)}{\eta_k} \right)^2 \right\},$$

ce qui, en vertu de la relation (27), nous donne

$$\mathcal{R}_{m,p}^2 \leqq A \sum_{k=m}^{m+p} C_k^2 \eta_k^2. \tag{35}$$

La série (34) étant convergente, il résulte de la relation précédente que la série formant le second membre de l'égalité (30) est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R). Pour s'assurer que l'égalité (30) a bien lieu, il suffit d'appliquer la proposition XX (p. 74) à la différence

$$\psi(r) - \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(r)$$

en tenant compte de l'égalité (15).

Pour établir la formule (31) remarquons que l'équation différentielle (3) que vérifie la fonction u_k peut s'écrire ainsi

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3} \frac{d\,u_k(r)}{dr} \right) + \eta_k \frac{u_k(r)}{r^3} = 0.$$

Eu égard à la seconde des égalités (4) (p. 69), on déduira de cette équation l'égalité suivante :

$$-\frac{1}{r^3} \frac{d\,u_k(r)}{dr} + \eta_k \int_r^R \frac{u_k(\sigma)}{\sigma^3}\, d\sigma = 0. \tag{36}$$

Posons

$$\mathcal{R}'_{m,p} = \sum_{k=m}^{m+p} C_k \frac{du_k(r)}{dr}$$

et portons y la valeur $\frac{du_k(r)}{dr}$ tirée de l'équation (36), il viendra

$$\mathcal{R}'_{m,p} = r^3 \int_r^R \sum_{k=m}^{m+p} C_k \eta_k \frac{u_k(\sigma)}{\sigma^3} d\sigma,$$

ce que nous écrirons ainsi

$$\mathcal{R}'_{m,p} = r^3 \int_{r_0}^R \frac{1}{\sigma^{\frac{3}{2}}} \left\{ \sum_{k=m}^{m+p} \frac{C_k \eta_k u_k(\sigma)}{\sigma^{\frac{3}{2}}} \right\} d\sigma,$$

d'où

$$\mathcal{R}'^2_{m,p} \leqq r^6 \int_{r_0}^R \frac{d\sigma}{\sigma^3} \int_{r_0}^R \frac{\left\{ \sum_{k=m}^{m+p} C_k \eta_k u_k(\sigma) \right\}^2}{\sigma^3} d\sigma,$$

et *a fortiori*

$$\mathcal{R}'^2_{m,p} \leqq R^6 \int_{R_0}^R \frac{d\sigma}{\sigma^3} \int_{R_0}^R \frac{\left\{ \sum_{k=m}^{m+p} C_k \eta_k u_k(\sigma) \right\}^2}{\sigma^3} d\sigma,$$

ce qui, eu égard à (15), donne en définitive :

$$(37) \qquad \mathcal{R}'^2_{m,p} \leqq \frac{1}{2} R^6 \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sum_{k=m}^{m+p} C_k^2 \eta_k^2$$

La série (34) étant convergente, la relation précédente prouve que la série qui forme le second membre de l'égalité (31) est uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R) et, puisque la formule (30) a déjà été établie, cela suffit pour assurer l'exactitude de la formule (31). En définitive le théorème qu'il s'agissait de démontrer est complètement établi.

Voici une remarque qui nous sera utile dans la suite :

XXIII. *Il résulte des relations* (35) *et* (37) *que, si l'on arrête les séries* (30) *et* (31) *au terme d'un rang* $m - 1$ *et si l'on désigne le reste correspondant de la série* (30) *par* $\mathcal{R}_m$ *et celui de la série* (31) *par* $\mathcal{R}'_m$, *l'on aura*

$$\mathcal{R}_m^2 \leqq A \sum_{k=m}^{\infty} C_k^2 \eta_k^2$$

ainsi que

$$\mathcal{R}_m'^2 \leqq \frac{1}{2} R^6 \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sum_{k=m} C_k^2 \eta_k^2.$$

22. Il est aisé maintenant de prouver que la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ demandée dans le problème IV (p. 40) et dont l'existence a déjà été démontrée, peut être représentée par une formule de la forme (1).

Observons tout d'abord que, après s'être reporté à l'énoncé IV (p. 40) et au théorème XVI (p. 71), on reconnaît que, à une valeur positive t_0 mais à cela près arbitrairement choisie de t, correspond la formule suivante :

$$\mathcal{F}(r, t_0) = -\int_{R_0}^{R} \left\{ T \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\sigma, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(\sigma, t)}{\partial t} \right\}_{t=t_0} K(r, \sigma) \frac{d\sigma}{a}$$

par conséquent (XXII, p. 75), après avoir posé

$$C_k = \int_{R_0}^{R} \mathcal{F}(r, t_0) \frac{u_k(r)}{r^3} dr \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots); \tag{38}$$

on aura

$$\mathcal{F}(r, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(r); \tag{39}$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R).

Les C_k seront évidemment des fonctions de t_0 qu'il nous faut déterminer au moyen des données du problème IV (p. 40). A cet effet remarquons que l'équation (2) (p. 69) que vérifie la fonction $\mathcal{F}(r, t)$ peut s'écrire ainsi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{a}{r^3} e^{\frac{t}{T}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{T}{r^3} e^{\frac{t}{T}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right\} = 0 \tag{40}$$

et considérons une fonction $W(r, t)$ des variables r et t, définie pour les systèmes de valeurs des variables r et t vérifiant les conditions

$$R_0 \leqq r \leqq R, \qquad t \geqq 0,$$

continue avec ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement dans le domaine précédent, vérifiant à l'intérieur de ce domaine l'équation aux dérivées partielles

$$(41)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{a}{r^3}e^{\frac{t}{T}}\frac{\partial W}{\partial r}\right\}-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{T}{r^3}e^{\frac{t}{T}}\frac{\partial W}{\partial r}\right\}=0$$

et satisfaisant aux conditions

$$(42)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=R_0}-b\,W(R_0, t)=0; \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=R}=0.$$

Multiplions l'équation (40) par $W(r, t)$ et retranchons en membre à membre l'équation (41) multipliée préalablement par $\mathcal{F}(r, t)$, puis, après avoir multiplié l'équation obtenue par $dr\,dt$, intégrons en étendant l'intégration au domaine défini par les relations

$$R_0 \leqq r \leqq R; \qquad 0 \leqq t \leqq t_0.$$

En faisant une application convenable de l'intégration par parties, on établira l'égalité suivante :

$$(43)\qquad e^{\frac{t_0}{T}}\int_{R_0}^{R}\left\{W(r, t_0)\left[\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}-\mathcal{F}(r, t_0)\left[\frac{\partial W(r, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}\right\}\frac{dr}{r^3}$$
$$=\int_{R_0}^{R}\left\{W(r, 0)\left[\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial t}\right]_{t=0}-\mathcal{F}(r, 0)\left[\frac{\partial W(r, t)}{\partial t}\right]_{t=0}\right\}\frac{dr}{r^3}.$$

Posons

$$(43a)\qquad W(r, t)=u_k(r)\,\psi_k(t),$$

en désignant par $\psi_k(t)$ une fonction de t vérifiant l'équation différentielle

$$(44)\qquad T\psi_k''(t)+\psi_k'(t)+a\eta_k\psi_k(t)=0$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(45)\qquad \psi_k(t_0)=0, \qquad \psi_k'(t_0)=1.$$

La valeur (43 a) de $W(r, t)$ vérifiera les équations (41) et (42). On pourra donc porter cette valeur de $W(r, t)$ dans l'égalité (43) qui nous donnera alors la formule suivante :

$$(46)\qquad \int_{R_0}^{R}\mathcal{F}(r, t_0)\frac{u_k(r)}{r^3}\,dr=e^{-\frac{t_0}{T}}\left\{A_k\psi_k'(0)-B_k\psi_k(0)\right\},$$

en posant

$$(47) \qquad A_k = \int_{R_0}^{R} \mathcal{F}(r, 0)\, u_k(r) \frac{dr}{r^3}, \qquad B_k = \int_{R_0}^{R} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)_{t=0} u_k(r) \frac{dr}{r^3}.$$

Les intégrales (47) sont faciles à calculer. A cet effet, il conviendra d'abord de s'assurer, en se reportant à l'énoncé IV (p. 40), que l'on a

$$(48) \qquad \mathcal{F}(r, 0) = H\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right) + L$$

ainsi que

$$\left\{\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial t}\right\}_{t=0} = -G,$$

$$\left\{\frac{d\mathcal{F}(r, 0)}{dr}\right\}_{r=R_0} - b\,\mathcal{F}(R_0, 0) = 0, \qquad \left\{\frac{d\mathcal{F}(r, 0)}{dr}\right\}_{r=R} = 0,$$

Cela posé, il faudra encore tenir compte de ce que, en vertu de la formule (48), on a

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r^3} \frac{d\mathcal{F}(r, 0)}{dr}\right\} + \frac{2H}{r^3} = 0$$

et que l'on a d'ailleurs les égalités suivantes :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3} \frac{d u_k(r)}{dr}\right) + \eta_k \frac{u_k(r)}{r^3} = 0$$

ainsi que

$$\left\{\frac{du_k(r)}{dr}\right\}_{r=R_0} - b\,u_k(R_0) = 0, \qquad \left\{\frac{du_k(r)}{dr}\right\}_{r=R} = 0.$$

Ces remarques faites on établira, avec quelque attention, les expressions suivantes de A_k et B_k :

$$(49) \qquad \begin{cases} A_k = \dfrac{2Hb}{\eta_k^2 R_0^3} u_k(R_0) \quad (^1), \\ B_k = -\dfrac{G.b}{\eta_k R_0^3} u_k(R_0). \end{cases}$$

---

[1] Pour calculer A_k on pourra tenir compte de l'égalité

$$\int_{R_0}^{R} \frac{d}{dr}\left\{\mathcal{F}(r, 0) \frac{1}{r^3} \frac{d u_k(r)}{dr} - u_k(r)\, r^3 \frac{d\mathcal{F}(r, 0)}{dr}\right\} dr = 0,$$

qui équivaut à la suivante :

$$\int_{R_0}^{R} \left\{\mathcal{F}(r, 0) \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \frac{d u_k(r)}{dr} - u_k(r) \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^3} \frac{d\mathcal{F}(r, 0)}{dr}\right)\right\} dr = 0.$$

Le calcul des fonctions $\psi_k(t)$ et, par conséquent, celui des expressions $\psi_k(0)$ et $\psi'_k(0)$ n'offrent aucune difficulté. Après avoir porté les valeurs trouvées de $\psi_k(0)$ et de $\psi'_k(0)$ dans la formule (46), on déduira de la formule (39) une expression de la quantité $\mathcal{F}(r, t_0)$ en fonction de r et de t_0. Pour énoncer le résultat que l'on obtient en remplaçant, dans l'expression obtenue de la façon qui vient d'être dite, le symbole t_0 par le symbole t, nous ferons correspondre à toute valeur entière et positive de l'indice k, deux fonctions de la variable t, $\varphi_k(t)$ et $\theta_k(t)$. Dans le cas exceptionnel où, pour la valeur considérée de k, l'équation caractéristique de l'équation (44) aurait une racine double, nous poserons

$$\varphi_k(t) = -e^{\frac{-t}{2T}}t; \qquad \theta_k(t) = \left(1 + \frac{t}{2T}\right)e^{\frac{-t}{2T}}. \tag{50}$$

Lorsque au contraire les racine ρ'_k et ρ''_k de l'équation caractéristique de l'équation (44) seront distinctes, nous poserons

$$\varphi_k(t) = \frac{e^{\rho''_k t} - e^{\rho'_k t}}{\rho'_k - \rho''_k}, \qquad \theta_k(t) = \frac{\rho'_k e^{\rho''_k t} - \rho''_k e^{\rho'_k t}}{\rho' - \rho''_k} \tag{51}$$

et nous aurons

$$\mathcal{F}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(r), \tag{52}$$

en posant

$$C_k = A_k \theta_k(t) - B_k \varphi_k(t). \tag{53}$$

La série (52) sera (XXII, p. 75) absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (R_0, R) tandis que la série

$$\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\partial u_k(r)}{\partial r} \tag{54}$$

sera uniformément convergente dans le même intervalle. Nous allons démontrer que, en réalité, les séries (52) et (54) seront uniformément convergentes dans tout le domaine défini par les relations suivantes :

$$R_0 \leqq r \leqq R; \qquad t \geqq 0. \tag{55}$$

Observons à cet effet qu'il existe, comme on le reconnaîtra aisément, une constante positive λ, telle que, pour toute valeur entière et positive de l'indice k et pour toute valeur non négative de la variable t, la valeur (53) de C_k satisfasse à la relation

$$|C_k| \leqq \lambda A_k.$$

Or, il résulte de la première des formules (49) et du théorème exprimé par la relation (27) que la série à termes constants suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \eta_k^2,$$

est convergente. Par conséquent (XXIII, p. 78) si l'on désigne par $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{R}'_m$ les restes respectifs des séries (52) et (54), arrêtés au terme de rang $m - 1$, l'on aura :

$$\mathcal{R}_m^2 \leqq A \lambda^2 \sum_{k=m}^{\infty} A_k^2 \eta_k^2,$$

$$\mathcal{R}_m'^2 \leqq \frac{\lambda^2}{2} R^6 \left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sum_{k=m}^{\infty} A_k^2 \eta_k^2,$$

relations desquelles il résulte que les séries (52) et (54) sont bien uniformément convergentes dans tout le domaine défini par les relations (55).

23. Actuellement il est très aisé de présenter la solution du problème posé au n° **8** (p. 22). En effet, nous avons ramené ce problème au problème II (p. 36). Après avoir mis ce problème sous la forme III (p. 38), nous avons reconnu qu'en introduisant la fonction $\Phi_1(r, t)$ définie par la formule

$$\Phi_1(r, t) = \frac{F}{2a} \left\{ \frac{r^2}{1} - \frac{r^4}{4R^2} - 2at \right\} + C, \tag{56}$$

où F et C représentent des constantes définies par les formules (65) (p. 39) on a, pour la fonction $\Phi(r, t)$ demandée dans le problème II (p. 36), la formule suivante :

$$\Phi(r, t) = \Phi_1(r, t) + \mathcal{F}(r, t), \tag{57}$$

en désignant par $\mathcal{F}(r, t)$ la fonction demandée dans le problème IV (p. 40). Or, d'après la première des formules (34) (p. 33) on a la formule

$$\omega = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{58}$$

pour la vitesse angulaire de l'ensemble des points physiques du liquide qui se trouvent à la distance r de l'axe du cylindre $(\mathcal{C})$.

Cela posé les formules (56), (57) et (58) donnent

$$\omega = \frac{F}{2a\rho}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial r}, \tag{59}$$

et, puisque nous avons admis l'adhérence du liquide au cylindre $(\mathcal{C})$, nous aurons pour la vitesse angulaire ω_0 de ce cylindre la formule suivante :

$$\omega_0 = \frac{F}{2a\rho}\left\{\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R^2}\right\} + \frac{1}{\rho R_0^3}\left\{\frac{\partial \mathcal{F}(r, t)}{\partial r}\right\}_{r=R_0} \tag{60}$$

qui représente la solution du problème posé au n° **8**.

Voici une remarque qu'appelle la formule (60); il résulte des formules (53) et (54) que la quantité $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r}$ tend vers séro lorsque t croît indéfiniment, d'autre part, en se reportant à l'énoncé IV (p. 40), on s'assurera qu'à l'époque $t = 0$ les deux termes du second membre de la formule (60) sont de signes contraires et que c'est le second terme qui en valeur absolue est le plus grand. Il y aura donc une époque à laquelle ω_0 s'annulera et, comme nous l'avons déjà expliqué à la fin du n° **13** (*voir* p. 41), à partir de cette époque, la formule (103) ne sera plus valable.

TABLE DES MATIÈRES.