MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BRUNO PONSON

Le vote par consensus

Mathématiques et sciences humaines, tome 87 (1984), p. 5-32
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__87__5_0>

Math. Sci. hum. (22^e année, n°87, *1984*, p.5-32)

LE VOTE PAR CONSENSUS

Bruno PONSON *

INTRODUCTION

Parmi les votes non ordonnés à un tour qui, seuls, nous intéresseront ici, la recherche de procédures ayant les meilleures qualités possibles a été l'objet de très importants travaux depuis que Condorcet (1785) a mis en évidence son fameux paradoxe qui peut apparaître pour le vote à la majorité simple (*plurality voting*) dès que le nombre des candidats dépasse deux.

Arrow (1963) confirmait ce fait pour tous les types de vote, à condition que certaines hypothèses tout à fait raisonnables soient satisfaites.

Plus récemment, Gibbard (1973) et Satterthwaite ont prouvé qu'aucun système de vote raisonnable n'est à l'abri de la manipulation. De façon plus précise, dans n'importe quelle procédure de vote non dictatoriale et non binaire il est possible d'envisager des états de l'opinion pour lesquels des joueurs auront intérêt à manipuler leur vote.

Par contre, si l'on restreint les préférences individuelles, il devient possible de construire une procédure de vote non manipulable. Ce sera, par exemple, pour le vote à la majorité le cas bien connu des préférences unimodales (Black, 1948), mais aussi le cas des préférences avec creux unique ou des préférences dichotomiques (Sen, 1966) c'est-à-dire en ce dernier cas que l'ensemble des options (ou candidats) est divisé en deux

---

* Université Paris XII - Val-de-Marne et E.S.C.P.

groupes (en sorte que toutes les options d'un groupe soient préférées ou non préférées, suivant les votants, aux options de l'autre groupe).

D'autre part, l'introduction de procédures avec transferts ou de procédures aléatoires (Moulin, 1978, chap. 4) conduit aussi à la non manipulabilité. On retrouve ici la procédure qui a permis de résoudre les problèmes non équilibrés de théorie des jeux à deux joueurs.

Les propriétés des divers systèmes de vote doivent donc être étudiées précisément afin de connaître leurs qualités et leurs défauts en fonction de l'objectif désiré.

Quelles qualités doit avoir une procédure de vote ?

Deux paraissent avoir une importance particulière :

- être simple pour une facile compréhension par les votants mais aussi ne pas avoir un coût de mise en oeuvre trop élevé ;
- élire un gagnant de Condorcet, s'il existe, c'est-à-dire le candidat qui l'emporte sur tous les autres lors d'une comparaison par paires.

D'autre part les qualités de non-manipulabilité, neutralité, anonymat et efficacité sont elles-mêmes éminemment souhaitables :

- une procédure est dite non-manipulable si tout joueur (votant) dispose d'une stratégie dominante (pour toute utilité - ou opinion - possible) ; il n'a de ce fait aucun besoin de connaître l'opinion des autres votants ;

- une procédure est dite neutre si, lorsque tout le monde change son vote, le candidat élu change (pour le cas à 2 joueurs) et de façon plus générale si aucun candidat n'est avantagé ;

- une procédure est dite anonyme si tous les votants sont sur un pied d'égalité, c'est-à-dire influencent d'une façon semblable le résultat final.

Du fait qu'aucune des procédures de vote ne saurait satisfaire à toutes ces propriétés intrinsèques, il convient de comparer les procédures entre elles afin d'en déduire celles qui sont le plus anonymes, neutres ou non-manipulables.

Le vote par consensus[1], semble ainsi, parmi toutes les procédures de vote à un tour, avoir des propriétés comparatives qui le rendent extrêmement intéressant.

De quoi s'agit-il ?

Chaque votant vote, sans ordre de préférence, pour autant de candidats qu'il le désire (k = 0, ..., m où k est le nombre de candidats pour lesquels on vote et m le nombre de candidats). Le choix collectif résultera de la sommation sur chaque candidat de l'ensemble des voix qu'il recueille. On déclare élus les candidats recueillant le plus grand nombre de voix.

Cette procédure, extrêmement simple donc très facile à mettre en place[2], rappelle celle de Borda, qui est un peu plus compliquée : il s'agit dans la procédure de Borda pour chaque votant de donner son ordre de préférence sur l'ensemble des candidats, le classement final étant obtenu en additionnant les rangs de chaque candidat obtenus auprès de chaque votant.

Robert Weber (1978) compara vote par consensus et procédure de Borda, mais il n'a guère développé de travaux sur ce thème par la suite.

Ce n'est pas le cas de Steven Brams et Peter Fishburn qui ont analysé en détail le vote par consensus (Brams, Fishburn (1978) ; Fishburn, Brams (dans deux articles de 1979)). Les propriétés leur paraissent telles que Brams n'hésite pas à demander son application immédiate à l'élection présidentielle américaine (surtout pour les primaires et les conventions des grands partis, puisque l'élection finale ne s'opère en général qu'entre deux candidats). Les développements qui vont suivre sont issus, pour l'essentiel, de leurs travaux et doivent ainsi susciter controverses et poursuite des recherches sur cette procédure de vote. Notre souhait est que son utilisation se développe à tous niveaux (instances universitaires, associations, voire élections politiques).

(1) Traduction de l'expression *approval voting* . On peut aussi bien parler de vote par approbation.

(2) Néanmoins le temps de dépouillement est légèrement allongé par rapport au vote uninominal à un tour, celui-ci ne comportant qu'un nom au plus sur chaque bulletin.

L'étude du vote par consensus sera scindée en deux sections :

- *les stratégies*, où seront présentées leurs propriétés (dominance, admissibilité) ainsi que les propriétés de base du vote par consensus (sincérité et non-manipulabilité).
- *l'équité entre votants* pose des problèmes plus délicats qui montrent comme pour la sincérité et la non-manipulabilité la supériorité du vote par consensus, que l'on introduise ou non l'utilité. S'il n'est pas anonyme, il est néanmoins plus équitable que le vote à la majorité simple dans la plupart des situations concrètes.

1.- LES STRATEGIES

Rappelons que le principe du vote par consensus est de permettre à tout votant de choisir un nombre quelconque d'individus parmi les candidats sans qu'il lui soit demandé toutefois de les ordonner ou classer. On élit alors les candidats recueillant le plus grand nombre de voix.

La notion, plus générale, de système de vote permettra de formaliser la définition du vote par consensus.

1.1.- Systèmes de vote et stratégies

DEFINITION 1.1. : *Un système de vote non ordonné à un tour est caractérisé par un sous-ensemble s de l'ensemble $\{1,2, \ldots m-1\}$, où m est le nombre de candidats*(1) .

Par exemple, si $s = \{1,3\}$, le votant ne peut que s'abstenir, voter pour un seul ou voter pour trois candidats.

DEFINITION 1.2. : *Le vote par consensus est le système de vote tel que $s = \{1, \ldots , m-1\}$.*

---

(1) Le vote pour tous les m candidats n'est pas retenu dans cette définition car il est en tous points équivalent, par ses effets, à l'abstention, qui est toujours permise (elle correspond à $s = \emptyset$).

Nous remarquons également :

- que si $s = \{1\}$ on retrouve le vote à la majorité simple usuel ;
- qu'à $s = \{1, m-1\}$ est associé le vote "négatif" dans lequel on peut voter pour un candidat ou contre un candidat (si on vote pour les m-1 autres). On parle aussi de vote par opposition.

Les propriétés de ces divers systèmes de vote seront comparées par la suite.

DEFINITION 1.3. : *On appelle stratégie tout sous-ensemble S de l'ensemble Ω des candidats.*

Ainsi, s'il y a plus d'un candidat chaque votant a $2^m - 1$ stratégies (on a enlevé la stratégie "vote pour tous les candidats" qui fait double emploi avec l'abstention).

DEFINITION 1.4. : *Une stratégie S est possible pour un système de vote s si et seulement si card $S \in s$ ou si S est l'abstention.*

Ainsi pour le système de vote $s = \{1, 3\}$, la stratégie consistant à voter pour deux candidats n'est pas possible. Alors que pour le vote par consensus toutes les stratégies sont possibles, le nombre de stratégies possibles est beaucoup plus faible pour le système de vote à la majorité simple, uninominal $(m + 1)$, ou le vote négatif $(2m + 1)$.

Nous supposerons, comme généralement en cas d'analyse de systèmes de vote, que les votants ont des préférences entre les candidats ou groupes de candidats et que ces préférences sont représentables par un préordre total P noté $\gtrsim$ ($>$ en cas de préférence stricte).

D'autre part, on s'intéressera aux décisions prises par l'un quelconque des votants et à leurs effets sur le résultat final de l'élection. Ce votant sera appelé votant focal.

1.2.- Dominance

Après l'avoir définie, il conviendra de caractériser commodément la propriété de dominance.

DEFINTION 1.5. : *On appelle* *contingence* *l'application* $f : a \in \Omega \mapsto f(a) \in \{0, \ldots n-1\}$ *où n est le nombre de votants* (n-1 car on enlève le votant focal). *On note* $F(S,f)$ *l'ensemble des élus*[1] (c'est-à-dire l'ensemble des candidats ayant obtenu le plus de voix) *lorsque le votant focal utilise sa stratégie S et que les autres votants ont adopté la contingence* f.

Il est clair que f(a) est le nombre de voix obtenues par a, sans compter le vote du votant focal.

DEFINITION 1.6. : *La stratégie S domine la stratégie T si et seulement si*

$$F(S,f) \succsim F(T,f),\ \forall f \qquad [1]$$

$$\text{et } \exists f,\ F(S,f) \succ F(T,f) \qquad [2]$$

Autrement dit une stratégie S domine une stratégie T pour le votant focal si elle permet l'élection d'un candidat (ou d'un groupe de candidats) préféré ou indifférent à ce que permettrait la stratégie T, et ceci en toute circonstance (et il y a au moins une circonstance pour laquelle la préférence est stricte).

Cette définition s'impose par sa clarté mais la référence au choix des autres votants rend difficile son utilisation pratique.

De ce fait on va chercher à caractériser (théorème 1.1.) la dominance en ne faisant référence qu'aux préférences du votant focal, à condition toutefois d'accepter la validité de deux hypothèses "raisonnables" (portant sur les préférences entre candidats) :

HYPOTHESES : - *Si* $a \succ b$, $\{a\} \succ \{a,b\}$ *et* $\{a,b\} \succ \{b\}$ [3]

- *Si* $A \cup B \neq \emptyset$ *et* $B \cup C \neq \emptyset$ *alors*
$(a \succsim b,\ b \succsim c$ *et* $a \succsim c,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \forall c \in C) \Rightarrow (A \cup B) \succsim (B \cup C)$ [4]

(1) Il est à noter que départager les ex-aequos relève de considérations étrangères à celle développées ici et mériterait une étude particulière.

Chaque votant étant caractérisé par son préordre total de préférences P, on notera A_1, A_2, ... A_t les groupes de candidats ex-aequo pour le votant et ce dans l'ordre décroissant (A_1, qui sera noté aussi M, regroupe le ou les candidats les meilleurs pour le votant; A_t, qui sera noté aussi L, le ou les pires). On a donc $A_1 > A_2 > ... > A_t$, avec $\bigcup_{i=1}^{t} A_i = \Omega$

DEFINITION 1.7. : *B est* <u>*haut*</u> $\Leftrightarrow \forall a \in B \cap A_j$ *alors* $\forall i < j$, $\forall a \in A_i$, $a \in B$.
B est <u>*bas*</u> $\Leftrightarrow \forall a \in B \cap A_j$ *alors* $\forall i > j$ $\forall a \in A_i$, $a \in B$.

En d'autres termes, si B est haut (1) , il ne contient que les meilleurs candidats pour le votant focal (B contient tous les candidats préférés strictement à n'importe quel candidat de B).

Si B est bas (1), il ne contient que les moins bons candidats (B contient tous les candidats pires strictement que n'importe quel candidat de B).

Par exemple, si le préordre est tel que (pour 6 candidats) $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{c\}$, $A_3 = \{d,e,f\}$. $\{a,b,c\ d\}$ est haut et $\{d,f\}$ est bas mais $\{c,d,f\}$ ne l'est pas.

DEFINITION 1.8. : *Un votant est* <u>*concerné*</u> *s'il n'est pas indifférent entre tous les candidats.*

Un votant non concerné n'a pas de stratégie dominée, c'est pourquoi ce cas est écarté du théorème suivant qui vise à caractériser les stratégies dominées (et dominantes).

THEOREME 1.1. : *Si le votant est concerné, sous les hypothèses* [3] *et* [4] *S domine T* $\Leftrightarrow$ *S* $\neq$ *T, S-T est haut, T-S est bas et ni S-T ni T-S ne regroupent tous les candidats.*

La démonstration est donnée en annexe , à titre d'illustration de la méthode.

---

(1) B haut (bas) est une partie "finissante" ("commençante") pour l'ordre strict associé au préordre total. L'ensemble des candidats est à la fois haut et bas.

1.3.- Admissibilité

1.3.1.- Définition et caractérisations

DEFINITION 1.9. : *Une stratégie S est admissible si et seulement si elle est possible et il n'existe pas d'autre stratégie possible la dominant.*

Nous pouvons ainsi dire que les stratégies admissibles sont celles qui restent après élimination des stratégies dominées.

Il va être commode de caractériser les stratégies admissibles de façon simple ou, du moins, opérationnelle. Nous nous plaçons comme précédemment avec un votant focal dont le préordre des préférences est donné et connu.

THEOREME 1.2. : *Une stratégie possible S est admissible* ⇔

soit . elle contient l'ensemble M des meilleurs candidats [5-1]

et [5]

. elle ne contient pas de sous-ensemble non vide B tel que B est bas et S-B possible [5-2]

soit . elle ne contient aucun des candidats parmi les pires (L) [6-1]

et [6]

. il n'existe aucun ensemble A non vide, haut, disjoint de S tel que A∪S soit possible [6-2]

Ainsi libellé, le théorème ne paraît pas avoir une interprétation simple et concrète. Ce ne le sera plus lorsqu'on se placera dans le cadre de systèmes de vote particuliers au paragraphe suivant.

Démonstration : Elle ne pose pas de problème particulier et consiste à démontrer successivement les trois situations suivantes :

- S admissible ⇒ $S \supset M$ ou $S \cap L = \emptyset$ [7]
- Dans le cas où $S \supset M$, S admissible ⇔ [5-2]
- Dans le cas où $S \cap L = \emptyset$, S admissible ⇔ [6-2]

1.3.2.- Cas particuliers de l'admissibilité(1)

Que devient la propriété d'admissibilité et sa caractérisation pour des systèmes de votes particuliers ?

(1) Les démonstrations,ne posant pas de difficulté, sont omises.

PROPOSITION 1.1 : *Pour le vote par consensus, la stratégie S est admissible* $\Leftrightarrow M \subset S$ *et* $L \cap S = \emptyset$.

DEFINITION 1.10. : *Un préordre de préférences P est dit dichotomique si les candidats sont répartis en deux ensembles au sein desquels il y a indifférence.*

De même, en cas de trichotomie de préférences, il y a trois sous-ensembles de candidats au sein desquels il y a indifférence.

PROPOSITION 1.2. : (corollaire de proposition 1.1.) *Si les préférences sont dichotomiques, la seule stratégie admissible pour le vote par consensus est* M.

PROPOSITION 1.3. : *Pour le vote uninominal à un tour* ($s = \{1\}$), *stratégie* $S = \{a\}$ *admissible* $\Leftrightarrow a \notin L$.

PROPOSITION 1.4. : *Pour le vote par opposition* ($s = \{1, m-1\}$)
$S = \{a\}$ *admissible* $\Leftrightarrow$ *a strictement préféré à au moins deux autres candidats*
$S = \{\bar{a}\}$ *admissible* $\Leftrightarrow$ *au moins deux autres candidats sont strictement préférés à a*
(*$\bar{a}$ signifie voter pour tous les candidats sauf a*)

1.4.- Sincérité

DEFINITION 1.11. : *La stratégie S est sincère si et seulement si S est haut.*

En effet, un vote est sincère s'il ne repose que sur les propres préférences du votant, s'il n'est en aucune façon influencé par les préférences des autres votants (qui peuvent être considérées comme inconnues de lui). Il va de soi qu'une telle stratégie doit être admissible (c'est-à-dire possible et non dominée). Parmi les stratégies admissibles notre votant sincère ne conservera que celles correspondant à un comportement prudent, c'est-à-dire celles ne comportant que des candidats préférés donc hautes. En effet, soit a préféré à b ; si a n'est pas dans la stratégie qu'il choisit et s'il se trouve que son vote influence le résultat il va faire élire b alors qu'il aurait fait élire a ou ne rien changer au résultat, en prenant a au lieu de b.

DEFINITION 1.12. : *Le système de vote s est dit sincère si et seulement si toutes les stratégies admissibles dans s sont sincères.*

THEOREME 1.3. :

a) Si P est dichotomique, tout système de vote non ordonné à un tour est sincère pour P.

b) Si P trichotomique, le seul système de vote non ordonné à un tour sincère est le vote par consensus.

c) Si P est quadrichotomique (ou plus) aucun système de vote non ordonné à un tour ne peut être sincère pour P.

Etapes de la démonstration du théorème 1.3.

a) D'après le théorème 1.2., toutes les stratégies admissibles sont hautes, donc sincères. Les systèmes de vote sont donc eux-mêmes tous sincères en cas de dichotomie des préférences.

b) i) Si s est le vote par consensus, toute stratégie admissible est telle que $M \subset S$ et $L \cap S = \emptyset$ d'après la prop. 1.1.. Puisque les préférences sont trichotomiques, ensemble des candidats $= \Omega = \{M,D,L\}$. Il est clair que S est haute car S contient tout M, aucun élément de L et éventuellement certains de D (qui sont tous indifférents entre eux et préférés par ceux de M, déjà dans S).
Toutes les stratégies admissibles étant sincères, le vote par consensus est sincère dans le cas de trichotomie des préférences.

ii) Si s n'est pas le vote par consensus il existe des stratégies admissibles non sincères.

c) Dans le cas multichotomique, on a quatre sous-ensembles d'indifférence ou plus :
$A_1 \ldots A_n$ tels que card $A_i = m_i$ et $\sum_i m_i = m$ (avec $A_1 = M$ et $A_n = L$).

Tout système peut s'écrire $s = \{s_1, s_2, \ldots , s_r\}$
où $1 < s_1 < s_2 < \ldots < s_r$ et $s_r < m$ $(r \geqslant 1)$.

On peut alors montrer que dans toute situation de préférences quadrichotomiques (ou plus) on peut trouver, pour tout système de vote non ordonné à un tour, au moins une stratégie admissible mais non sincère. C'est-à-dire qu'en ce cas aucun système de vote n'est sincère.

Cette étude de la sincérité montre à l'évidence la supériorité du vote par consensus par rapport aux autres procédures de vote non ordonné à un tour puisque c'est celui qui est le plus souvent sincère (en fonction des préférences du votant focal). Nous allons voir qu'il en va de même pour la propriété de non-manipulabilité.

1.5.- Non manipulabilité

DEFINITION 1.13. : *Une procédure de vote est non manipulable si tout votant dispose d'une stratégie dominante, c'est-à-dire dominant toutes les stratégies possibles.*

Dans ces conditions il est équivalent de dire qu'une procédure de vote est non manipulable s'il n'y a pour chaque votant qu'une seule stratégie admissible.

THEOREME 1.4. (démonstration en annexe) :

a) Le vote par consensus est le seul système de vote non manipulable dans le cas de préférences dichotomiques.

b) Dans le cas où les préférences sont trichotomiques (ou plus), aucun système de vote n'est non-manipulable.

2.- L'EQUITE ENTRE VOTANTS

Après avoir passé en revue un certain nombre de propriétés du vote par consensus liées aux décisions du votant focal, il importe d'aborder le problème des poids respectifs des votants. En effet le nombre de candidats choisis par le votant lui confère plus ou moins de poids dans le résultat du vote, ce qui peut sembler un handicap sévère pour le vote par consensus, car la propriété d'anonymat n'est pas vérifiée.

2.1.- Le vote par consensus n'est pas équitable entre votants

2.1.1.- La notion de force

Nous allons montrer que, dans le vote par consensus, un votant a d'autant plus de poids que le nombre de candidats pour lesquels il vote est proche de la moitié.

Il convient pour ce faire de mettre au point une mesure du poids d'un votant.

DEFINITION 2.1. : *On pose comme mesure de la différence entre deux sous-ensembles :* $\rho(A,B) = \rho(B,A) = 1 - \frac{|A \cap B|^2}{|A|.|B|}$ [8]

($| \ |$ désignant le nombre d'éléments de l'ensemble)

Notons que ceci est bien une mesure de la différence entre les ensembles A et B car si A = B, $\rho(A,B) = 0$ et si $A \cap B = \emptyset$, $\rho(A,B) = 1$ (en ce cas ils sont le plus différents possible).

On tire un élément de A et un élément de B ; alors $\rho(A,B)$ est la probabilité qu'au moins un des éléments de A ou B ne soit pas dans l'autre ; en effet :

$\rho(A,B) = 1 - \frac{|A \cap B|}{|A|} \times \frac{|A \cap B|}{|B|} = 1 -$ Prob (un élément de A est dans B) x Prob (un élément de B est dans A) = Prob (un élément de A n'est pas dans B ou un de B n'est pas dans A).

On va alors étudier les différences entre ensembles d'élus lorsque le votant focal s'abstient (ensemble d'élus A) ou vote (ensemble d'élus B) tous les autres votes restant inchangés.

Si $A \neq B$, d'où peut provenir la différence ?

- Le votant ajoute une voix à un candidat (ou plusieurs) qui n'était qu'à une voix des autres et vient donc s'ajouter à eux ; en ce cas $A \subset B$ strictement.

- Le votant ajoute une voix à un candidat (ou plusieurs mais pas tous ceux de A) qui était dans A ; en ce cas $A \supset B$ strictement.

Dans tous les autres cas, on aura A = B.

PROPOSITION 2.1. : $\rho(A,B)$ *est l'accroissement de probabilité qu'un ou plusieurs éléments (candidats) de la stratégie S choisie par le votant focal gagne, lorsque le votant focal passe de l'abstention au vote de S (les autres votes restant fixes).*

<u>Démonstration</u> : $\frac{|A \cap S|}{|A|}$ est la probabilité que l'un des éléments de S gagne quand le votant s'abstient.

$\frac{|B \cap S|}{|B|}$ est la probabilité que l'un des éléments de S gagne quand le votant vote pour S.

$\frac{|B \cap S|}{|B|} - \frac{|A \cap S|}{|A|}$ est donc l'augmentation de la probabilité de gagner pour au moins un élément de S lorsque le votant focal passe de l'abstention au vote de S.

Or ici $\rho(A,B) = \frac{|B \cap S|}{|B|} - \frac{|A \cap S|}{|A|}$

En effet si A = B, $\frac{|B \cap S|}{|B|} - \frac{|A \cap S|}{|A|} = 0$ comme $\rho(A,B)$

si $A \neq B$, on sait qu'on ne peut qu'avoir $A \subset B$ ou $B \subset A$ (donc en particulier $A \cap B \neq \emptyset$) [9]

. Si $A \subset B$, on a forcément $A \cap S = \emptyset$ et $B - A \subset S$ donc $B \cap S = B - A$, d'où

$$\frac{|B \cap S|}{|B|} - \frac{|A \cap S|}{|A|} = \frac{|B - A|}{|B|} - 0 = \frac{|B - A|}{|B|} = 1 - \frac{|A|}{|B|}$$

Or $\rho(A,B) = 1 - \frac{|A|}{|B|}$ en ce cas, puisque $A \cap B = B$

. Si $B \subset A$, on a ici $A \cap S = B$ et $(A - B) \cap S = \emptyset$ soit $B \subset S$ donc $B \cap S = B$ et

$$\frac{|B \cap S|}{|B|} - \frac{|A \cap S|}{|A|} = \frac{|B|}{|B|} - \frac{|B|}{|A|} = 1 - \frac{|B|}{|A|}$$

Or $\rho(A,B) = 1 - \frac{|B|}{|A|}$ en ce cas, puisque $A \cap B = A$

On va s'intéresser alors à la mesure du poids du vote du votant focal sur le résultat, ce poids se manifestant dès que $\rho(A,B) \neq 0$ (le vote produit un effet sur le résultat final, on dira que le vote est efficace).

DEFINITION 2.2. : *La* *__force__*(1) *de la stratégie S du votant focal est définie par :*

$$E_k(m,p) = \sum_{h=1}^{(2^m-2)^p} \frac{\rho(A_h,B_h)}{(2^m-2)^p} \qquad [10]$$

où $k = \text{card } S$.

(1) On pourrait parler d'efficacité de la stratégie mais on risquerait la confusion avec la propriété d'efficacité d'une procédure de vote (une procédure de vote est efficace si elle ne sélectionne que des optima de Pareto).

Justifions quelque peu cette définition :
il y a m candidats et p votants concernés autres que le votant focal (un votant est concerné s'il ne s'abstient ni ne vote pour tous les candidats à la fois) ; dans ces conditions, chacun des autres votants concernés a $2^m - 2$ façons de voter et l'ensemble des p autres votants a donc $(2^m - 2)^p$ façons de voter ; la force est donc la moyenne arithmétique simple des $\rho(A_h,B_h)$ pour h variant sur toutes les façons de voter des autres votants.

PROPOSITION 2.2. :

a) $E_k(m,p) = 0 \Leftrightarrow k = 0$

b) $0 \leq E_k(m,p) < 1$

c) Toutes les stratégies ayant le même nombre de candidats ont la même force (la propriété de neutralité est donc vérifiée pour le vote par consensus).

Démonstration :

a) Si $k = 0$, $A_h = B_h$, $\forall h$, donc $\rho(A_h,B_h) = 0$, $\forall h$.
Si $E_k(m,p) = 0$, $\rho(A_h,B_h) = 0$, $\forall h$, ce qui n'est possible que si le votant focal n'apporte aucune voix à l'un quelconque des candidats (seule façon de n'influencer en aucune circonstance le résultat du vote).

b) $\rho(A_h,B_h) \geq 0$, $\forall h$, donc $E_k(m,p) \geq 0$

Par construction $\rho(A_h,B_h) \leq 1$, $\forall h$ (donc $E_k(m,p) \leq 1$)
De plus, d'après [9] , on sait que $\rho(A_h,B_h) < 1$
(car si $\rho(A_h,B_h) = 1$ cela signifierait $A_h \cap B_h = \emptyset$, ce qui est impossible).

c) l'expression même [10] ne fait référence qu'au nombre d'éléments de S, indépendamment de ceux-ci. La neutralité est donc satisfaite puisqu'aucun des candidats n'a a priori d'avantage quelconque par rapport à un autre.

PROPOSITION 2.3. : *$E_k(m,p)$ peut s'interpréter comme le gain moyen (en termes de probabilité de gagner) qu'apporte aux éléments de S le votant en votant pour S plutôt qu'en s'abstenant.*
En d'autres termes $E_k(m,p)$ est la probabilité qu'un individu (au moins) de S gagne si le votant focal vote S moins celle qu'un individu (au moins) de S gagne si le votant focal s'abstient.

La démonstration est immédiate d'après la proposition 2.1. mais ceci nécessite l'hypothèse d'absence de coalition, en ce sens qu'on fait l'hypothèse que chaque votant a équiprobabilité de choisir l'une des stratégies possibles. Si ce n'était pas le cas, il faudrait des pondérations dans [10].

Le problème est donc de voir comment rendre la force maximale pour le votant concerné.

2.1.2.- Détermination de la stratégie la plus forte

PROPOSITION 2.4. :

Si $p = 0$, la force maximale est obtenue pour $k = 1$

Si p s'accroît, la force baisse (pour k et m fixés), c'est-à-dire que le pouvoir d'un votant est d'autant plus faible que les votants sont nombreux.

Démonstration : Si le votant est seul, $X = A \supset B$ donc $E_k(m,0) = 1 - \frac{k}{m}$ d'après [10], expression maximisée pour $k = 1$ (pour $k = 0$, ce serait l'abstention) : en ce cas, voter pour un seul individu, c'est l'élire.

THEOREME 2.1. :

Posons $r_k^j(m,p) = \dfrac{E_j(m,p)}{E_k(m,p)}$ (pour $j,\ k \in \{1,2,\ldots,m-1\}$)

et $r_k^j(m) = \lim\limits_{p\to\infty} r_k^j(m,p)$. Alors,

a) $r_2^1(3,p) > 1, \quad \forall p$, et $r_2^1(3) = 1$

b) $r_k^j(m) = \dfrac{j(m-j)}{k(m-k)}, \quad \forall m > 3, \quad \forall j,k \subset \{1,2,\ldots,m-1\}$

Démonstration :

a) Ceci n'est qu'un cas particulier du b)

b) On sait que dans la détermination de $E_k(m,p)$ les seuls $\rho(A_h,B_h)$ qui ne sont pas nuls sont ceux qui sont associés à des A_h ayant plusieurs éléments dont un au moins dans S ou à des A_h dont les éléments ont une voix de plus qu'au moins un élément de S.

Considérons le cas d'un événement générique E dont deux candidats x et y se détachent à au plus une voix d'écart, les autres étant distancés de 2 voix ou plus.

Dans ces conditions,

si x et y ex-aequo, $\rho = 0$ $\begin{cases} \text{si } x \notin S \text{ et } y \notin S \\ \text{ou si } x \in S \text{ et } y \in S \end{cases}$

$\rho = \frac{1}{2}$ si $x \in S$ et $y \notin S$

(ou si $y \in S$ et $x \notin S$, ce qui est identique)

si x a une voix de plus que y,

$\rho = 0$ $\begin{cases} \text{si } y \notin S \\ \text{ou si } y \in S \text{ et } x \in S \end{cases}$

$\rho = \frac{1}{2}$ si $y \in S$ et $x \notin S$

Les événements E° vérifiant la première situation dans laquelle $\rho = \frac{1}{2}$ sont potentiellement au nombre de k(m-k) puisque y peut être choisi parmi k et x parmi les m-k restants et qu'il y a équiprobabilité (absence de coalition).

Les événements E^{1} vérifiant la deuxième situation dans laquelle $\rho = \frac{1}{2}$ sont, pour la même raison, au nombre de k(m-k).

Or, lorsque p s'accroît, la probabilité d'avoir plusieurs candidats à une voix les uns des autres s'amenuise relativement à celle de n'avoir que deux candidats à une voix d'écart.

Lorsque p s'accroît, la proportion des $\rho(A_h,B_h)$ liés à des événements génériques s'accroît donc parmi les $\rho(A_h,B_h)$ non nuls. On a donc :

$$E_k(m,p) \underset{p \text{ grand}}{\simeq} \frac{1}{2}k(m-k)(P(E^{\circ}) + P(E^{1})) \qquad [11]$$

$$\text{soit } r_k^j(m) = \frac{j(m-j)}{k(m-k)}$$

PROPOSITION 2.5. : *Si $m \geqslant 4$, la force maximale est obtenue pour $k = \frac{m}{2}$ si m pair et $k = \frac{m-1}{2}$ ou $k = \frac{m+1}{2}$ si m impair.*

<u>Démonstration</u> : D'après [11] on voit que, si p grand, pour m et p fixés, $E_k(m,p)$ est à peu près proportionnel à k(m-k). Or $\max_k k(m-k)$ est obtenu pour $k = \frac{m}{2}$ (il va de soi que k si m impair, le maximum est obtenu pour $\frac{m-1}{2}$ ou $\frac{m+1}{2}$). La distribution des forces ainsi obtenue, en fonction de k, est unimodale et symétrique par rapport à $k = \frac{m}{2}$.

On a ainsi précisé dans quelle mesure le vote par consensus violait l'anonymat des votants et proposé, avec la force, une mesure des poids respectifs de chacun.

Il convient de comparer cependant de ce point de vue de l'anonymat le vote par consensus et d'autres procédures de vote.

Jusqu'à présent, on a supposé que les préférences étaient a priori indifférentes aux candidats (c'est-à-dire que, pour le votant focal, chacun des candidats a autant de chances d'être élu).

Dans la réalité, il est bien connu qu'il en va souvent autrement (sauf en cas d'information très faible sur l'environnement) : c'est le cas par exemple des préférences unimodales (pour une élection politique les candidats sont de facto classés par tous les votants sur une échelle de la gauche à la droite).

2.2.- Le vote par consensus est plus équitable que le vote à la majorité simple

Introduisons les utilités attachées par le votant à chaque candidat et supposons que le votant cherche la stratégie qui lui permettra de maximiser son espérance d'utilité.

2.2.1.- La stratégie de maximisation de l'espérance d'utilité pour le vote par consensus

PROPOSITION 2.6. : *La stratégie optimale du votant est celle qui regroupe tous les candidats dont l'utilité (pour lui, s'ils étaient élus) dépasse l'utilité moyenne.*

Remarquons que la stratégie optimale ainsi définie peut s'éloigner sérieusement de la stratégie de force maximale définie à la Prop. 2.5. puisqu'il n'y a pas de raison a priori que le nombre de candidats dont l'utilité dépasse l'utilité moyenne soit égal à $\frac{m}{2}$ (si m pair) ou $\frac{m+1}{2}$ (si m impair).

Démonstration : On fait toujours l'hypothèse que les votants votent indépendamment, chacun ayant une probabilité p_k de voter pour k candidats $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$.

Le nombre de sous-ensembles de k candidats étant C_m^k, la probabilité qu'un votant vote pour un sous-ensemble de k candidats donné est donc $\frac{P_k}{C_m^k}$.

Les préférences déclarées ou supposées des autres candidats ne sont donc pas prises en compte pour l'instant. Comme le votant focal les votants sont supposés avoir une fonction d'utilité de Von Neumann - Morgenstern sur les candidats et ont donc pour objectif de maximiser leur espérance d'utilité.

Notons $u_1, u_2, \ldots u_m$ les utilités affectées par le votant focal aux candidats du préféré au pire. Puisque notre votant est concerné par le vote, $u_1 > u_m$. Posons $\bar{u} = \frac{\Sigma u_i}{m}$.

On sait (Prop. 2.3.) que si le votant vote pour k candidats il accroît la probabilité d'être élu pour chacun des k de $\frac{E_k(m,p)}{k}$ et diminue celle de chaque autre de $\frac{E_k(m,p)}{m-k}$.

De ce fait, voter pour k candidats plutôt que de s'abstenir lui procurera un accroissement d'utilité noté G_k.

$$G_k = \sum_{i=1}^{k} u_i \frac{E_k(m,p)}{k} - \sum_{i=k+1}^{m} u_i \frac{E_k(m,p)}{m-k}$$

$$G_k = \frac{E_k(m,p)}{k(m-k)} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i (m-k) - \sum_{k+1}^{m} k\, u_i\right)$$

$$G_k = \frac{mE_k(m,p)}{k(m-k)} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i - k \underbrace{\sum_{1}^{m} \frac{u_i}{m}}_{\bar{u}}\right) \qquad [12]$$

Si p grand, on a donc :

$$G_k \simeq m\, c(m,k) \left(\sum_{1}^{k} u_i - k\, \bar{u}\right)$$

$$G_k \simeq m\, c(m,k) \left[(u_1 - \bar{u}) + (u_2 - \bar{u}) + \ldots + (u_k - \bar{u})\right]$$

où $c(m,k) = \frac{1}{2} (P(E^\circ) + P(E^1))$ d'après [11].

G_k sera donc maximum si le votant vote pour <u>tous</u> les candidats pour lesquels, pour lui, $u_i > \bar{u}$ puisqu'alors $u_i - \bar{u} > 0$.

Il va de soi que le gain en termes d'utilité dépend de l'allure même de la fonction d'utilité du votant. Ainsi ce gain est nul pour un votant indifférent entre tous les candidats et maximum lorsque l'utilité est la même (et maximale) pour les k candidats préférés et la même (et minimale) pour les candidats restants.
Ainsi dans le vote par consensus les votants ne sont pas considérés de façon équitable du point de vue du critère de la maximisation de l'espérance d'utilité. Il en va de même et de façon plus accentuée pour le vote à la majorité simple(1).

2.2.2.- <u>La maximisation de l'espérance d'utilité rend les votes plus inéquitables dans le cas du vote à la majorité simple</u>

Faisant toujours l'hypothèse de l'indépendance des votes, on doit considérer que pour chaque votant les autres ont une probabilité $\frac{1}{m}$ de voter pour chaque candidat. Chaque votant a, dans ces conditions, tout intérêt à voter pour le candidat qu'il préfère (le vote est sincère).

La force E(m,p) pour le vote à la majorité simple est la différence entre la probabilité que le candidat pour lequel on vote gagne et la probabilité que ce même candidat gagne si l'on ne vote pas ($\frac{1}{m}$ en ce dernier cas), d'après la proposition 2.3.

Considérons, pour simplifier, une fonction d'utilité prenant ses valeurs entre 0 et 1 :

$$1 = u_1 \geqslant \dots \geqslant u_k > \bar{u} \geqslant u_{k+1} \geqslant \dots \geqslant u_m = 0$$

2.2.2.1.- <u>Dans le cas du vote par consensus</u>

PROPOSITION 2.7. :

$$\textit{Si } 1 < k < m-1 \text{ , } \frac{m\, E_k(m,p)}{2k(m-k)} < G_k \leqslant E_k(m,p) \qquad [13]$$

$$\textit{Si } k = 1, \frac{m\, E_1(m,p)}{2\,(m-1)} < G_1 < E_1(m,p) \qquad [14]$$

$$\textit{Si } k = m-1, \frac{m\, E_{m-1}(m,p)}{2(m-1)} < G_{m-1} < E_{m-1}(m,p) \qquad [15]$$

---

(1) Par contre le vote à la majorité est équitable entre les votants dans le sens où chacun a le même poids pour modifier le résultat de l'élection (puisque chacun ne vote que pour un candidat), ce qui est la propriété d'anonymat (non vérifiée, on l'a vu pour le vote par consensus).

La démonstration met d'abord en évidence les bornes sur $\bar{u}$, avant de déterminer celles sur G_k.
Dans les trois cas précédents il est immédiat de constater que le rapport R_k de la borne la plus élévée à la plus faible de G_k est :

$$\frac{1}{\frac{m}{2k(m-k)}} = \frac{2k(m-k)}{m} = R_k \qquad (k = 1 \dots m-1) \qquad [16]$$

2.2.2.2.- Dans le cas du vote à la majorité simple

D'après [12] le gain d'utilité espéré pour un votant à la majorité simple est $G = G_1 = \frac{m}{m-1} E(m,p)(1-\bar{u})$ puisque $u = 1$ pour le meilleur candidat.

Or on a (1) $\frac{1}{m-k+1} < \bar{u} \leqslant \frac{k}{k+1}$ où k est le nombre de candidats dont l'utilité pour le votant focal est supérieure strictement à $\bar{u}$, utilité moyenne des candidats.

Il vient alors $\frac{m}{m-1} E(m,n)\ (1 - \frac{1}{m-k+1}) \geqslant G > \frac{m}{m-1}\ E(m,p)(1 - \frac{k}{k+1})$

Soit un rapport R entre les extrêmes pour G qui s'élève à :

$$\frac{m-k+1-1}{m-k+1} \Big/ \frac{k+1-k}{k+1} = \frac{(m-k)(k+1)}{m-k+1} = R \qquad [17]$$

pour le vote à la majorité, en ayant pris soin implicitement de conserver la même fonction d'utilité qu'avec le vote par consensus précédent.

2.2.2.3. Comparaison des deux procédures de vote

a) A fonctions d'utilité identiques

Maintenant que sont mises en évidence pour le vote par consensus et pour le vote à la majorité les mesures de l'inégalité que sont R_k et R données par [16] et [17] (ceci à fonctions d'utilité identique dans les deux cas, bien entendu), il convient de les comparer.

Posons $D = R - R_k$ et étudions son signe.

$$D = \frac{(m-k)(k+1)}{m-k+1} - \frac{2k(m-k)}{m} = \frac{m(k+1) - 2k(m-k+1)}{m(m-k+1)}$$

---

(1) Les deux fonctions d'utilité extrêmes étant :
$u_1 = \dots = u_k = 1$, $\bar{u} = u_{k+1} = \dots = u_{m-1}$, $u_m = 0$ (borne sup. de $\bar{u}$) et
$u_1 = 1$, $u_2 = \dots = u_k = \bar{u} + \varepsilon$, $u_{k+1} = \dots = u_m = 0$ (borne inf. de $\bar{u}$).

Or $m(m-k+1) > 0$; donc après avoir effectué le numérateur, $\text{sgn } D = - \text{sgn } (2k^2 - (m+2)k + m)$, trinôme du 2ème degré en k dont les racines sont $\frac{m}{2}$ et 1, d'où :

PROPOSITION 2.8.

. *$D < 0$ si $k > \frac{m}{2}$* (ou $k < 1$, ce qui n'a pas de sens ici), *c'est-à-dire qu'en ce cas l'inégalité est plus forte entre votants pour le vote à la majorité.*

. *$D > 0$ si $1 < k < \frac{m}{2}$ et en ce cas l'inégalité est plus forte entre votants pour le vote par consensus.*

. *$D = 0$ si $k = 1$ ou $k = \frac{m}{2}$ ce qui est dire qu'alors les deux procédures conduisent à une même inégalité entre votants.*

Pour y voir plus clair, passons en revue les cas les plus courants concernant le nombre de candidats et appliquons chaque fois la proposition 2.8. et les formules [16] et [17].

Si m = 2 nous savons qu'il ne se pose aucun problème dans les résultats de vote.

Si m = 3, $\frac{m}{2} = 1{,}5$ et on a donc toujours une inégalité au moins aussi forte que le vote à la majorité :

k	1	2
R	1,33	1,5
R_k	1,33	1,33

Si m = 4, $\frac{m}{2} = 2$ et il en va de même

	k	1	2	3
Majorité	R	1,5	2	2
Consensus	R_k	1,5	2	1,5

Si $m \geqslant 5$, on peut avoir $1 < k < \frac{m}{2}$ donc des situations où le vote par consensus est plus inégalitaire que le vote à la majorité. Par exemple, pour m = 5 et k = 2 le vote à la majorité est moins inégalitaire.

k	1	2	3	4
R	1,6	2,25	2,67	2,5
R_k	1,6	2,4	2,4	1,6

Pour m = 6 on a également une seule situation (sur 5) pour laquelle le vote à la majorité est moins inégalitaire.

Pour m = 7 et m = 8, il s'en trouve deux (sur 6 et 7 respectivement), etc .

Au total, nous pouvons remarquer que pour un nombre raisonnable de candidats (ce qui est le cas de la plupart des votes réels) le vote par consensus est en général moins inégalitaire que le vote à la majorité.

b) Sans exiger une même fonction d'utilité pour les deux procédures. Pour le vote par consensus la fonction d'utilité implique le nombre de candidats pour lesquels on vote (tous ceux dont l'utilité est supérieure à $\bar{u}$) alors que pour le vote à la majorité simple on ne vote que pour un candidat quelle que soit la fonction d'utilité.

Considérons et comparons R et R_k sans les relier par une même fonction d'utilité (on revient à la force maximale vue avant l'introduction des utilités).

→ D'après [16], $R_k = \frac{2k(m-k)}{m}$ donc max R_k est obtenu en annulant la dérivée de l'expression précédente $\frac{2m-4k}{m} = 0$

d'où $k = \frac{m}{2}$ (si m pair)

$k = \frac{m+1}{2}$ (ou $\frac{m-1}{2}$) si m impair

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } R_k \max = \frac{m}{2} \text{ si m pair} \\ R_k \max = \frac{m^2-1}{2m} \text{ si m impair} \end{array}\right\} \quad [18] \quad \text{(pour le vote par consensus)}$$

→ Pour le vote à la majorité, on a d'après [12]

$$G_1 = \frac{m\,E(m,p)}{m-1}(u_1 - \bar{u})$$

Les deux fonctions d'utilité extrêmes envisageables sont :

$u_1 = 1,\ u_2 = \ldots = u_m = 0$

et $u_1 = u_2 = \ldots = u_{m-1} = 1,\ u_m = 0$

La première conduit à rendre G_1 maximum

car $G_1 = \frac{m\ E(m,p)}{m-1}\ (1 - \frac{1}{m}) = E(m,p)$.

La deuxième conduit à rendre G_1 minimum

$$G_1 = \frac{m\ E(m,p)}{m-1}(1 - \frac{m-1}{m}) = \frac{E(m,p)}{m-1}$$

Ainsi, pour le vote à la majorité

$$\max R = m - 1 \qquad [19]$$

Par [18] et [19] on peut construire un tableau comparant, en fonction du nombre des candidats, les amplitudes maximales d'inégalités entre votants :

	m	3	4	5	6	7	8
Consensus	R_k	2,67	2	2,4	3	3,43	4
Majorité	R	2	3	4	5	6	7

De ce point de vue on constate que le vote à la majorité est potentiellement plus inéquitable que le vote par consensus.

CONCLUSION

Le vote par consensus possède d'éminentes qualités, comparé aux autres procédures de vote non ordonnées à un tour.

Le théorème 1.3. nous a montré son avantage décisif en matière de sincérité, de même pour la non-manipulabilité (théorème 1.4.). Bien que non équitable entre votants, le vote par consensus reste plus équitable que le vote à la majorité simple (prop. 2.8.) dans la plupart des situations concrètes.

A cela s'ajoute une simplicité de mise en oeuvre pratique qui devrait le faire préférer à la procédure de Borda (vote ordonné), lourde à mettre en place pour des élections, malgré certains avantages de cette dernière si le nombre de candidats est élevé, comme le montre Weber (1978).

On peut donc s'étonner que le vote par consensus ne soit pas plus souvent utilisé comme procédure. Des études complémentaires portant non seulement sur des comparaisons aux procédures de vote ordonnées de type Borda mais aussi à la mise en évidence de possibilités de coalitions ou à la prise en compte de fonctions d'utilité à caractères spécifiques (unimodalité par exemple) devraient permettre d'affiner encore la connaissance de cette procédure de vote.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARROW K., *Choix collectif et préférences individuelles*, Paris, Calmann-Lévy, 1974 [trad. de la 2e éd. américaine, 1964].
2. BRAMS S., FISHBURN P., "Approval voting", *The American Political Science Review*, 72 (1978), 831-847.
3. CONDORCET (Marquis de), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.
4. FISHBURN P., "A strategic analysis of non-ranked voting systems", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35 (1978), 488-495.
5. FISHBURN P., BRAMS S., *Expected utility and approval voting*, Mimeo, 1979, 13 + 6 p.
6. FISHBURN P., BRAMS S., *Efficacy, power and equity in approval voting*, Miméo, 1979 , 29 + 8 p.
7. FISHBURN P., GEHRLEIN W., "An analysis of voting procedures with non-ranked voting", *Behavorial science*, 22 (1977), 178-185.
8. GIBBARD A., "Manipulation of voting schemes, a general result", *Econometrica*, 41 (1973), 587-601.
9. MERRIL S., "Approval voting : a "Best buy" Method for multicandidate elections ?", *Mathematics Magazine*, 52 (1979), 98-102.
10. MOULIN H., "La stratégie du vote", *Cahiers de mathématiques de la décision*, n° 7823 (1978), 118 p., Université Paris-Dauphine.
11. MOULIN H., *The strategy of social choice*, Paris, Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 1981, 308 p.
12. SEN A., "A possibility theorem on majority decisions rule", *Econometrica*, 34 (1966), 491-499.
13. WEBER R., "Comparison of public choice systems (comparison of public choice systems, Multiply-weighted voting systems, reproducing voting systems)", *Cowles Foundation discussion paper*, n° 498 (1978), 3 + 25 + 25 + 24 p.
14. BRAMS S., FISHBURN P., *Approval voting*, Boston, Birkhäuser, 1983

A N N E X E

<u>Démonstration du théorème 1.1.</u>

1. Démonstration de l'implication réciproque (condition suffisante).

Après un lemme liminaire nous montrerons successivement les conditions [1] et [2] caractéristiques de la dominance.

→ <u>Lemme</u> : $S \neq T$, si $S-T$ haut et $T-S$ bas, alors il existe a et b tels que $a > b$, avec $a \in S-T$ ou avec $b \notin T-S$ mais $a \notin T-S$

<u>Démonstration du lemme</u> : Puisque $S \neq T$, c'est que $S-T \neq \emptyset$ ou $T-S \neq \emptyset$ (et le votant est concerné).

. Si $S-T \neq \emptyset$, prenons $a \in A_1$, c'est-à-dire un meilleur candidat pour le votant focal (possible puisque $S-T$ haut).
Il est alors immédiat que $\exists\, b \notin S-T$, $a > b$ (sinon le votant serait non concerné).

. Si $T-S \neq \emptyset$, prenons $b \in A_t$, c'est-à-dire le pire candidat pour le votant focal (possible puisque $T-S$ bas).
Il est immédiat alors que $\exists\, a \notin T-S$, $a > b$ (sinon tous les candidats seraient aussi mauvais que b, ce qui est impossible puisque le votant est concerné).

→ Il convient de vérifier maintenant que [1] est satisfaite, c'est-à-dire que $\forall f$, $F(S,f) \succsim F(T,f)$.

Trois éventualités sont à considérer.

- Cas d'utilisation de T par le votant focal, au moins un des élus est dans $S-T$ (i.e. : $F(T,f) \cap (S-T) \neq \emptyset$).
Du fait que décider S plutôt que T ne peut que détacher la position de cet élu par rapport aux candidats qui ne sont pas dans $S-T$ et par rapport à ceux qui dont dans $S-T$ mais pas dans $F(T,f)$, on a : $F(S,f) = F(T,f) \cap (S-T)$ [a]

On applique dans [4] à $A = \emptyset$, $B = F(S,f) \neq \emptyset$ et $C = F(T,f) - F(S,f)$.

Si $C = \emptyset$, $F(T,f) = F(S,f)$ ce qui vérifie bien [1].

Supposons donc que $C \neq \emptyset$. Du fait que

$\forall b \in B = F(S,f)$, $b \in S-T$ et que $\forall c \in C$, $c \notin S-T$ (d'après [a]), alors $b \succsim c$ par le lemme liminaire démontré précédemment.

Or $a \succsim b$ et $a \succsim c$, donc par [4], $A \cap B \succsim B \cap C$.

ce qui s'écrit $F(S,f) \succsim F(S,f) \cup (F(T,f) - F(S,f))$

c'est-à-dire $F(S,f) \succsim F(T,f)$ (d'après [a])

- Le votant focal utilise S et au moins l'un des élus est dans T-S (i.e. : $F(S,f) \cap (T-S) \neq \emptyset$).

  Du fait que choisir T plutôt que S ne peut que baisser sa position par rapport à ceux qui ne sont pas dans T-S et par rapport à ceux qui son dans T-S mais non dans F(S,f), on a :

  $$F(T,f) = F(S,f) \cap (T-S) \qquad [b]$$

  Utilisons [4] en posant $A = F(S,f) - F(T,f)$, $B = F(T,f)$ et $C = \emptyset$.
  Si $A = \emptyset$, la condition [1] est satisfaite.
  Considérons donc le cas où $A \neq \emptyset$

  $\forall a \in A$, $a \notin T-S$ et $\forall b \in B = F(T,f)$, $b \in T-S$ (d'après [b]).

  Alors, par le lemme liminaire, $a \succsim b$. Or $a \succsim c$ et $b \succsim c$ donc, par [4], $A \cup B \succsim B \cup C$, c'est-à-dire :
  $(F(S,f) - F(T,f)) \cup F(T,f) \succsim F(T,f)$,
  soit $F(S,f) \succsim F(T,f)$.

- Le troisième cas regroupe les situations non déjà évoquées (c'est-à-dire qu'on a $F(S,f) \cap (T-S) = \emptyset$ ou $F(T,f) \cap (S-T) = \emptyset$).

. Prenons $a \in F(T,f)$ et $a \notin T-S$. Alors $a \in T \cap S$ ou bien $a \notin T$ et $a \notin S$. Il vient donc que $a \in F(S,f)$ puisqu'il ne modifie pas l'équilibre des voix lorsqu'on passe de T à S (a appartenant soit aux deux soit à aucun).

. Considérons $a \in F(S,f)$ avec $a \notin S-T$. Alors $a \in T \cap S$ ou a n'appartient ni à T ni à S. C'est-à-dire $a \in F(T,f)$ pour la même raison que précédemment.

. De ce qui précède on conclut donc que :
  $\{a/a \in F(T,f),\ a \notin T-S,\ a \notin S-T\} = \{a/a \in F(S,f),\ a \in T-S,\ a \notin S-T\}$, ensemble noté B.

. Posons alors $A = F(S,f) \cap (S-T)$
  $C = F(T,f) \cap (T-S)$

  $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a \succ b$ puisque a appartient à un ensemble haut, ce qui n'est pas le cas pour b.

  $\forall b \in B$, $\forall c \in C$, $b \succsim c$ car c est dans un ensemble bas et b n'y est pas.

  $\forall a \in A$, $\forall c \in C$, $a \succsim c$ car a est dans un ensemble haut et c dans un bas.

On applique alors [4] d'où $A \cup B \succcurlyeq B \cup C$, ce qui est dire

$F(S,f) \succcurlyeq F(T,f)$.

2. Condition nécessaire

On suppose donc maintenant que S domine T.

→ Si S-T (respectivement T-S) est l'ensemble des candidats c'est-à-dire que T (resp. S) est vide et S (resp. T) l'ensemble des candidats, donc $F(S,f) = F(T,f)$ en ce cas et aucune stratégie ne domine l'autre (on sait que s'abstenir est équivalent à voter pour tous les candidats). La dominance implique donc que S-T et T-S soient non vides.

→ Si $S = T$, il va de soi que $F(S,f) = F(T,f)$, $\forall f$, ce qui est incompatible avec la dominance.

→ Si S-T n'est pas haut (resp. si T-S n'est pas bas), il existe a et b tels que $a > b$ avec $a \notin S-T$ et $b \in S-T$ (resp. $a \in T-S$ et $b \notin T-S$).

Il suffit alors de reprendre la démonstration qui succède à celle du lemme liminaire en intervertissant les rôles de S et T.
Il vient donc que :
$\exists f$, $F(T,f) > F(S,f)$ ce qui rend impossible la dominance de T par S.
La nécessité de toutes les conditions posées dans le théorème 1.1. est ainsi montrée.

Démonstration du théorème 1.4.

a) Supposons les préférences du votant dichotomiques.

→ Le vote par **consensus** est non manipulable car il n'y a qu'une stratégie admissible en ce cas, celle qui consiste à voter pour tous les meilleurs d'après la prop. 1.4.

→ Si l'on n'est pas dans le cas du vote par **consensus il existe au moins** un nombre de candidats i ($i \neq m$) pour lequel on ne peut voter. Distinguons deux cas :

- $\exists\, i / i + 1 \notin s$ et considérons une situation de préférences dichotomiques dans laquelle le nombre d'éléments de l'ensemble M des meilleurs soit $i + 1$.

Toutes les stratégies à i éléments incluses dans M sont admissibles car satisfont [6]. La procédure de vote est alors manipulable (car on a trouvé une situation où plusieurs stratégies admissibles sont permises).

- $\exists\ i / i-1 \notin s$ et considérons une situation de préférences dichotomiques telle que le nombre d'éléments de l'ensemble M des meilleurs soit $i - 1$. Alors toute stratégie à i éléments contient M et est admissible car satisfait à [5]. La procédure de vote est donc manipulable.

b) Dans le cas multichotomique considérons les sous-ensembles d'indifférence A_1, A_2, ... A_n ($n \geqslant 3$) de cardinaux respectifs m_1, m_2, ..., $m_n (m_1 + \ldots + m_n = m)$.

La procédure de vote permet de voter pour s_1 ... ou s_r votants ($1 < s_1 < \ldots \quad s_r \leqslant m-1$).

→ Supposons que $\forall i$, $s_i \neq m_1$

- ou bien $s_1 > m_1$ et toute stratégie à s_1 éléments contient A_1 (ensemble des préférés) donc est admissible d'après [5]. La multiplicité de ces stratégies admissibles signifie la manipulabilité.
- ou bien $s_1 < m_1$ et considérons le plus grand s_i tel que $s_i < m_1$; alors la multiplicité (car il existe $s_{i+1} > m_1$) des stratégies admissibles à s_i éléments (cf [6]) conduit à prouver la manipulabilité.

→ Supposons que $\forall i$, $s_i \neq m - m_n$

- ou bien $s_r < m - m_n$ et alors, d'après [6], toute stratégie à s_r éléments étant disjointe de $A_n = L$ est admissible. Or il y a plus d'une de ces stratégies donc la procédure est manipulable.
- ou bien $s_r > m - m_n$ et nous considérons s_j le plus petit des s_i tels que $s_i > m - m_n$. Les stratégies à s_j éléments sont admissibles d'après [5] et sont au moins deux (puisque, s'il existe, $s_{j-1} < m - m_n$). La manipulabilité est donc possible.

→ D'après ce qui précède, s'il existe des stratégies non-manipulables elles doivent être telles que, à la fois,

$\exists i,\ s_i = m_1$ et $\exists j,\ s_j = m - m_n$

En particulier, voter pour tous les candidats de A_1 est admissible ; de même voter pour tous les candidats sauf ceux de A_n (d'après [5] et [6]). La multiplicité des stratégies admissibles induit alors la manipulabilité.