CHRISTINE FROIDEVAUX

La fonction logique ε de Hilbert à travers les « Grundlagen der Mathematik »

Mathématiques et sciences humaines, tome 84 (1983), p. 65-82

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1983__84__65_0>

Math. Sci. hum. (*21*^{e} année, n°84, *1983*, p.65-82)

LA FONCTION LOGIQUE ε DE HILBERT A TRAVERS LES "GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK"

Christine FROIDEVAUX (□)

> "Comme le Dieu des philosophes, l'opération de Hilbert est incompréhensible et ne se voit pas; mais elle gouverne tout et ses manifestations sensibles éclatent partout."
>
> A. GODEMENT

Nous nous proposons de présenter la fonction logique ε telle qu'elle est définie et étudiée dans l'ouvrage de Hilbert et Bernays "Grundlagen der Mathematik II" (1939)(10). Cette fonction ε est plus connue des mathématiciens sous l'appellation de "symbole τ", symbole dont se sert Bourbaki pour fonder sa théorie des ensembles. Les membres de cette équipe (Note 1) ayant trouvé que la lettre grecque ε était trop répandue dans la littérature mathématique, lui ont préféré la lettre τ. Nous allons voir, par ailleurs, que Hilbert a également employé la lettre τ, mais dans un autre but.

La nécessité de l'utilisation de cette fonction ε à des fins métamathématiques, dans un édifice logique, est controversée. Les auteurs eux-mêmes reconnaissent que le recours à une telle fonction n'est pas indispensable. Néanmoins, il constitue une étape importante dans l'élaboration du formalisme de Hilbert, qui, rappelons-le, est l'initiateur de la théorie de la démonstration. Nous tâcherons donc de restituer l'entreprise de ce dernier dans son contexte historique.

(□) Université Paris XI, L.R.I.

I - LA FONCTION ε : HISTORIQUE, DEFINITION ET THEOREMES FONDAMENTAUX

1 - Une première fonction transfinie τ :

Avant de définir la fonction ε, Hilbert a introduit, dès 1923, dans son système logique (calcul des prédicats du premier ordre), une fonction logique, qui à tout prédicat associe un objet (Gegenstand), et un axiome dit transfini. Cet axiome (Note 2) se trouve énoncé dans (6) ainsi :

$$(\tau) \qquad \boxed{A(\tau A) \Rightarrow A(y)} \qquad \text{(transfinites Axiom),}$$

où y est une variable d'individu, A(x) un prédicat à une variable x, et τA - noté également $\tau_x A(x)$ - un terme.

Cavaillès ((3), p.116) indique que la fonction τ était appelée familièrement l'Aristide : appliquée à un prédicat, "elle désigne l'individu duquel, avant tout autre individu, serait vrai le prédicat A (s'il convenait à un individu)". Lautmann pour sa part, propose de concevoir l'objet τA "comme celui auquel il y a le moins de chance que s'applique la propriété A." ((13), p.85).

Hilbert, quant à lui, éclaire le contenu de son axiome en l'illustrant par un exemple. Prenons pour A le prédicat "être corruptible" (bestechlich sein) : "Dann hätten wir unter τA einen bestimmten Mann von so unverbrüchlichem Gerechtigkeitssin zu verstehen,dass, wenn er sich als bestechlich herausstellen sollte, tatsächlich alle Menschen überhaupt bestechlich sind" ("τA désignerait un certain homme d'une telle inébranlable intégrité que si on pouvait prouver sa corruptibilité, tous les hommes seraient alors corruptibles")((2), p.116).

Hilbert ajoute que le schéma d'axiome (τ) est à la source de tous les concepts, principes et axiomes transfinis. De plus, ce schéma lui permet de définir explicitement les quantificateurs :

$$(1) \qquad (\forall x) \quad A(x) \quad \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \quad A(\tau A)$$

$$(2) \qquad (\exists x) \quad A(x) \quad \cdot\Leftrightarrow \quad A(\tau(\rceil A))$$

Remarquons que nous pouvons prendre la formule contraposée de (τ), soit :

$$(.) \qquad \rceil A(y) \quad \Rightarrow \quad \rceil A(\tau A)$$

C'est à partir de cette dernière expression (.) que Von Neumann (14), reprenant la fonction logique τ, lui donne l'interprétation suivante :

S'il y a des objets y qui n'ont pas la propriété A, alors τA est un tel objet et s'il n'existe pas d'objet y ayant la propriété $\rceil A$, alors τA est n'importe quoi (beliebig).

Cette lecture nous oriente déjà vers une démarche ensembliste.

En fait, dès 1925, dans son mémoire intitulé "Über das Unendliche", Hilbert est amené à modifier son axiome transfini (τ) et à introduire une fonction transfinie de choix ε, ainsi qu'un schéma d'axiome dit ε-axiome -, en raison de l'application du formalisme à la théorie des ensembles.

Dans son exposé "Probleme der Grundlegung der Mathematik", en 1928, Hilbert reprend cette fonction transfinie ε, accompagnée du même ε-axiome.

Finalement, Hilbert et Bernays, en 1939, dans "Grundlagen der Mathematik II", exposent en détail le statut de cette fonction logique ε et justifient son introduction dans le formalisme logico-mathématique. C'est à cette présentation que nous nous intéressons maintenant.

2 - Pourquoi D. Hilbert a introduit la fonction ε

Rappelons que, à cette époque, Hilbert cherche toujours à établir la non-contradiction de la théorie des nombres, par des moyens finitistes. De plus, ce dernier désire rendre le procédé de la résolution symbolique utilisable en calcul des prédicats du premier ordre avec égalité, à des fins métamathématiques. (Ce procédé consiste à remplacer des axiomes d'existence,-i-e des axiomes contenant des quantificateurs existentiels - par des formules où ce quantificateur ne figure plus, en introduisant de nouveaux signes de constantes ou des signes de fonctions).

Hilbert et Bernays commencent par étudier un cas particulier où ils savent éliminer un axiome existentiel, celui où ils ont à leur disposition la ι-règle. Les auteurs s'inspirent de Russell et Whitehead pour formaliser le concept de "celui qui" (derjenige welcher) (the such and such), qui s'exprime dans la langue allemande (anglaise) à l'aide de l'article défini (Note 3). Pour cela, Hilbert et Bernays (9), introduisent le symbole ι - qui lie la variable qui l'accompagne, comme les quantificateurs - et une règle, dite ι-règle, qui s'énonce comme suit :

Etant donné une formule $U(z)$, si on a dérivé les prémisses :

(i) $(\exists x)\ U(x)$

(ii) $(\forall x)\ (\forall y)\ (U(x)\ \&\ U(y) \Rightarrow x = y)$,

alors on peut utiliser l'expression $\iota_x U(x)$ comme terme, et l'expression $U(\iota_x U(x))$ peut être considérée comme un axiome.

Supposons maintenant qu'on ait un système d'axiomes (S) qui contienne les axiomes d'égalité. Soit :

$(\ast)\quad (\exists x)\ U(x_1, \ldots, x_n, x)$,

un axiome de (S), dont les seules variables libres sont $x_1, \ldots, x_n$. Supposons que l'on puisse dériver dans (S) la formule suivante :

$(\ast\ast)\quad (\forall x)\ (\forall y)\ [U(x_1, \ldots, x_n, x)\ \&\ U(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow x = y]$

En appliquant la ι-règle, on peut alors introduire un nouveau signe de fonction f, à l'aide de la définition explicite suivante :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \iota_x\, U(x_1, \ldots, x_n, x)$$

Si (S') est le système d'axiomes issu de (S) par l'adjonction du signe de fonction f et par le remplacement de $(\ast)$ par la formule :

$(\square)\quad U(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$,

on obtient deux systèmes équivalents, grâce au théorème sur l'élimination de la ι-règle et aux règles du calcul des prédicats.

On peut parler d'une représentabilité de l'axiome d'existence $(\ast)$ par la formule $(\square)$. Elle exige cependant que la clause d'unicité (ii) de la ι-règle se trouve vérifiée. Les auteurs vont se dégager de cette contrainte.

Soit : $(\exists x_1) \ldots (\exists x_m)\ U(x_1, \ldots, x_m)$,

un axiome - sans variable libre - d'un système d'axiomes donné. On obtient alors le résultat suivant : lorsqu'on remplace, après avoir introduit de nouveaux symboles de constantes $s_1, \ldots, s_m$, la formule citée ci-dessus, par la formule $U(s_1, \ldots, s_m)$, on obtient une extension conservatrice du système d'axiomes. Plus précisément, l'ensemble des formules dérivables qui ne contiennent aucun des symboles introduits est le même pour le système d'axiomes original et pour le système d'axiomes modifié.

Là encore, l'élimination des axiomes d'existence est limitée : il ne peut entrer en compte que des axiomes sans variable libre. Les auteurs vont se défaire de cette restriction.

Considérons des formules de la forme :

$$(\exists x)\quad U(x_1, \ldots, x_m, x) ,$$

où $x_1, \ldots, x_m$ sont les seules variables libres qui occurrent dans U. Il s'agit ici d'introduire, non plus un symbole de constante, mais un signe de fonction f, et de considérer la formule $U(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m))$ comme un axiome.

Les trois cas que nous venons d'examiner sont autant d'exemples du processus de la résolution symbolique. Si l'on joint ce processus au processus d'échange des variables liées par des quantificateurs universels contre des variables libres, on obtient un procédé pour passer d'un formule prénexe sans variable propositionnelle à une formule sans variable liée . De plus, on retrouve la formule initiale à l'aide du calcul des prédicats. Ce procédé peut être appliqué en particulier aux formules d'un système d'axiomes propres qui se laissent transformer en formules prénexes. Le système obtenu, où les variables qui occurrent sont toutes libres, est dit en forme déliée (in aufgelöster Form).

Soit à présent un système d'axiomes particuliers (S), contenant des variables liées, et soit (S') le système d'axiomes en forme déliée correspondant. Les formules dérivables dans (S) sont dérivables dans (S'), à l'aide du calcul des prédicats. Si dans le passage de (S) à (S'), on a introduit des symboles de constantes, mais pas de symboles de fonctions, (S') est une extension conservatrice de (S). Il s'agit donc d'établir un résultat analogue, dans le cas général où le passage de (S) à (S') s'accompagne de l'introduction de nouveaux symboles de fonctions. Plus précisément, les auteurs posent deux problèmes :

- (S') est-il une extension conservatrice de (S) ? (Problème I)
- Est-il possible d'étendre l'élimination des variables liées - outre le passage d'un système (S) à un système (S') - aux dérivations, dans la mesure où il s'agit de formules sans variable liée ? (Problème II).

Le deuxième problème est important, car s'il reçoit une réponse positive, on est alors ramené, pour établir des formules sans variable liée, au calcul des prédicats avec variables libres, si bien que l'étude de la non-contradiction de certains formalismes peut être simplifiée.

Le symbole ε apparaît comme un moyen approprié à la résolution de ces problèmes.

3 - Définition du symbole ε

Dans un premier temps, nous proposons une définition de ε qui met en valeur l'intuition qui a guidé les auteurs (étape heuristique).

• Cherchant à s'affranchir de la clause (ii) d'unicité de la ι-règle, ils introduisent un symbole η (Note 4), et une règle, dite η-règle, qui s'énonce ainsi :

Si une formule $(\exists x)\ U(x)$ est un théorème, alors on peut introduire $\eta_x U(x)$ comme terme, et considérer la formule $U(\eta_x U(x))$ comme un axiome.

Cette η-règle possède deux avantages sur le processus de la résolution symbolique qui requiert l'usage de fonctions. D'une part, on peut l'appliquer s'il entre des variables de prédicats dans la formule $(\exists x)\ U(x)$; d'autre part, par l'écriture $\eta_x U(x)$, le lien du terme (introduit) avec la formule $U(\ldots)$ est rendu explicite, alors qu'avec l'introduction des symboles de fonctions usuels tels que f, il faut préciser que l'on dispose de la formule :

$$U(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ f(x_1,\ \ldots,\ x_n)).$$

En ce sens, les définitions explicites des symboles de fonctions ne sont pas auto-explicatives.

Les auteurs se libèrent ensuite de la condition imposée à la formation du terme $\eta_x U(x)$, c'est-à-dire, de la clause d'existence. La formule :

$$[(\exists x)\ ((\exists y)\ A(y) \Rightarrow A(x))]$$

étant dérivable, on peut appliquer la η-règle et définir explicitement le terme $\varepsilon_x A(x)$ par l'égalité suivante :

$$\varepsilon_x A(x) \overset{\text{déf}}{=} \eta_x[(\exists y)\ A(y) \Rightarrow A(x)]$$

On peut alors dériver la formule

$$(\varepsilon_0) \qquad (\exists x)\ A(x) \Rightarrow A(\varepsilon_x A(x))$$

Cette formule rend désormais superflue toute utilisation du symbole η, si bien qu'on peut poser ε comme symbole fondamental.

. Présentation axiomatique de ε :

Les auteurs introduisent alors dans le formalisme, le symbole primitif ε, accompagné d'un schéma d'axiome dit ε-formule (ε-Formel) :

$$(\varepsilon) \qquad \boxed{A(y) \Rightarrow A(\varepsilon_x A(x))}$$

où y est une variable d'individu libre, A un prédicat, x une variable liée par ε, comme elle le serait par les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, et $\varepsilon_x A(x)$ un terme. Plus précisément, si U(y) est une formule qui ne contient pas la variable liée x, alors $\varepsilon_x U(x)$ est un terme, appelé ε-terme.

Remarquons que les formules (ε) et (ε_0) sont d'égale déductibilité. On pourra par ailleurs comparer les formules (ε) et (τ) (cf.I.1.).

A partir de la formule (ε_0), les auteurs donnent de la fonction ε l'interprétation (intuitive) suivante : "Der Wert dieser Funktion für ein bestimmtes Prädikat U (bei Festlegung der Parameter) ist ein Ding des Individuenbereichs, und zwar ist dieses Ding gemäss der inhaltlichen Übersetzung der Formel (ε_0) ein solches, auf das jenes Prädikat U zutrifft, vorausgesetzt, dass es überhaupt auf ein Ding des Individuenbereichs zutrifft." ((10), p.12) ("La valeur de cette fonction pour un prédicat donné U (lorsqu'on fixe les paramètres) est un objet du domaine d'individus, et cet objet est, conformément à la traduction du contenu de (ε_0), un objet tel que pour lui, ce prédicat est satisfait, à supposer qu'il y ait un objet du domaine d'individus qui le satisfasse.").

S'il n'existe pas d'objet vérifiant la propriété exprimée par le prédicat U, $\varepsilon_x U(x)$ s'interpréte comme un objet vérifiant ou non la propriété exprimée par U. "C'est un objet dont on ne peut rien dire. (...) L'intérêt de l'opération de Hilbert est de donner un procédé parfaitement artificiel mais purement mécanique, pour construire effectivement un objet dont on sait seulement qu'il satisfait à des conditions imposées d'avance (dans le cas où de tels objets existeraient)." (5)

Il est intéressant de comparer les interprétations intuitives des fonctions logiques τ et ε de Hilbert, qui viennent d'être introduites. Alors que $\tau_x A(x)$ est un objet privilégié qui ne possède pas la propriété A, s'il existe de tels objets, et sinon n'importe quoi, $\varepsilon_x A(x)$ est un objet privilégié possédant la propriété A, s'il existe de tels objets, et sinon n'importe quoi.

Les conséquences déductives de l'ε-formule font apparaître plusieurs avantages.

- Le premier consiste en la possibilité de <u>définir explicitement les quantificateurs existentiel et universel</u>. Les deux formules :

(ε_1) $\qquad (\exists x)\ A(x) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A(\varepsilon_x\, A(x))$

(ε_2) $\qquad (\forall x)\ A(x) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A(\varepsilon_x\, (\rceil A(x)))$

en lien avec la formule (ε), permettent de définir $(\exists\ )$ et $(\forall\ )$, et de retrouver, à l'aide du calcul des prédicats avec variables libres, les schémas d'axiomes et les règles d'inférence relatifs aux quantificateurs. Ceux-ci reçoivent ainsi une définition explicite : leur interprétation résulte de celles de (ε_1), (ε_2) et de (ε).

Cette possibilité d'obtenir la définition des quantificateurs à partir de l'ε-formule, est intéressante, car elle constitue "un gain de puissance : les procédés applicables seulement aux individus pouvant être maintenant utilisés universellement même s'il n'y a pas de moyens de définition univoque (rôle du choix)" ((3), p.115). Cavaillès a précisé auparavant qu'on obtient un moyen pour passer des propositions contenant des variables à des propositions individualisées, ce passage ayant lieu dans les deux sens. Toutefois, "ce n'est que pour l'individu $\varepsilon_x(\rceil A(x))$ qu'il y a réversibilité de substitution avec la variable." (3).

- Le deuxième avantage est relatif à la ι-règle. On démontre en effet, que le symbole ε assume complètement le rôle du symbole ι. Dans les cas où la ι-règle est applicable, le terme $\varepsilon_x\, A(x)$ représente l'unique individu pour lequel le prédicat A est satisfait. L'adjonction au calcul des prédicats du symbole ε et de l'ε-formule rend superflus le symbole ι et la ι-règle.

- Le troisième avantage concerne la possibilité d'une formalisation du passage d'un système d'axiomes (S) au système d'axiomes (S') correspondant en forme déliée. Partant de la formule

$$(\exists x)\ U(x_1, \ldots, x_n, x)\ ,$$

(où $x_1, \ldots, x_n$ sont les seules variables libres occurrant dans U), au moyen de la définition explicite

$$f(x'_1, \ldots, x'_n) = \varepsilon_x\, U(x'_1, \ldots, x'_n, x)\ ,$$

on obtient la formule

$$U(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Remarquons que si les axiomes d'égalité ne sont pas présents dans le formalisme, on pourra recourir à des règles de substitution, de sorte que, partout une expression $\varepsilon_x U(x_1, \ldots, x_n, x)$ sera remplacée par $f(x_1,\ldots,x_n)$, et réciproquement.

Ce dernier point nous ramène aux préoccupations initiales des auteurs : les problèmes I et II mentionnés en I.2. sont résolubles. Les solutions sont données dans deux théorèmes appelés ε-théorèmes et exposés dans (10)(p.18).

4 - Les deux ε-théorèmes

Pour ces théorèmes, nous considérons un formalisme F obtenu à partir du calcul des prédicats, en ajoutant à certains symboles d'individus, de prédicats et de fonctions, le symbole ε et en joignant aux axiomes l'ε-formule, ainsi que certains axiomes particuliers $B_1, \ldots, B_t$, qui ne contiennent pas le symbole ε.

Le premier ε-théorème s'énonce ainsi :

Si σ est une formule dérivable dans F qui ne contient pas de variable liée, et si les axiomes $B_1, \ldots, B_t$ ne contiennent pas non plus de variable liée, alors on peut dériver la formule σ des axiomes $B_1, \ldots, B_t$, sans utiliser de variable liée, uniquement à l'aide du calcul élémentaire avec variables libres.

et le deuxième ε-théorème comme suit :

Si σ est une formule dérivable dans F, qui ne contient pas le symbole ε, alors on peut la dériver des axiomes $B_1, \ldots, B_t$, sans utiliser le symbole ε, à l'aide du seul calcul des prédicats.

(Remarquons que dans ce deuxième ε-théorème, les variables liées par les quantificateurs sont autorisées dans la dérivation de σ.)

Citons encore le théorème de la dérivation élémentaire, conséquence du premier ε-théorème, bien que n'ayant plus trait au symbole ε :

Si on peut dériver à partir d'un système d'axiomes particuliers qui ne contiennent pas de variable liée, une formule σ, qui de même ne contient pas de variable liée, à l'aide du calcul des prédicats, alors on peut la dériver aussi au moyen du calcul élémentaire avec variables libres.

Avant d'aborder l'étude des conséquences de ces ε-théorèmes, nous voulons expliciter de quelle manière ils résolvent les problèmes I et II.

Le premier ε-théorème fournit la solution du problème II. Soit (S') le système formé par les axiomes particuliers $B_1, \ldots, B_t$, qui ne contiennent pas de variable liée par ε ou par un quantificateur, mais éventuellement des symboles d'individus ou de fonctions ou de prédicats. Soit σ une formule sans variable liée, dérivable dans (S'); elle est dérivable dans F. Alors d'après le premier ε-théorème, on peut éliminer les variables liées de sa dérivation.

Quant au problème I, rappelons que passer d'un système (S) d'axiomes particuliers au système (S') correspondant en forme déliée, revient à obtenir la résolution symbolique du système (S), laquelle est formalisable par l'introduction du symbole ε et de l'ε-formule dans le formalisme. Soit (S) un système d'axiomes particuliers. Soit F le formalisme contenant le système d'axiomes (S) (où n'intervient pas le symbole ε), ainsi que le symbole ε et l'ε-formule. D'après le processus de la résolution symbolique, on peut dériver dans F le système d'axiomes (S') en forme déliée, associé à (S). Soit σ une formule du système (S) : elle ne contient pas d'ε-terme. Supposons qu'elle soit dérivable dans (S') : elle est donc dérivable dans F. Le deuxième ε-théorème indique alors qu'on peut la dériver dans (S). (S') est une extension conservatrice de (S).

Ces deux ε-théorèmes vont nous permettre de simplifier l'étude de la non-contradiction de certains formalismes. Un formalisme est dit non-contradictoire (widerspruchsfrei), s'il est impossible d'y dériver à la fois une formule U et sa négation $\rceil$U. Pour mener une telle étude, on peut choisir une formule sans variable liée. Le premier ε-théorème permet alors d'examiner la non-contradiction du système d'axiomes (S'), en n'utilisant que le calcul élémentaire avec variables libres. D'autre part, le système d'axiomes (S) est équivalent au système d'axiomes (S') correspondant en forme déliée, en raison du deuxième ε-théorème.

II - UTILISATION DU SYMBOLE ε POUR L'ELABORATION D'UN FORMALISME LOGICO-MATHEMATIQUE

1 - Le premier ε-théorème et le problème de la non-contradiction

Ce premier ε-théorème admet par conséquence un théorème fondamental de non-contradiction, dont nous ne donnons qu'un aspect (pour un énoncé complet, le lecteur pourra consulter (10), pp.36-38). Il utilise le concept de vérifiabilité (Verifizierbarkeit). On assigne aux formules élémentaires (Primformeln) sans variable, une valeur de vérité, de manière explicite. De l'interprétation des opérations du calcul des propositions comme fonctions de vérité, on déduit une valeur de vérité pour chaque formule sans variable. Une formule qui n'a pas d'autres variables que des variables d'individus libres est vérifiable si, pour toute substitution de ses variables par des termes sans variable , elle devient une formule vraie.

Le Wf-théorème (Widerspruchsfreiheitstheorem) est relatif au formalisme F considéré dans les ε-théorèmes (le symbole ε et l'ε-formule peuvent donc être compris dans F). Il s'énonce ainsi :

Pour une assignation explicite de valeurs de vérité aux formules élémentaires sans variable, supposons que les axiomes (particuliers et sans variable liée) soient vérifiables, alors F est non-contradictoire, en ce sens précis que toute formule sans variable, dérivable dans F, est une formule vraie et toute formule qui n'a que des variables libres, dérivable dans F, est une formule vérifiable.

Le second point est évident. En effet, si les axiomes sont vérifiables, toute formule qui en dérive par le calcul élémentaire avec variables libres, est vérifiable. Or, le premier ε-théorème ramène la dérivabilité dans F d'une formule sans variable liée à la dérivabilité par le calcul élémentaire (vu que les axiomes particuliers sont sans variable liée).

Le Wf-théorème permet ainsi de restreindre l'étude de la non-contradiction des théories axiomatiques formalisées à l'aide du calcul des prédicats, dont les axiomes sont vérifiables, à un problème de vérifiabilité. Cela s'applique à la géométrie élémentaire ainsi qu'à la géométrie non-euclidienne (l'axiome de continuité étant exclu dans les deux cas). A chaque fois, quand on tente d'établir la non-contradiction d'une de ces deux théories, on est ramené à un problème de vérifiabilité dans le domaine des nombres.

Le modèle arithmétique considéré ici - qualifié de finitiste (finit) - délivre une interprétation suffisante pour les axiomes de la théorie formalisée, mais non nécessairement pour les démonstrations. Cette lacune est comblée par le recours au Wf-théorème ((10), p.48).

Mais la non-contradiction du système complet de l'arithmétique n'est pas établie par les auteurs. Rappelons que Hilbert voulait montrer la non-contradiction d'un système formel qui formalise les mathématiques classiques, par des raisonnements intuitivement convaincants (dits finitistes).

Le second théorème d'incomplétude de Gödel mit fin à ses espoirs. Compte tenu de ce théorème, des démonstrations non élémentaires de consistance de l'arithmétique furent données; la première fut proposée par Gentzen en 1936.

2 - Le deuxième ε-théorème et ses conséquences

Les auteurs envisagent la possibilité d'étendre le deuxième ε-théorème, relatif à la résolution des formes existentielles, au cas où le schéma d'axiome (J_2) est inclus dans le formalisme F (outre certains axiomes particuliers).
Soit l'axiome d'égalité (J_1) : $x = x$
et le schéma d'axiome d'égalité (J_2) : $x = y \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$,
(où x, y sont des variables d'individus et A un prédicat).

Le résultat auquel ils aboutissent s'énonce ainsi :

Dans le formalisme F, issu du calcul des prédicats, par adjonction du signe d'égalité, de (J_1) et de (J_2), du symbole ε et de l'ε-formule, toute formule ne contenant pas le symbole ε peut être dérivée sans l'utilisation de ce symbole.

Ce résultat débouche sur une proposition plus générale selon laquelle :

Toute formule σ, formée à partir du calcul des prédicats usuel, qui ne contient pas le signe d'égalité, mais éventuellement des symboles de prédicats et des signes de fonctions, et qui est dérivable à l'aide du calcul des prédicats, de l'ε-formule, de (J_1) et de (J_2), est dérivable uniquement à l'aide du calcul des prédicats.

3 - L'ε-formule et l'axiome du choix

L'introduction du symbole η, ainsi que celle du symbole ε à partir de η, impliquent intuitivement une utilisation du principe du choix. Il importe néanmoins de souligner le fait que l'ε-formule ne joue pas le rôle de l'axiome du choix. Précisons ce qui distingue l'ε-formule de l'axiome du choix :
"Of course, there is at least one difference between the ε-rule and the axiom of choice. The former makes a single selection, while the latter requires that a simultaneous choice from each member of a given set be made and that all these selected items be put together to generate a new set. Hence, there is no reason to suppose that, in general, the axiom of choice follows from the ε-rule." (15). Pour sa part, Kneebone remarque le point suivant :

"Since an ε-term may involve free variables as parameters, it is certainly capable of taking care of a totality of simultaneous choices; but whether it provides a formal counterpart of the set of selected entities depends on the particular axioms for sets by which the purely logical axioms are supplemented." ((12), p.130).

Hao Wang précise que si la formule suivante :

$$(\square) \quad (\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ [z \in y \Leftrightarrow (\exists w)\ (w \in x\ \&\ z = \varepsilon_u\ (u \in w))]\ ,$$

est un théorème dans un certain système de la théorie des ensembles, alors l'axiome du choix est déductible de l'ε-formule, dans ce système. Considérons la formule $U(u, w) : u \in w$. L'ε-terme $\varepsilon_u U(u, w)$ contient bien une variable libre w comme paramètre, si bien qu'il peut rendre compte de la totalité des choix simultanés. Il semble en ce cas hautement improbable, que l'opérateur ε n'apparaisse pas dans les axiomes du système de la théorie des ensembles (15).

C'est d'ailleurs ce que l'on peut constater dans le formalisme de la théorie des ensembles proposé par Bourbaki (2). Toute formule substituable à la variable de prédicat libre A du schéma de sélection et réunion (cf.(2), I.S8), peut comprendre des ε-termes. Le théorème ($\square$), mentionné ci-dessus, peut alors être établi, à l'aide de la proposition C53 (ibidem).

4 - Un ε-calcul

Outre l'étude purement axiomatique que nous venons d'exposer, signalons le travail de Asser "Theorie der logischen Auswahlfunktionen" (1956)(1), le premier en date sur ce sujet, qui pose le problème des interprétations formelles à donner à ε, et qui élabore un ε-calcul (Note 5).

D'une part, Asser définit les expressions de son ε-calcul, fonde une axiomatisation et des règles de dérivation à partir desquelles il obtient un ensemble E de formules dérivables; d'autre part, il définit l'interprétation de son ε-calcul : il précise la notion de validité pour les expressions de cet ε-calcul. Soit F l'ensemble des formules valides pour cette interprétation; si les ensembles E et F coïncident, l'interprétation est adéquate à l'axiomatisation.

Asser propose de comprendre le signe ε comme une variable pour des fonctions de choix du domaine d'individus J (ensemble sous-jacent au modèle) ("eine Variable für Auswahlfunktionen des Individuenbereiches J"). [On a vu le lien entre l'ε-formule et l'axiome du choix]. Une fonction de choix de J est une application ϕ, qui à chaque sous-ensemble non vide de J associe un élément bien déterminé de ce sous-ensemble. Selon le comportement de ϕ par rapport à l'ensemble vide, Asser distingue plusieurs espèces de fonctions de choix. Il en retient deux qui lui semblent importantes. Une fonction de choix de première espèce assigne à l'ensemble vide, un élément ξ_0 de J, arbitraire mais fixé, tandis qu'une fonction de choix de deuxième espèce n'assigne rien du tout à l'ensemble vide. A chacune de ces deux espèces de fonctions de choix correspond un ε-calcul.

Pour les ε-calculs de première et deuxième espèce, Asser réussit à définir des ensembles de formules E et F, tels qu'ils coïncident. Il fait remarquer néanmoins qu'aucun de ces deux ε-calculs ne saurait constituer une interprétation adéquate pour le système d'axiomes de Hilbert et Bernays. Il définit alors un troisième concept de fonction de choix qui est compliqué et peu intuitif. Redéfinissant la notion de validité, il obtient une interprétation compatible avec l'axiomatisation de ces derniers. Les ε-théorèmes, reformulés dans cet ε-calcul de 3e espèce, sont alors rapidement démontrés.

Cependant, il lui semble que Hilbert et Bernays avaient plutôt en vue de décrire le concept de fonction de choix de première espèce, qui s'inscrit mieux dans une perspective ensembliste. S'il s'agit bien du concept de fonction de choix de première espèce, alors le système d'axiomes de Hilbert est incomplet. Asser s'interroge sur la possibilité d'une autre interprétation qui serait adéquate à la proposition originelle de Hilbert, sans en trouver d'autre.

L'incomplétude résulte du fait que l'axiome

$$\text{(A2)} \quad [(\forall x)\ (A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x))] \Rightarrow [\varepsilon_x A_1(x) = \varepsilon_x A_2(x)] \ ,$$

de l'axiomatique de l'ε-calcul de première espèce, n'est pas entièrement pris en charge par l'axiome

$$\text{(A6)} \quad [a = b] \Rightarrow [\varepsilon_x\, A(x,a) = \varepsilon_x\, A(x,b)] \ ,$$

de l'axiomatique de l'ε-calcul de troisième espèce (dit de Hilbert).

Il est intéressant de constater que lorsque Cavaillès suggère d'interpréter le terme $\varepsilon_x U(x)$ de l'ε-formule comme l'élément distingué de la classe des individus possédant le prédicat U, il souligne le fait que l'élément distingué n'est pas coordonné de façon univoque à sa classe. Il propose alors d'ajouter l'axiome noté (A2) par Asser.

Même si l'on ne tient pas compte du signe d'égalité (ce que Hilbert et Bernays font au début de leur travail), et si l'on considère l'ε-calcul de première espèce sans identité, le système d'axiomes de Hilbert et Bernays reste incomplet. Asser fait remarquer qu'il manque les axiomes de substitution de la forme :

$$[(\forall x)\ (A_1(x) \Leftrightarrow A_2(x))] \Rightarrow [A(\varepsilon_x A_1(x)) \Leftrightarrow A(\varepsilon_x A_2(x))]$$

Si on ajoute de tels axiomes, l'ε-calcul de première espèce sans identité (resp. de deuxième, resp. de troisième espèce), devient complet.

Asser est le premier à noter que le théorème de substitution pour des expressions équivalentes n'est pas entièrement obtenu dans l'ε-calcul de Hilbert. Cet inconvénient est grave, sauf si l'on considère seulement l'ε-calcul comme un calcul auxiliaire destiné à simplifier des réflexions d'ordre métamathématique sur le calcul des prédicats du premier ordre, car on n'a alors besoin que d'une forme spéciale de ce théorème, obtenue dans l'ε-calcul de troisième espèce sous le nom de "théorème d'équivalence".

La lecture de la "Theorie der logischen Auswahlfunktionen" complète celle des "Grundlagen der Mathematik II". Le lecteur y découvrira d'autres aspects du symbole ε, mais là encore, il aura le sentiment que ce symbole n'est nullement indispensable et qu'il n'est qu'un outil forgé pour faciliter une étude menée dans le domaine de la théorie de la démonstration.

N O T E S

Note 1 : Communication personnelle de J. Dieudonné

Note 2 : Hilbert appelle souvent axiome ce que nous conviendrions d'appeler schéma d'axiome. Il permet une règle de substitution pour les variables de prédicats et les variables de formules (Formelvariablen), dans ses axiomes, si bien que les deux notions coïncident. Par la suite, nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre expression, lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

Note 3 : Pour une étude plus approfondie des liens entre les symboles ι, η, ε cités dans cet exposé et les articles défini et indéfini de la langue usuelle, le lecteur pourra se reporter à "Problèmes de détermination : des symboles logiques en linguistique ?" (4).

Note 4 : L'utilisation de ce symbole est à relier à l'usage de l'article indéfini de la langue usuelle (cf. Note 3).

Note 5 : Asser précise que "calcul" est à comprendre au sens de Schröter, "Ein allgemeiner Kalkülbegriff", in Forsch. Logik Grundl. exakt.Wiss. u.F.6 (1941).

BIBLIOGRAPHIE

(1) ASSER G., "Theorie der logischen Auswahlfunktionen", in Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Band 3 (1957), p.30-67.

(2) BOURBAKI N., Eléments de mathématiques, théorie des ensembles, 3ème édition, Hermann, (1966).

(3) CAVAILLES C., Méthode axiomatique et formalisme : essai sur le problème du fondement des mathématiques, (1937), Hermann, édition 1981.

(4) FROIDEVAUX C., "Problèmes de détermination : des symboles logiques en linguistique ?", in Opérations de détermination : théorie et description", Coll. E.R.A. 642, vol.II (1983), D.R.L. Université Paris 7.

(5) GODEMENT R., Cours d'algèbre, Hermann, (1962).

(6) HILBERT D., "Die logischen Grundlagen der Mathematik", in Mathem. Annalen, Band 88 (1923), p.151-165.

(7) HILBERT D., "Über das Unendliche", in Mathem. Annalen, Band 95 (1926), p.161-190. Trad. française dans : LARGEAULT J., Logique mathématique : textes, Coll.U, Armand Colin, (1972).

(8) HILBERT D., "Probleme der Grundlegung der Mathematik", (1928), Congrès international de mathématiques de Bologne, in Gedenkenband Herausgegeben von K. Reidemeister, Berlin, Heidelberg, New-York, Springer Verlag, (1971).

(9) HILBERT D. et BERNAYS P., Grundlagen der Mathematik I, (1934), 2ème édition, Springer Verlag, (1970).

(10) HILBERT D. et BERNAYS P., Grundlagen der Mathematik II, (1939), 2ème édition, Springer Verlag, (1970).

(11) KLEENE S.C., Logique mathématique, (trad. française J. Largeault), Coll. U, Armand Colin, (1971).

(12) KNEEBONE G.T., Mathematical logic and the foundations of mathematics, Student's Paperback Edition von Nostrand, (1963).

(13) LAUTMANN A., "Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques, II - Les schémas de genèse", in Le Progrès de l'esprit, Hermann, (1937).

(14) VON NEUMANN J., "Zur Hilbertschen Beweistheorie", in Math. Zeit., Band 26 (1927), p.1-46.

(15) WANG HAO, A Survey of Mathematical Logic, Science Press, (1963).