

B. MONJARDET

**Caractérisations métriques des ensembles ordonnés semi-modulaires**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 56 (1977), p. 77-87

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1977\\_\\_56\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__56__77_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CARACTERISATIONS METRIQUES DES ENSEMBLES ORDONNES SEMI-MODULAIRES

B. MONJARDET

## 1. INTRODUCTION

On peut toujours définir une métrique sur un ensemble ordonné  $X$  de longueur finie, en prenant comme distance  $\delta(x,y)$  entre  $x$  et  $y$ , la longueur du plus court chemin dans le graphe non orienté de couverture associé à  $X$  (distance appelée classiquement l'écart entre  $x$  et  $y$  en théorie des graphes, [2]).

Dans le cas où  $X$  est un treillis modulaire, donc gradué par une fonction de rang  $r$ , on montre facilement que cette distance est égale à  $r(xvy) - r(x\wedge y) = \delta(xvy, x\wedge y)$ . Réciproquement, si dans un treillis gradué  $r(xvy) - r(x\wedge y)$  est une distance, le treillis est modulaire. La propriété de modularité est aussi caractérisée par l'égalité modulaire :  $r(x) + r(y) = r(xvy) + r(x\wedge y)$ , ce qui montre que la distance précédente s'écrit aussi  $\delta(x,y) = 2r(xvy) - r(x) - r(y) = \delta(x,xvy) + \delta(xvy,y) = r(x) + r(y) - 2r(x\wedge y) = \delta(x,x\wedge y) + \delta(x\wedge y,y)$ . ([1],[3]).

Si l'on considère, par exemple, l'égalité  $\delta(x,y) = \delta(x,xvy) + \delta(xvy,y)$ , elle signifie que dans le graphe de couverture d'un treillis modulaire, le chemin  $(x,xvy,y)$  entre  $x$  et  $y$  est de longueur minimum. Il avait été indiqué dans [1] (II, page 90) que cette propriété était vraie dans le treillis semi-modulaire supérieurement des partitions. En fait cette propriété est vraie dans tout treillis semi-modulaire supérieurement ([7]). Mais la semi-modularité (supérieure) peut être définie pour des ensembles ordonnés qui ne sont pas des treillis (ou des demi-treillis), et les résultats précédents sont des cas particuliers d'un résultat général obtenu par Haskins et Gudder ([9], p.372) pour de tels ensembles ordonnés. Dans la même référence, un résultat réciproque permet de caractériser les ensembles ordonnés modulaires par une propriété de nature métrique ([9], p.376). Dans cet article, on généralise le résultat précédent en caractérisant les ensembles ordonnés semi-modulaires par des propriétés métriques ; on obtient en même temps

d'autres caractérisations, par exemple, à partir de la fonction de rang (Proposition 1, Théorème 1, Corollaire 1). On en déduit aisément des caractérisations des ensembles ordonnés modulaires (Corollaire 2), des treillis ou des demi-treillis semi-modulaires (Théorèmes 1' et 1'') et des treillis modulaires (Corollaire 2').

Les problèmes et résultats évoqués ci-dessus ne sont pas seulement d'origine "théorique". Ils proviennent aussi de questions "pratiques" rencontrées en analyse des données. Par exemple, certaines données se présentent sous la forme de partitions d'un ensemble. Le problème de les comparer ou de les agréger est classique et peut amener à définir une distance entre partitions ([10],[11]). Pour choisir cette distance, il n'est pas indifférent de savoir que l'ensemble des partitions peut être muni d'une structure de treillis semi-modulaire et de connaître les métriques liées à cette structure. De ce point de vue, notre article étudie la métrique "naturelle", c'est-à-dire liée à la fonction de rang dans le treillis des partitions. Mais on peut aussi étudier les métriques liées à l'existence d'une "valuation" sur le treillis ([4],[13] qui parlent de "supervaluation"). Dans cette direction on peut encore établir des résultats "théoriques" généraux portant sur des treillis ou des demi-treillis dont la valuation vérifie des propriétés particulières ; comme toujours l'intérêt de ces résultats est qu'ils peuvent s'appliquer à bien d'autres situations que celles qui ont conduit à les établir ([4],[6],[8]).

## 2. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES

Nous notons  $X$  un ensemble ordonné,  $\leq$  la relation d'ordre de  $X$ ,  $\parallel$  la relation d'incomparabilité associée ( $x \parallel y$  si et seulement si  $x \not\leq y$  et  $y \not\leq x$ ),  $\prec$  la relation de couverture associée ( $x \prec y$  si et seulement si  $x < y$  et il n'existe pas  $z$  tel que  $x < z < y$ ). Si  $x \prec y$ , on dit que  $y$  couvre  $x$  ou que  $x$  est couvert par  $y$  et on écrit aussi  $y \succ x$ .

Une chaîne  $C$  d'un ensemble ordonné est un sous-ensemble totalement ordonné de  $X$  ; la longueur de  $C$  est  $\ell(C) = |C| - 1$  ; si toutes les chaînes de  $X$  sont de longueur finie et bornée par un nombre fixe,  $X$  est dit de longueur finie. Dans la suite nous ne considérerons que des ensembles ordonnés de longueur finie.

A l'ensemble ordonné  $X$ , on associe un graphe simple ([2]),  $G(X)$  : les sommets de  $G(X)$  sont les éléments de  $X$  ;  $(x,y)$  est une arête de  $G(X)$  si et seulement si  $x \prec y$  ou  $y \prec x$ . Un chemin (élémentaire) de  $G(X)$  est une suite  $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_p$  de sommets distincts de  $G(X)$  tels que pour tout  $i$ ,

$(x_i, x_{i+1})$  est une arête de  $G(X)$  ; la longueur d'un tel chemin est  $p$ , son origine  $x_0$ , son extrémité  $x_p$  (N.B. : nous utilisons ici le terme de chemin au lieu du mot chaîne usuellement utilisé pour les graphes non orientés afin d'éviter la confusion avec le sens rappelé plus haut du mot chaîne dans les ensembles ordonnés). L'ensemble ordonné  $X$  est connexe si  $G(X)$  est connexe c'est-à-dire si pour tout  $x, y$  éléments de  $X$ , il existe un chemin de  $G(X)$  d'origine  $x$  et d'extrémité  $y$ . Si  $X$  n'est pas connexe, il est réunion de sous-ensembles ordonnés connexes appelés ses composantes connexes.

On note  $\delta(x, y)$ , l'écart entre  $x$  et  $y$  dans le graphe  $G(X)$ , c'est-à-dire la longueur minimum d'un chemin entre  $x$  et  $y$ . Il est bien connu que  $\delta$  est une distance sur  $X$ .

Si  $x \in X$ , on note  $\bar{x} = \{z \in X : x \leq z\}$  l'ensemble des majorants de  $x$ . Si  $x, y \in X$ , on note  $x \cup y = \{z \in X : z \in \bar{x} \cap \bar{y} \text{ et } z \text{ minimal pour cette propriété}\}$  l'ensemble des majorants communs de  $x$  et de  $y$  minimaux. Un ensemble ordonné est dit filtrant supérieurement si pour tout  $x, y \in X$ , on a  $x \cup y \neq \emptyset$  (c'est-à-dire, si tout couple d'éléments admet au moins un majorant commun.) Pour un ensemble ordonné de longueur finie, être filtrant supérieurement est équivalent à avoir un élément universel  $u$  ( $u \geq x$ , pour tout  $x$ ) et implique la connexité. On définit dualement  $\bar{x}$ ,  $x \bar{\cup} y$  et la notion d'ensemble ordonné filtrant inférieurement. Un ensemble ordonné est dit filtrant s'il est filtrant supérieurement et inférieurement.

L'ensemble ordonné  $X$  est dit gradué s'il existe une application  $r$  de  $X$  dans l'ensemble des entiers vérifiant  $x \prec y$  implique  $r(y) = r(x) + 1$  ;  $r(x)$  s'appelle le rang de  $X$ . Si  $X$  est gradué, on pose pour tout  $x, y$ ,  $x \bar{u} y = \{z \in X : z \in \bar{x} \cap \bar{y} \text{ et } r(z) \text{ minimum avec cette propriété}\}$ , ensemble des majorants communs à  $x$  et  $y$  de rang minimum. On a  $x \bar{u} y \subseteq x \cup y$ . On définit dualement  $x \bar{i} y$ . Si  $X$  est gradué et filtrant supérieurement, on pose pour tout  $x, y$ ,  $d(x, y) = 2r(t) - r(x) - r(y)$ , où  $t$  est un élément quelconque de  $x \bar{u} y$ .

$X$  est semi-modulaire supérieurement (en abrégé, S.M.S.) si et seulement si, pour tout  $x, y \in X$  l'existence de  $z$  tel que  $z \prec x$  et  $z \prec y$  implique l'existence de  $t$  tel que  $x \prec t$  et  $y \prec t$ . On définit dualement les ensembles ordonnés semi-modulaires inférieurement. Un ensemble ordonné est dit modulaire s'il est semi-modulaire inférieurement et supérieurement.

On utilisera les quatre lemmes suivants qui énoncent des résultats classiques et faciles à démontrer ([1],[3],[7],[9]).

Rappelons que  $X$  est toujours un ensemble ordonné de longueur finie.

## LEMME 1

Si  $X$  est gradué par  $r$ , pour tout  $x, y \in X$  avec  $x < y$ , on a  $\delta(x, y) = r(y) - r(x)$ .

## LEMME 2

Si  $X$  est gradué par  $r$  et filtrant supérieurement, on a pour tout  $x, y \in X$ ,  $\delta(x, y) \leq d(x, y)$  avec l'égalité si  $x < y$ .

## LEMME 3

Un ensemble ordonné semi-modulaire supérieurement est gradué.

## LEMME 4

Un ensemble ordonné S.M.S. et connexe est filtrant supérieurement.

## 3. CARACTERISATION DES ENSEMBLES ORDONNES SEMI-MODULAIRES

## PROPOSITION 1

Pour un ensemble ordonné  $X$  gradué par  $r$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes et impliquent la troisième :

(a)  $X$  est semi-modulaire supérieurement et connexe.

(b)  $X$  est filtrant supérieurement et vérifie la condition

( $\beta$ ) pour tout  $x, y, z \in X$  avec  $z \prec x$ ,  $z < y$ ,  $x \parallel y$ , on a pour tout  $t$  élément de  $x \bar{u} y$ ,  $y \prec t$ .

(c) Pour tout  $x, y, z, t \in X$  avec  $z \prec x$ ,  $z < y$ ,  $y \parallel x$ ,  $t \in x \bar{u} y$ , on a  $r(y) - r(z) = r(t) - r(x)$ .

Démonstration

. (b) implique (a)

Soit  $x, y, z \in X$  avec  $z \prec x$  et  $z < y$  ; la condition ( $\beta$ ) appliquée deux fois donne pour tout  $t \in x \bar{u} y$ ,  $x \prec t$  et  $y \prec t$ . D'autre part,  $X$  étant filtrant supérieurement, il existe bien un tel  $t$ . c.q.f.d.

. (a) implique (b) et (c)

Si  $X$  est S.M.S. et connexe il est filtrant supérieurement d'après le lemme 4. Soient  $x, y, z \in X$  avec  $z \prec x$ ,  $z < y$  et  $x \parallel z$ . La démonstration se fait par récurrence sur la longueur d'une chaîne maximale  $C$  d'origine  $z$  et d'extrémité  $y$ .

$\ell(C) = 1$

On a alors  $z \prec y$  et par la S.M.S. il existe  $t$  tel que  $y \prec t$  et  $x \prec t$ . On a donc  $t \in y \bar{u} x$ ,  $r(t) = r(y) + 1 = r(x) + 1$  ; si  $t' \in y \bar{u} x$ ,  $r(t') = r(t)$ , et on a donc  $y \prec t'$  et  $x \prec t'$ . De plus pour tout  $t \in y \bar{u} x$ ,  $r(y) - r(z) = 1 = r(t) - r(x)$ .

$\ell(C) = n$

Soit  $z_0 = z \prec z_1, \dots, z_{n-1} \prec z_n = y$  la chaîne  $C$ . Les éléments  $z_{n-1}$  et  $x$  sont nécessairement incomparables. En utilisant l'hypothèse de récurrence pour  $z, x$  et  $z_{n-1}$ , on en déduit que pour tout  $s \in x \bar{u} z_{n-1}$ ,  $z_{n-1} \prec s$  et  $r(z_{n-1}) - r(z) = r(s) - r(x)$ . Un tel élément  $s$  est différent de  $y$ , et on peut donc appliquer l'hypothèse de S.M.S. à  $z_{n-1}, s, y$ ; il existe donc  $t$  avec  $s \prec t$  et  $y \prec t$ . On a  $t \in s \bar{u} y$ ; de plus  $r(t) = r(y) + 1$ ,  $x \prec s \prec t$  et  $y \prec t$  impliquent  $t \in y \bar{u} x$ . Pour tout  $t' \in y \bar{u} x$ , on a alors  $r(t') = r(t) = r(y) + 1$ , donc  $y \prec t'$ ; enfin  $r(y) - r(z) = 1 + r(z_{n-1}) - r(z) = 1 + r(s) - r(x) = r(t) - r(x) = r(t') - r(x)$ . c.q.f.d.

### THEOREME 1

Soit  $X$  un ensemble ordonné filtrant supérieurement et gradué par  $r$ ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(0)  $X$  est semi-modulaire supérieurement et connexe.

(1) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ ,  $\delta(x, y) = \delta(x, t) + \delta(t, y)$ .

(2) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ ,  $\delta(x, y) = 2r(t) - r(x) - r(y)$ .

(3) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ ,  $[2r(t) - r(x) - r(y)]$  est une distance.

(4) Pour tout  $x, y, z \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ , pour tout  $\ell \in x \bar{u} z$ , pour tout  $m \in y \bar{u} z$ ,

$$r(t) + r(z) \leq r(\ell) + r(m)$$

(5) Pour tout  $x, y, z \in X$ , avec  $z \leq x$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ , pour tout  $m \in y \bar{u} z$ ,

$$r(t) + r(z) \leq r(x) + r(m)$$

(6) Pour tout  $x, y, z \in X$  avec  $z \leq x$  et  $z \leq y$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ ,

$$r(t) + r(z) \leq r(x) + r(y)$$

(7) Pour tout  $x, y, z \in X$  avec  $z \in x \bar{i} y$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$

$$r(t) + r(z) \leq r(x) + r(y)$$

### Démonstration

(0)  $\Rightarrow$  (1)

Remarquons d'abord que pour tout  $t, t' \in x \bar{u} y$  ( $\neq \emptyset$  par hypothèse), on a, d'après le lemme 1,  $\delta(x, t) + \delta(t, y) = 2r(t) - r(x) - r(y) = 2r(t') - r(x) - r(y) = \delta(x, t') + \delta(t', y)$ . En conséquence, il suffit de montrer que la semi-modularité implique l'existence d'un  $t \in x \bar{u} y$  avec  $\delta(x, y) = \delta(x, t) + \delta(t, y)$  (1); on a clairement  $\delta(x, y) \leq \delta(x, t) + \delta(t, y)$ .

La démonstration se fait par récurrence sur  $\delta(x, y) = n$ .

Si  $\delta(x, y) = 1$ , le résultat est évident. Il en est de même si  $\delta(x, y) = n$  et si  $x$  est comparable à  $y$ . On suppose donc  $\delta(x, y) = n$ .

et  $x \parallel y$ . On considère alors dans le graphe  $G(X)$  un chemin de longueur minimum  $n$  entre  $x$  et  $y$  :  $x_0 = x, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = y$ . On distingue deux cas suivant que  $x_1$  couvre ou est couvert par  $x$ .

1er cas :  $x \prec x_1$

. Supposons d'abord qu'il existe  $t \in x \bar{u} y$  avec  $x_1 \leq t$ .

Il est clair qu'on a aussi  $t \in x_1 \bar{u} y$ . On a donc  $\delta(x, y) = 1 + \delta(x_1, y) =$  (par récurrence)  $1 + \delta(x_1, t) + \delta(t, y) = \delta(x, t) + \delta(t, y)$ . c.q.f.d.

. Montrons maintenant qu'il existe effectivement un  $t \in x \bar{u} y$  avec  $x_1 \leq t$ .

Soit  $s \in x \bar{u} y$  avec  $x_1 \not\leq s$ . On a donc  $x_1 \parallel s$ . Puisque  $x \prec x_1$  et que  $x < s$  on peut déduire de la proposition 1 qu'il existe  $w \in x_1 \bar{u} s$  avec  $s \prec w$  et que  $\delta(x_1, w) = r(w) - r(x_1) = r(s) - r(x) = \delta(x, s)$ . D'autre part  $w > x_1$  et  $w > y$ .

Si  $w \in x_1 \bar{u} y$ , on a alors :

$$n-1 = \delta(x_1, y) = (\text{par récurrence}) \delta(x_1, w) + \delta(w, y) = \delta(x, s) + 1 + \delta(s, y) \geq n+1 \text{ ce qui est impossible.}$$

On a donc  $w \notin x_1 \bar{u} y$ , ce qui implique l'existence de  $t \in x_1 \bar{u} y$  avec  $r(t) < r(w) = r(s) + 1$  ; mais  $t > x$  et  $t > y$ , et  $s \in x \bar{u} y$  implique  $r(s) \leq r(t)$ . On a donc  $r(t) = r(s)$  et  $t \in x \bar{u} y$ , avec  $x_1 \leq t$ . c.q.f.d.

2ème cas :  $x_1 \prec x$

Si  $t \in x \bar{u} y$ , on a donc  $x_1 \prec x < t$ .

. Soit  $w \in x_1 \bar{u} y$ . On ne peut avoir  $x \geq w$ . Montrons qu'on ne peut avoir  $x < w$ . Dans ce cas, on aurait, puisque  $x$  et  $y < w$ ,  $r(w) \geq r(t)$ , et puisque  $x_1$  et  $y < t$ ,  $r(t) \geq r(w)$  ; on aurait donc  $r(t) = r(w)$  et  $t \in x_1 \bar{u} y$ .

Mais alors  $n = \delta(x, y) = 1 + \delta(x_1, y) = 1 + \delta(x_1, t) + \delta(t, y) = 2 + \delta(x, t) + \delta(t, y) \geq 2 + n$  ce qui est impossible.

. On a donc montré que si  $w \in x_1 \bar{u} y$ , on a  $x \parallel w$  ; puisque  $x_1 \prec x$  et  $x_1 < w$ , on peut utiliser la proposition 1 ; il existe  $s \in x \bar{u} w$  avec  $w \prec s$  et  $\delta(x, s) = \delta(x_1, w)$ . On a alors  $\delta(x, y) = 1 + \delta(x_1, y) = 1 + \delta(x_1, w) + \delta(w, y) = 1 + \delta(x, s) + \delta(s, y) - 1 = \delta(x, s) + \delta(s, y)$ .

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que  $s \in x \bar{u} y$ .

Or  $t \in x \bar{u} y$ ,  $s > x$  et  $y$  implique  $r(s) \geq r(t)$ . Si  $r(s) \geq r(t) + 1$ , on a  $r(w) = r(s) - 1 \geq r(t)$  ; mais  $t > x_1$  et  $y$ ,  $w \in x_1 \bar{u} y$  impliquent  $r(t) \geq r(w)$  ; donc  $r(t) = r(w)$  et  $t \in x_1 \bar{u} y$ . Mais puisque  $x < t$ , ceci est contradictoire avec ce qui a été démontré précédemment (premier point du deuxième cas).

On a donc  $r(s) = r(t)$  et  $s \in x \bar{u} y$ . c.q.f.d.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

Conséquence immédiate du lemme 1.

(2)  $\Rightarrow$  (3)

Evident, puisque  $\delta(x,y)$  est une distance.

(3)  $\Rightarrow$  (4)

Ecrivons que  $d(x,y) = [2r(t) - r(x) - r(y)]$  vérifie l'inégalité triangulaire pour  $x,y,z$ . Pour tout  $t \in x \bar{u} y$ , tout  $\ell \in x \bar{u} z$ , tout  $m \in y \bar{u} z$ , on a

$$d(x,y) = 2r(t) - r(x) - r(y) \leq d(x,z) + d(z,y) = 2r(\ell) - r(x) - r(z) + 2r(m) - r(z) - r(y),$$

d'où l'on déduit  $r(t) + r(z) \leq r(\ell) + r(m)$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5)  $\Rightarrow$  (6)  $\Rightarrow$  (7)

Evident.

(7)  $\Rightarrow$  (0)

Soient  $x,y,z$  avec  $z \prec x$  et  $z \prec y$ . Soit  $t \in x \bar{u} y$  ( $\neq \emptyset$ , puisque  $X$  est filtrant supérieurement). On a  $r(t) \geq r(x) = r(y) = r(z) + 1$ . Puisque  $z \in x \bar{i} y$ , on a par (7),  $r(t) + r(z) \leq r(x) + r(y) = 2r(z) + 2$ . D'où  $r(z) + 1 \leq r(t) \leq r(z) + 2$  et  $r(t) = r(z) + 2 = r(x) + 1 = r(y) + 1$ . D'où finalement  $x \prec t$  et  $y \prec t$ . c.q.f.d. ( $X$  est connexe parce qu'il est filtrant supérieurement).

#### COROLLAIRE 1

Pour un ensemble ordonné  $X$ , gradué par  $r$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $X$  est semi-modulaire supérieurement.
- (b) Pour tout  $x,y \in X$  et tout  $z \in x \bar{i} y$ , il existe  $t \in x \bar{u} y$  tel que  $r(z) + r(t) \leq r(x) + r(y)$ .
- (c) Pour tout  $x,y,z \in X$  avec  $z \prec x$ ,  $z \prec y$  et  $x \parallel y$ , il existe  $t$  tel que  $x \prec t$  et  $y \prec t$ .

#### Démonstration

(a) implique (b)

Si  $X$  est S.M.S. il est gradué d'après le lemme 3. Si il existe  $z \in x \bar{i} y$ ,  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe. Cette composante est S.M.S. et filtrante supérieurement d'après le lemme 4 ; on peut donc utiliser l'implication (0) entraîne (7) du théorème 1.

(b) implique (c)

Si  $z \prec x$ ,  $z \prec y$  et  $x \parallel y$ , on a  $z \in x \bar{i} y$ , donc il existe  $t \in x \bar{u} y$  tel que  $r(z) + r(t) = r(x) - 1 + r(t) \leq r(x) + r(y)$  ; on a donc  $r(y) < r(t) \leq r(y) + 1$ , soit  $y \prec t$ .



(c) implique (a)

Soient  $x, y, z$  avec  $z \prec x$  et  $z \prec y$ . D'après (c), il existe  $t$  tel que  $x < t$  et  $y \prec t$ ; mais  $X$  étant gradué, on a  $r(t) = r(y) + 1 = r(z) + 2 = r(x) + 1$ ; donc  $x \prec t$ . c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.

Soit  $X$  un ensemble ordonné filtrant et gradué par  $r$ ; les propriétés suivantes sont équivalentes.

(0)  $X$  est modulaire.

(1) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ , pour tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  
 $\delta(x, y) = \delta(x, t) + \delta(t, y) = \delta(x, z) + \delta(z, y)$ .

(2) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$ , pour tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  
 $\delta(x, y) = 2r(t) - r(x) - r(y) = r(x) + r(y) - 2r(z)$ .

(3) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$  et pour tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  
 $[2r(t) - r(x) - r(y)]$  et  $[r(x) + r(y) - 2r(z)]$  sont des distances sur  $X$ .

(4) Pour tout  $x, y, z', t'$  avec  $z' \in x i y$ ,  $t' \in x u y$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$   
 et pour tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  $r(t) + r(z') \leq r(x) + r(y) \leq r(t') + r(z)$ .

(5) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$  et pour tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  
 $r(x) + r(y) = r(t) + r(z)$ .

(6) Pour tout  $x, y \in X$ , pour tout  $t \in x \bar{u} y$  et tout  $z \in x \bar{i} y$ ,  
 $\delta(x, y) = r(t) - r(z)$ .

#### Démonstration

L'équivalence entre les conditions (0) à (5) résulte du théorème 1 et de son dual caractérisant les ensembles ordonnés semi-modulaires inférieurement. On a clairement (2) implique (6), et (6) implique (5) en utilisant les inégalités  $\delta(x, y) \leq 2r(t) - r(x) - r(y)$  et  $\delta(x, y) \leq r(x) + r(y) - 2r(z)$ .

#### Remarques

1. Parmi les résultats précédents, les résultats suivants se trouvent dans [9] : Corollaire 1 (théorèmes 3,5 et 3.7., corollaire 3.6.) ; implication  $0 \Rightarrow 1$  du théorème 1 (théorème 3.13.) ; équivalences  $(0) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6)$  du corollaire 2 (théorème 3.17.). Dans [9], l'implication (a)  $\Rightarrow$  (b) du corollaire 1 est démontrée par un raisonnement direct long (théorème 3.5.); ce résultat est ensuite utilisé pour la démonstration de l'implication  $0 \Rightarrow 1$  du théorème 1 (théorème 3.13.). Ici nous donnons une démonstration directe de cette dernière implication fondamentale, démonstration généralisant celle donnée dans [7], pour le cas des treillis.

2. Un exemple donné dans [9] (figure 7) montre qu'il n'est pas possible, dans la caractérisation (7) du théorème 1, de remplacer  $t \in x \bar{u} y$ , par  $t \in x u y$ . Cette même référence montre aussi que la caractérisation (c)

de la S.M.S. donnée dans le corollaire 1 reste valable, sans supposer à priori  $X$  gradué (théorème 3.8.) ; enfin elle contient d'autres caractérisations de la semi-modularité, par exemple, à partir de la notion de paire modulaire.

#### 4. CARACTERISATION DES DEMI-TREILLIS SEMI-MODULAIRES

##### THEOREME 1'

Soit  $D$  un sup-demi-treillis gradué par  $r$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (0)  $D$  est semi-modulaire supérieurement.
- (1) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $\delta(x, y) = \delta(x, xvy) + \delta(xvy, y)$ .
- (2) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $\delta(x, y) = 2r(xvy) - r(x) - r(y)$ .
- (3) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $[2r(xvy) - r(x) - r(y)]$  est une distance.
- (4) Pour tout  $x, y, z \in D$ ,  $r(xvy) + r(z) \leq r(xvz) + r(zvy)$ .
- (5) Pour tout  $x, y, z \in D$  avec  $z \leq x$ ,  $r(xvy) + r(z) \leq r(x) + r(zvy)$ .
- (6) Pour tout  $x, y, z \in D$  avec  $z \leq x$  et  $z \leq y$ ,  $r(xvy) + r(z) \leq r(x) + r(y)$ .
- (7) Pour tout  $x, y, z \in D$  avec  $z \in x \text{ i } y$ ,  $r(xvy) + r(z) \leq r(x) + r(y)$ .

Si  $D$  est un sup-demi-treillis, l'ensemble  $x \bar{u} y$  se compose d'un seul élément  $xvy$  ; le théorème 1' est donc un corollaire immédiat du théorème 1. Si maintenant  $D$  est un treillis,  $x \text{ i } y$  se réduit à  $x\lambda y$ , et on obtient le résultat suivant :

##### THEOREME 1''

Soit  $D$  un treillis gradué par  $r$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (0), (1), (2), (3), (4), (5), (6) (comme dans le théorème 1')
- (7) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $r(xvy) + r(x\lambda y) \leq r(x) + r(y)$ .

Ces théorèmes admettent évidemment des théorèmes duaux caractérisant les demi-treillis ou les treillis semi-modulaires inférieurement. En combinant ces résultats, on obtient les caractérisations suivantes des treillis modulaires (dont certaines sont classiques).

##### COROLLAIRE 2'

Soit  $D$  un treillis gradué par  $r$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (0)  $D$  est modulaire.
- (1) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $\delta(x, y) = \delta(x, xvy) + \delta(xvy, y) = \delta(x, x\lambda y) + \delta(x\lambda y, y)$
- (2) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $\delta(x, y) = 2r(xvy) - r(x) - r(y) = r(x) + r(y) - 2r(x\lambda y)$ .
- (3) Pour tout  $x, y \in D$ ,  $[2r(xvy) - r(x) - r(y)]$  et  $[r(x) + r(y) - 2r(x\lambda y)]$  sont des distances sur  $D$ .

(4) Pour tout  $x, y, z \in D$

$$r(xvy) + r(z) \leq r(xvz) + r(zvy)$$

$$r(x\wedge y) + r(z) \geq r(x\wedge z) + r(y\wedge z)$$

(5) Pour tout  $x, y \in D$

$$r(x) + r(y) = r(x\wedge y) + r(xvy)$$

(6) Pour tout  $x, y \in D$

$$\delta(x, y) = r(xvy) - r(x\wedge y) = \delta(x\wedge y, xvy)$$

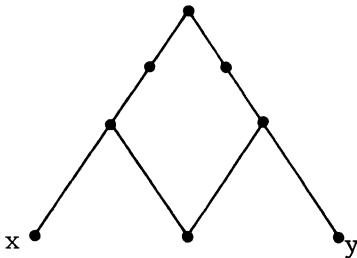
### Remarques

1. L'implication (0)  $\Rightarrow$  (1) du théorème 1" se trouve dans [7].

2. La condition (5) du théorème 1' m'a été suggérée initialement par Bordes qui avait montré dans le cas plus général d'une valuation qu'elle impliquait (3). La réciproque étant vraie, on obtient dans ce dernier cas des équivalences analogues à celles du théorème 1' ([5],[6]).

Dans le cas d'une application strictement croissante définie sur un treillis, l'équivalence des conditions analogues à (3) et (7) (théorème 1") a été aussi obtenue par Boorman et Oliver ([12], théorème 2.1.) ; les auteurs appellent supervaluation une application strictement croissante vérifiant l'analogue de la condition (7) (cf. aussi [13]).

3. Une conséquence du théorème 1' est que si un sup-demi-treillis n'est pas semi-modulaire supérieurement, il existe au moins un couple  $x, y$  avec  $\delta(x, y) < \delta(x, xvy) + \delta(xvy, y)$  (cf. figure 1 ).



$$\delta(x, y) = 4 < \delta(x, xvy) + \delta(xvy, y) = 6$$

Figure 1

4. Un problème qui reste ouvert est l'étude des ensembles ordonnés, non gradués, pour lesquels la distance du plus court chemin  $\delta$ , vérifie  $\delta(x,y) = \delta(x,t) + \delta(t,y)$  pour tout  $t \in x \cup y$ . (Exemple et contre-exemple, figure 2).

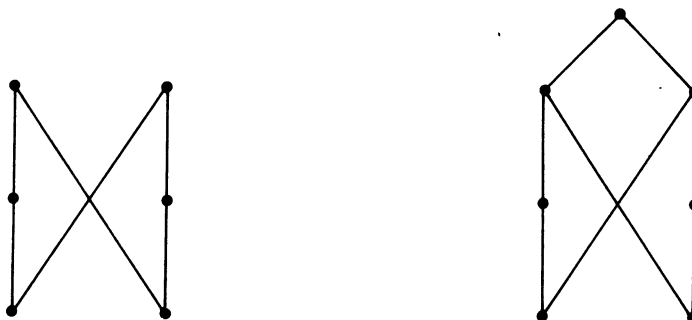


Figure 2

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, 2 volumes, Paris, Hachette, 1970.
- [2] BERGE C., *Graphes et Hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.
- [3] BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, Providence, American Mathematical Society, R.I. 1967.
- [4] BOORMAN S.A., ARABIE P., *Structural measures and the method of sorting in multidimensional scaling*, Volume 1, Theory, New York, Seminar Press, 1972 (225-249).
- [5] BORDES G., "Métriques bornées définies par des valuations sur un demi-treillis", *Math. Sci. hum.*, 56, 1976
- [6] COMYN G., VAN DORPE J.C., "Valuation et semi-modularité dans les demi-treillis", *Math. Sci. hum.*, 56, 1976
- [7] DUFFUS D., RIVAL I., "Path length in the covering graph of a lattice", à paraître dans *Discrete Math.*, 1977.
- [8] GRIMONPREZ G., VAN DORPE J.C., "Distance définie par une application monotone sur un treillis", *Math. Sci. hum.*, 56, 1976
- [9] HASKINS L., GUDDER S., "Height on posets and graphs", *Discrete Math.*, 2, 1972 (357-382).
- [10] JARDINE N., SIBSON R., *Mathematical taxonomy*, New York, Wiley, 1971.
- [11] REGNIER S., "Sur quelques aspects mathématiques des problèmes de classification automatique", *I.C.C. Bull.*, 4, 1965 (175-191).
- [12] BOORMAN S.A., OLIVER D.C., "Metrics on spaces on finite trees", *J. Math. Psychol.*, 10, 1973 (26-59).
- [13] CAILLIEZ F., PAGES J.P., *Introduction à l'analyse des données*, Paris, S.M.A.S.H., 1976.