MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. MONJARDET

Lhuilier contre Condorcet, au pays des paradoxes

Mathématiques et sciences humaines, tome 54 (1976), p. 33-43
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__54__33_0>

Math. Sci. hum. (14^e année, n°54, 1976, p.33-43)

LHUILIER CONTRE CONDORCET, AU PAYS DES PARADOXES

B. MONJARDET

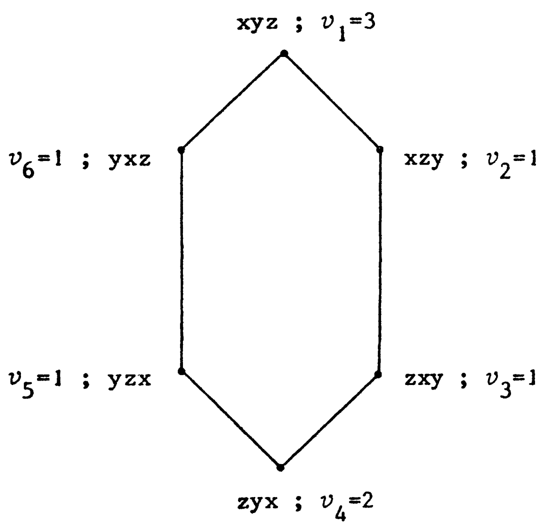
I. INTRODUCTION

Le mémoire de S. Lhuilier est consacré à l'étude d'un mode d'élection proposé par Condorcet et utilisé à Genève en 1793 [8].Le contexte historique de ce mémoire est présenté dans [9] et nous n'y reviendrons pas. Une des caractéristiques de la procédure proposée par Condorcet est de prévoir $3p$ candidats pour p postes à remplir. Le cas $p = 1$ (3 candidats, 1 élu) est évidemment privilégié et Lhuilier lui consacre la plus grande partie de son écrit. Nous nous limiterons à ce cas, suffisant pour saisir les critiques de Lhuilier et montrer qu'elles s'appuient sur des analyses dues à Condorcet lui-même ([3],[6]). D'autre part, dans sa recherche d'une procédure de vote satisfaisante, Lhuilier pose implicitement plusieurs problèmes ; certains ont été résolus partiellement ou totalement et nous signalons ces résultats ([2],[4],[5],[11],[12]).

II. BULLETIN DE VOTE ET PREFERENCES D'UN VOTANT

Lhuilier considère une assemblée de votants ayant à élire une personne parmi trois candidats et utilisant la procédure de Condorcet. Celle-ci comporte deux aspects, l'un concernant la nature du vote individuel, l'autre le passage des votes individuels au résultat de l'élection. Ce deuxième point sera étudié au paragraphe suivant. Pour le premier, la procédure est la suivante : le bulletin de vote individuel comporte deux colonnes, intitulées respectivement suffrage électif et suffrage supplémentaire. Dans chacune de ces colonnes, l'électeur met le nom d'un candidat, les deux noms devant être différents.

La première remarque de Lhuilier, énoncée sous forme de "principe fondamental" est qu'on peut inférer du bulletin de vote d'un électeur son ordre de préférence sur les candidats. En effet le candidat inscrit en suffrage électif est préféré au candidat inscrit en suffrage supplémentaire lui-même préféré au candidat non inscrit. (Page 10 du mémoire ; nous reviendrons sur ce principe fondamental au paragraphe 7). Dès lors l'analyse peut porter sur ces ordres de préférence et Lhuilier décrit les ordres possibles, au nombre de 6, puisqu'il s'agit d'ordres totaux. Dans la suite nous noterons x, y, z les candidats et x y z l'ordre de préférence où x est premier et y second. Les six ordres totaux possibles sont représentés figure 1, sur le classique permutoèdre ([7]). On indique sur ce même permutoèdre la distribution des préférences de l'assemblée, en associant à chaque ordre le nombre de votants qui adoptent cet ordre de préférence. Un exemple est représenté figure 1. De façon générale, nous notons $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ces nombres, v_1 par exemple, étant le nombre de votants dont l'ordre est x y z ; on pourra aussi si nécessaire, noter $v_1 = v_{xyz}$.



$v_x^1 = 4$; $v_x^2 = 2$; $v_x^3 = 3$

$v_y^1 = 2$; $v_y^2 = 5$; $v_y^3 = 2$

$v_z^1 = 3$; $v_z^2 = 2$; $v_z^3 = 4$

$s_x = 6$; $s_y = 7$; $s_z = 5$

$v_{xy} = v_{yz} = v_{xz} = 5$

$v_{yx} = v_{zy} = v_{zx} = 4$

Figure 1

Si v est le nombre de votants, on a $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$.

La donnée de la distribution des préférences, c'est-à-dire de ces six nombres, permet le calcul d'autres nombres intéressants :

v_x^1 = nombre de votants préférant x = $v_1 + v_2$

v_x^2 = nombre de votants classant x en second = $v_3 + v_6$

v_x^3 = nombre de votants classant x en dernier = $v_4 + v_5$

s_x = nombre de votants classant x premier ou second = $v_2^1 + v_x^2$.

On détermine de même les nombres correspondants pour y et z ; le nombre s_x

sera appelé le score de x.

v_{xy} = nombre de votants préférant x à y = $v_1 + v_2 + v_3$

v_{yx} = nombre de votants préférant y à x = $v_4 + v_5 + v_6$.

On détermine de même les nombres correspondants pour y et z.

On a évidemment des relations entre ces nombres, par exemple,

$$v_x^1 + v_x^2 + v_x^3 = v_x^1 + v_y^1 + v_z^1 = v_{xy} + v_{yx} = v$$

ou $$v_{xy} = v_x^1 + v_{zxy}$$

Lhuilier énonce ainsi cette dernière relation : "un candidat est préféré à un autre par tous les votants qui lui ont donné un suffrage d'élection et par ceux qui lui ont donné un suffrage supplémentaire en donnant au troisième candidat un suffrage d'élection"([8]]p.15).

III. LA PROCEDURE DE VOTE DE CONDORCET

Ayant les bulletins de vote où ce qui est équivalent les préférences des votants, on peut maintenant préciser la méthode de Condorcet pour obtenir le résultat. Nous utilisons les notations précédentes. On distingue deux cas :

<u>1er cas</u> : Il existe un candidat classé premier par une majorité de votants ($v_x^1 > \frac{v}{2}$) : alors ce candidat est élu.

<u>2ème cas</u> : Il n'existe pas de candidat majoritairement premier.Le candidat élu est celui de plus grand score ($s_x > s_y$ et s_z).

C'est cette procédure qui était utilisée à Genève en 1793 et désormais nous l'appellerons procédure C.G..

Par exemple, dans le cas de la figure 1, on a

$$v_x^1 = 4 \ , \quad v_z^1 = 3 \ , \quad v_y^1 = 2 \ .$$

Aucun candidat n'étant majoritairement premier, on considère les scores :

$$s_x = 6 \ , \quad s_y = 7 \ , \quad s_z = 5 \ .$$

Ainsi y est élu.

On peut remarquer que cette procédure apparait comme en partie duale d'une méthode classique, souvent utilisée : le vote majoritaire à un tour (dit aussi pluralité simple). Dans cette deuxième méthode, le candidat élu est celui classé premier par le plus grand nombre de votants ; en

particulier un candidat majoritairement premier est élu.
Dans la procédure C.G. un candidat est élu s'il est majoritairement premier, ou s'il est classé dernier par le plus petit nombre de votants (mais ici la première condition n'implique pas nécessairement la seconde).

IV. LES PARADOXES DE LA METHODE

Pour Lhuilier la procédure C.G. est critiquable, du fait qu'un candidat élu par cette méthode peut être élu contre le "voeu" des électeurs. Comment est défini ce voeu ? Cette définition se trouve à la page douze du mémoire sous la forme suivante : "Soient deux candidats : l'un est *plus agréable* que l'autre, lorsque le nombre des votants qui ont préféré le premier candidat au second est plus grand que le nombre des votants qui ont préféré le second au premier". Avec nos notations x est plus agréable que y, si $v_{xy} > v_{yx}$. Lhuilier constate alors l'existence de contradictions du type suivant : pour une distribution donnée des préférences, le candidat y peut être élu alors que le candidat x est plus agréable que y.

Ainsi, dans l'exemple 1 (figure 1), y est élu ; mais $v_{xy} = 5 > v_{yx} = 4$.
On est bien dans le cas d'une telle contradiction.

Le premier point à souligner dans cette analyse de Lhuilier concerne sa définition du voeu, qu'il appelle aussi "volonté vraie" de l'assemblée. Ce voeu concerne la comparaison de deux candidats et s'obtient en considérant toutes les préférences individuelles des votants sur ces deux candidats : x est plus agréable que y si $v_{xy} > v_{yx}$. Dans la suite, nous dirons dans ce cas que x est préféré collectivement à y et nous noterons x > y. Or cette notion de préférence collective définie au moyen des comparaisons par paires est à la base des travaux de Condorcet et semble d'ailleurs lui être due. Par exemple, la critique de la méthode de Borda par Condorcet repose sur des contradictions analogues entre le résultat du vote et ces préférences collectives. Ainsi la critique par Lhuilier de la méthode proposée par Condorcet, repose sur l'arme forgée par ce dernier, ce qui est d'ailleurs de bonne guerre.

On peut ensuite pousser plus loin l'analyse de la contradiction. Lhuilier remarque ainsi que s'il existe un candidat majoritairement premier, il ne peut y avoir de contradiction : autrement dit

$$v_x^1 > \frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad x > y \text{ et } x > z$$

La contradiction ne peut donc se produire que lors du recours aux scores des candidats. Or

$$s_x = v_1 + v_2 + v_3 + v_6 \qquad s_y = v_4 + v_5 + v_6 + v_1$$

Donc $s_x > s_y$ si et seulement si $v_2 + v_3 = v_{xy} - v_1 > v_4 + v_5 = v_{yx} - v_6$.

Comparer x et y par leurs scores revient donc à les comparer en tronquant les nombres v_{xy} et v_{yx} qui permettraient d'obtenir la "vraie" comparaison entre eux, celle de la préférence collective.

Par exemple, au nombre v_{xy} est soustrait le nombre $v_1 = v_{xyz}$, ceci du fait que ce dernier est comptabilisé dans le calcul de s_y.
Comme le dit Lhuilier, en déplorant cette pratique la comparaison de deux candidats par leurs scores revient à "opposer aux suffrages électifs de l'un les suffrages supplémentaires qu'avait reçu l'autre sur les mêmes bulletins" ([8] p.11). Par exemple, dans la comparaison de s_x et s_y, $v_x^1 = v_1 + v_2$ est opposé à $v_1 = v_{xyz}$.
Ayant repéré la source de la contradiction, on peut aussi préciser quand elle se produit. Par exemple, on aura

$$s_x > s_y \qquad \text{et} \qquad y > x$$

si et seulement si

$$v_6 > v_4 + v_5 + v_6 - v_2 - v_3 > v_1 .$$

On peut enfin élargir un peu la contradiction précédente.
La procédure C.G. a pour but d'élire un candidat. Mais en fait elle permet de classer les trois candidats, soit d'après le nombre de fois où ils sont premiers, soit d'après leurs scores. La préférence collective définie par le critère de Condorcet des comparaisons par paires ne permet pas toujours elle un classement des candidats ; on sait en effet qu'on peut avoir "effet Condorcet" c'est-à-dire x > y, y > z et z > x. Lhuilier connait cette possibilité (certainement à travers l'ouvrage de Condorcet) et il dit alors que la volonté de l'assemblée est indéterminée ([8] p.19). Mais si cette préférence collective est un ordre, on peut le comparer à l'ordre obtenu par la procédure C.G. Dans l'exemple suivant, la préférence collective est x > y > z alors que l'ordre de la procédure C.G., obtenu par les scores est l'ordre inverse.

Exemple 2

$v = 15$; $v_3 = v_6 = 1$; $v_4 = 2$; $v_1 = 3$; $v_2 = v_5 = 4$

$v_x^1 = 7$; $v_y^1 = 5$; $v_z^1 = 3$.

$s_z = 11 > s_y = 10 > s_x = 9$.

$v_{xy} = v_{xz} = v_{yz} = 8$.

V. LES EXEMPLES DE LHUILIER

Les exemples du paragraphe précédent illustrant les contradictions de la méthode C.G. ne sont pas ceux de Lhuilier, qui en utilise de plus compliqués. D'abord ses exemples concernent une assemblée de 2400 votants. D'autre part et surtout, Lhuilier ne se donne pas *a priori* la distribution des préférences dans l'assemblée, c'est-à-dire les six nombres $v_1, \ldots, v_6$. Il se donne les nombres de suffrages électifs (v_x^1) et supplémentaires (v_x^2) de chaque candidat. Ces données correspondent aux conditions concrètes de dépouillement du scrutin dans lequel seuls ces nombres étaient comptabilisés. Mais pour pouvoir déterminer les préférences collectives x > y, il faut connaître les nombres v_{xy}, ou la distribution des préférences individuelles.
Or il est facile de voir que les six nombres inconnus de la distribution sont reliés aux nombres connus v, v_x^1, $v_x^2, \ldots$, par cinq équations indépendantes. Il suffit donc de se donner la valeur d'une des inconnues comme paramètre, pour déterminer les autres et en déduire les v_{xy}.
Pratiquement Lhuilier part d'un tableau de dépouillement du scrutin comme celui-ci ([8],p.16) :

Candidats	Suffrages électifs	Suffrages supplémentaires	Sommes (scores)
x	1160	220	1380
y	1080	180	1260
z	160	1260	2160

Avec la procédure C.G. le candidat z est élu. Lhuilier procède alors à la détermination de la préférence collective entre z et x.

Or

$$v_{zx} = v_3 + v_4 + v_5 = v_{zxy} + (v - s_x)$$

Le nombre $v - s_x$ est fixé (égal ici à 1020) et le nombre v_{zxy} inconnu peut varier de zéro à $v_z^1 = 160$. Lhuilier considère le cas le plus favorable à z, dans la comparaison entre z et x, c'est-à-dire le cas où $v_{zxy} = v_z^1 = 160$. Il en déduit que $v_{zx} = 1180 < v_{xz} = 1220$, d'où une contradiction. D'autre part, puisqu'il a fixé la valeur d'une des inconnues de la distribution des préférences, il peut déterminer complètement cette distribution et les valeurs des v_{xy}. Il donne les résultats dans le tableau suivant ([8], p.17) :

Votants		Suffrages électifs	Suffrages supplémentaires	Votants qui préfèrent	
1160	180	x	y	x à y	1320
	980	x	z	y à x	1080
1080	60	y	x	x à z	1220
	1020	y	z	z à x	1180
160	160	z	x	y à z	1260
	0	z	y	z à y	1140

Lhuilier procède de même pour la comparaison entre z et y, à partir des mêmes données initiales. Il se donne cette fois, $v_4 = v_{zyx} = v_z^1 = 160$, et détermine la distribution des préférences ; on a cette fois pour la préférence collective $x > z > y > x$, soit contradiction avec la procédure C.G. en même temps qu'indétermination du résultat (effet Condorcet). Lhuilier développe ensuite d'autres exemples analogues, l'idée générale étant la suivante. Pour une distribution donnée des suffrages électifs et supplémentaires (v_x^1, v_x^2), la procédure C.G. conduit à élire un certain candidat. Mais cette distribution peut être obtenue pour toute une classe de distributions de préférences ; classe obtenue en faisant varier la valeur d'un des nombres v_i. Pour certaines des distributions de cette classe, la préférence collective (déterminée par le critère de Condorcet) pourra infirmer le choix fait par la procédure ; pour d'autres elle pourra le confirmer. De plus pour certaines distributions la préférence collective pourra être cyclique, la procédure C.G. revenant alors à rompre arbitrairement ce cycle. Le supplément mathématique de Lhuilier à son mémoire comporte certains résultats sur ce thème. Parmi les dix-huit théorèmes énoncés, d'intérêt et de difficulté variables, on trouve des conditions sur la distribution des suffrages électifs et supplémentaires impliquant ou pouvant impliquer l'intransitivité de la préférence collective. Par exemple, les trois égalités

$$s_x = v_y^1 + v_z^1 \quad ; \quad s_y = v_x^1 + v_z^1 \quad ; \quad s_z = v_x^1 + v_y^1$$

impliquent l'effet Condorcet avec les égalités

$$|v_{xy} - v_{yx}| = |v_{yz} - v_{zy}| = |v_{zx} - v_{xz}| \qquad ([8], p.47).$$

VI. LA RECHERCHE D'UNE "BONNE" PROCEDURE DE VOTE

A la fin de son mémoire, Lhuilier examine d'autres procédures de votes possibles. Par exemple, il indique la proposition due à l'avocat Devegobre, de considérer les sommes des suffrages en attribuant les valeurs 1 aux suffrages électifs et 1/2 aux suffrages supplémentaires ; il s'agit donc de la méthode de Borda. Il estime en particulier qu'elle serait applicable dans le cas de trois candidats. C'est négliger le fait que la méthode de Borda se heurte au même obstacle que la procédure C.G. : elle peut contredire la préférence collective définie au moyen des comparaisons par paires. En fait, Lhuilier n'ignore pas ce point, mais il semble penser que ces contradictions sont rares ou tout du moins moins fréquentes qu'avec la méthode C.G. Pour en être certain, il faudrait calculer la fréquence de ces contradictions, qui si l'on considère le classement global des trois candidats sont de deux sortes : 1°) la préférence collective est un cycle, nécessairement différent de l'ordre total donné par les procédures Borda ou C.G. 2°) la préférence collective est un ordre différent de celui donné par l'une ou l'autre de ces procédures. On connait des résultats dans le premier cas ; par exemple, G.Th. Guilbaud a montré dans [6] que la fréquence de ce cas tend vers une limite approximativement égale à neuf pour cent, lorsque le nombre v de votants augmente indéfiniment. Par contre nous ne connaissons aucun résultat de cette sorte pour le second cas.
On peut toutefois citer à ce propos un article où Fishburn étudie "l'efficacité" de règles de majorités pondérées.([4]). Cette efficacité est définie par une mesure de la proportion des cas où le candidat préféré collectivement à tous les autres (s'il existe) est classé premier par la règle ; elle est estimée par une méthode de simulation. Les règles étudiées comprennent la méthode de Borda et celle de pluralité simple. Dans le cas de trois candidats, l'efficacité de ces deux règles semble diminuer beaucoup avec l'augmentation du nombre des votants. Dans le cas de la pluralité simple, des résultats plus précis mais concernant des petits nombres de votants sont apportés par C. Paris ([11] ; ainsi pour 3 candidats et 25 votants la probabilité de distorsion entre pluralité simple et préférence collective de Condorcet est de 0,14. Finalement comme Lhuilier ne veut pas s'exposer au reproche de "détruire sans réédifier", il propose son propre mode d'élection. Il ne semble pas y mettre une

conviction absolue ; et en effet, moyennant certaines précautions, sa procédure aboutit à utiliser la pluralité simple.
Dès lors, elle est susceptible d'exactement la même critique que Lhuilier faisait à la procédure C.G. : conduire à des résultats en contradiction avec la préférence collective définie par les comparaisons par paires.
Ainsi les fines remarques de Lhuilier et son travail mathématique approfondi, le ramènent pratiquement, qu'il en soit ou non conscient, à son point de départ. C'est que l'obstacle auquel il se heurte est évidemment inéluctable. Si l'on veut une procédure de vote qui ne"puisse jamais être en opposition avec la décision vraie de l'assemblée", il faut adopter la procédure de Condorcet des comparaisons par paires ; mais alors on s'expose à des cas d'intermination de cette décision (effet Condorcet). Si, par contre, l'on veut une procédure conduisant toujours à une décision, elle contredira nécessairement dans certains cas la "vraie décision", celle des comparaisons par paires. Dès lors le vrai problème devient la recherche des procédures contredisant le "moins souvent possible" la préférence collective, problème abordé dans les travaux cités plus haut ([4],[6],[11]).

VII. LA BRIGUE

Un autre problème important soulevé par Lhuilier est celui de la "brigue" définie comme "la conduite d'un votant ne donnant pas ses suffrages conformément à la connaissance qu'il a du mérite des candidats" ([8]p.35).
On pensait, explique-t-il, que la procédure C.G. éviterait la brigue, mais l'expérience a prouvé le contraire ! Dans l'exemple qu'il donne deux des 3 candidats, x et y sont chacun classés premiers par un nombre important de votants ; dès lors ces votants préférant x ou y, vont mettre systématiquement le troisième candidat z en deuxième place (suffrage supplémentaire) pensant ainsi avantager leur préféré ; mais si ni x ni y n'ont une majorité absolue, c'est z qui l'emporte. Curieusement, dans cet exemple, la brigue n'avantage pas ceux qui l'utilisent, ce qui est pourtant sa fonction. Mais il est facile de trouver des exemples de brigues avantageuses pour celui qui l'utilise.
Par exemple, considérons la distribution suivante des préférences :
$v_{xzy} = v_{zxy} = v_{zyx} = 1$; $v_{yxz} = 2$. Avec la procédure C.G. x est élu ($s_x = 4 > s_y = s_z = 3$). Si maintenant le votant dont l'ordre de préférence est zyx, met dans son bulletin de vote y en premier et z en second, c'est y qui est élu ($v^1_y = 3$), ce qui est préférable pour lui.
Lhuilier n'indique pas cette possibilité de brigue profitable bien qu'il l'ait certainement vue. S'est-il rendu compte qu'elle est directement en contradiction avec son principe fondamental ? Si en effet des votants

utilisent cette possibilité de brigue, et il n'y a aucune raison pour qu'ils ne le fassent pas, on ne peut déduire de leur bulletin de vote leur préférence réelle sur les candidats. Dès lors on ne peut déterminer à partir de ces bulletins de vote la "volonté réelle" de l'assemblée et *a fortiori* les contradictions entre cette volonté réelle et le résultat de la procédure C.G..

En fait, ce que les bulletins de votes permettent de connaitre (moyennant l'indétermination étudiée au paragraphe 5) ce sont les préférences "exprimées" dont certaines peuvent d'ailleurs être des préférences réelles. A partir de là, on peut donc montrer d'éventuelles contradictions entre la "volonté exprimée" de l'assemblée et le résultat de la procédure C.G.. Mais quelle est la signification d'une telle contradiction ? Puisque les préférences exprimées le sont en fonction des possibilités de brigue de la procédure C.G. elles n'ont aucune valeur intrinsèque. Ainsi on peut trouver des exemples où le résultat de la procédure C.G. contredit les préférences exprimées, mais non les préférences réelles (supposées connues) ; la brigue aurait ici la valeur "morale" que son appellation même lui dénie.

Evidemment ces remarques ne remettent pas en cause tout le travail de Lhuilier. Les paradoxes qu'il établit demeurent valables en supposant les préférences réelles connues. Quant à ses théorèmes ils restent bien sûr vrais ; seule leur interprétation peut différer.

Après avoir signalé que la procédure C.G. ne prévenait pas la brigue, Lhuilier ajoute qu'il en est de même pour la procédure de Borda ([8]p.37). Implicitement le problème des procédures de votes ne permettant pas la brigue se trouve posé. En fait il s'agit de prévenir non la possibilité de ne pas voter selon ses préférences, tâche impossible, mais celle d'en tirer un avantage. Existe-t-il de telle procédures, c'est-à-dire des procédures où aucun votant n'a jamais intérêt à voter de façon non conforme à ses préférences réelles ? Dans le cas de deux candidats, la règle de majorité simple et plus généralement toute règle définie au moyen d'une "famille de majorités" ([10],chapitre V) constituent de telles procédures. Mais elles ne le sont plus, si on étend ces règles au cas de plus de deux candidats (en utilisant la méthode des comparaisons par paires). Peut-on en trouver d'autres ? Un résultat fondamental obtenu indépendamment par Gibbard ([5]) et Satterthwaite([12]), établit que pour plus de 2 candidats les seules règles où la brigue n'est jamais avantageuse sont les règles dictatoriales (au sens d'Arrow) ou imposées (le candidat élu est fixé *a priori*, quelles que soient les préférences des votants). Ce résultat est bien sûr relié au théorème d'Arrow et Batteau et Blin en ont donné une démonstration simple analogue à la démonstration du théorème d'Arrow par Guilbaud ([2],[6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARROW K.J., *Social choice and individual values*, New York, Wiley, 1951.

[2] BATTEAU P., BLIN J.M., "Sur le problème des procédures de scrutin garantissant une expression sincère des opinions", dans ce numéro, *Math. Sci. hum.*, 54 (1976).

[3] CONDORCET, Marquis de, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.

[4] FISHBURN P.C., "Simple voting systems and majority rule", *Behavioral Sci.*, 19 (1974), 166-176.

[5] GIBBARD A., "Manipulation of voting schemes : a general result", *Econometrica*, 41 (1973).

[6] GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", *Economie appliquée*, 5,n°4 (1952) et dans *Eléments de la théorie des jeux*, Paris, Dunod, 1968.

[7] GUILBAUD G.Th., ROSENSTIEHL P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.*, 4 (1963), 9-33.

[8] LHUILIER S., *Examen du mode d'élection proposé à la Convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève*, Genève, 1794, reproduit dans *Math. Sci. hum.* 54 (1976).

[9] MOESSINGER P., "La mathématique sociale de Simon Lhuilier", dans ce numéro, *Math. Sci. hum.*, 54 (1976).

[10] MONJARDET B., *Problèmes de transversalité dans les hypergraphes, les ensembles ordonnés et en théorie de la décision collective*, Thèse de doctorat, Paris VI, 1974.

[11] PARIS D.C., "Plurality distortion and majority simple", *Behavioral Sci.*, 20 (1975), 125-133.

[12] SATTERTHWAITE M.A., "Strategy proofness and Arrow's conditions : existence and correspondence theorems for voting and social welfare functions", *J. Econ. Theory*, 10 (1975), 187-217.