

F. MIMIAGUE

J.-M. ROUSSEAU

Effet Condorcet : typologie et calculs de fréquences

Mathématiques et sciences humaines, tome 43 (1973), p. 7-27

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__43__7_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EFFET CONDORCET : TYPOLOGIE ET CALCULS DE FRÉQUENCES

par

F. MIMIAGUE¹ et J.-M. ROUSSEAU¹

RÉSUMÉ

A l'appui du rejet de la procédure de choix collectif imaginée par Condorcet (comparaison par paires), on avance généralement la crainte que l'application d'une telle méthode aboutisse à un résultat incohérent, l'effet Condorcet. Une telle attitude n'est guère recevable sans une approche scientifique préalable. Une typologie de ces effets ainsi que le dénombrement de leurs types sont proposés ici, basés sur les possibilités de classement partiel des alternatives soumises au choix, en fonction de la configuration des résultats. Regroupés en p-classes, ces types font l'objet d'un calcul de fréquence, approché au moyen d'une méthode de Monte-Carlo ; quelques hypothèses sont posées, relatives au comportement de ces fréquences.

SUMMARY

The fear that the application of Condorcet's collective choice procedure would effect an incoherent result has led to a general rejection of this method. Such a priori conclusions are inconsistent with a true scientific approach. We propose here a typology of these effects and an enumeration of their types, based on the possibilities of a partial classification of the alternatives according to the configuration of the results. The approximate frequency of these types, grouped together in p-classes, can be calculated, using a Monte-Carlo method ; some hypotheses concerning the variations of these frequencies have been formulated.

L'obstacle majeur empêchant de recourir à un système de décision collective basé sur l'application de la règle majoritaire à des ordres de préférences, est qu'un tel système peut produire des majorités incohérentes, non décisives, s'exprimant par le viol de l'axiome de transitivité de la relation d'ordre.

1. Université de Bordeaux I.

Mis à jour la première fois au 18^e siècle [1] et connu sous le nom de paradoxe de Condorcet, ce phénomène n'a guère fait l'objet d'analyses systématiques qu'à partir des premiers travaux de D. Black [2] et de ceux de K. Arrow [3], datant de 1948.

L'existence du phénomène étant établie en théorie, il reste à savoir, pour le groupe qui adopterait éventuellement un tel système de décision, s'il y a réellement lieu d'en craindre l'apparition. Il s'avère donc nécessaire de mesurer l'importance objective des effets Condorcet, c'est-à-dire de calculer la fréquence des résultats intransitifs, parmi tous les résultats possibles.

A priori, trois facteurs doivent jouer, lors de la détermination de cette fréquence.

1 — La taille du groupe.

2 — Le nombre d'éléments soumis à la décision.

3 — L'état des relations sociales du groupe (état qui peut favoriser ou interdire, par exemple, certaines préférences).

1. ÉTAPES PRINCIPALES DU CALCUL

Le premier calcul date de 1952. Dans un article [4] qui n'est cependant pas centré sur ce point, G. Th. Guilbaud fait état de quelques-unes de ces fréquences lorsque trois éléments sont soumis à la décision et pour une taille de groupe de 3, 5 et 9 Guilbaud constate alors que cette fréquence croît avec la taille du groupe et qu'elle tend vers une limite (en l'occurrence 0,0877) lorsque la taille s'accroît indéfiniment. Il prend soin de préciser qu'il élude en fait la question de l'état des relations sociales¹. Il procède donc à un calcul purement mathématique dont le résultat ne saurait être étendu sans discussion à une quelconque réalité sociale. Le laconisme de l'auteur quant à la méthode de calcul utilisée n'a pas permis à ses quelques suivants (si tant est qu'ils aient eu connaissance de ce premier travail, ce qui ne semble pas avoir été le cas au début) de déterminer rapidement d'autres fréquences, lorsque plus de 3 éléments sont soumis à la décision. En 1958, D. Black [2] avoue modestement son incapacité à déterminer une méthode générale de calcul.

Avec Riker [5] apparaît une distinction entre différents types d'effets qui sera adoptée par la suite par tout le monde. Du point de vue de la décision politique (genre élection, ou vote d'assemblée), il apparaît important de distinguer parmi les effets Condorcet ceux qui mettent en évidence un « vainqueur » de ceux qui n'en fournissent pas. Seuls ces derniers sont effectivement non décisifs ; appelés par la suite effets de type II, ils sont les seuls pris en compte dans le calcul : les autres, effets produisant un vainqueur et dits de type I, ne sont d'aucune importance s'il s'agit de choisir *une* proposition ou une personne parmi un ensemble soumis à la décision.

Il faut bien noter que cette distinction n'apparaît pas chez Condorcet et Guilbaud qui n'ont raisonné, pour mettre en évidence le paradoxe, que sur trois éléments, cas pour lequel il n'existe qu'un seul type d'effet possible.

En dehors de cette distinction, l'apport de Riker au calcul des fréquences est limité à des questions annexes.

Quatre années plus tard, C. Campbell et G. Tullock [6] se fondent sur la distinction précédente et ne se préoccupent que des effets de type II. Renonçant, eux aussi, à l'approche mathéma-

1. *Op. cit.*, p. 517.

tique, ils utilisent les méthodes de Monte-Carlo pour estimer les valeurs des fréquences. Au vu des résultats, on peut alors affirmer que la fréquence des effets de type II est une fonction croissante de ces deux arguments (nombre d'éléments proposés au choix et taille du groupe).

D. Klahr à son tour [7] établit une table par simulation également, à partir d'échantillons de taille plus importante.

Ce n'est qu'en 1968 qu'une démonstration rigoureuse permet de rejoindre le nombre limite donné par Guilbaud. C'est le travail de M. Garman et M. Kamien [8] qui introduisent les premiers le troisième facteur (l'état des relations sociales) grâce à leur notion de « culture neutre »¹. Ce faisant, ils donnent également les valeurs exactes des fréquences d'effets du type II, pour de petites valeurs des arguments et la limite de ces fréquences lorsque la taille du groupe tend vers l'infini, confirmant d'ailleurs les conclusions de Campbell et Tullock.

Dans le même temps, R. Niemi, H. Weisberg [9] donnent la formulation générale de la solution, toujours en se limitant aux effets de type II.

Enfin, dans une perspective différente, F. Demeyer et C.-R. Plott [10] ont apporté une solution générale pour la fréquence des résultats transitifs permettant ainsi, par différence, d'obtenir la fréquence des effets de type I.

Dans l'espace d'une vingtaine d'années, des étapes importantes ont été franchies dans l'ordre des méthodes de calcul et dans celui des résultats. La porte s'ouvre sur des perspectives de « calcul » social dont seuls les résultats peuvent assurer la pertinence de telles recherches.

Il faut noter cependant que le calcul de fréquence ne porte que sur une partie des effets Condorcet. Cette restriction, déduite de l'utilité pratique de la distinction entre effets de Type I et II ne permet pas d'analyser complètement la structure du phénomène.

2. ANALYSE D'UN EXEMPLE

Dans la problématique des décisions collectives, telle qu'elle a été établie par Condorcet puis reprise par les calculateurs contemporains, il s'agit, en respectant la règle de la majorité simple, d'agrèger m ordres de préférences individuels (exprimant l'opinion de m votants) relatifs à n objets, en utilisant la procédure de comparaison par paire. Techniquement, ces ordres de préférences² sont des relations d'ordre complet strict, c'est-à-dire à la fois complètes, asymétriques³ et transitives. L'agrégation ré-

1. Traduction approximative d'« impartial culture ». Cette notion équivaut à poser que le choix de tout ordre est possible et que l'occurrence de chaque ordre est également vraisemblable.

2. Pour une présentation complète des relations de préférences, on peut se reporter à A. K. Sen, *Collective choice and social welfare*, Edinburgh - Londres, Oliver and Boyd, 1970, chap. 1.

3. On relève dans la littérature un certain défaut de normalisation relatif à la définition même des propriétés de ces relations.

Ainsi la propriété

$$\forall x, y \in S, x R y \Rightarrow \sim y R x$$

est dénommée antisymétrie par M. Garman et M. Kamien ([8] page 308) et asymétrie par A. K. Sen (*op. cit.*, page 8) lequel définit l'antisymétrie par

$$\forall x, y \in S (x R y \text{ et } y R x) \Rightarrow x = y$$

Seule la première propriété est vraie dans le cas des ordres de préférences individuels utilisés dans le cadre de la procédure de Condorcet. Nous adoptons ici la terminologie de A. K. Sen, plus appropriée.

sultante est une relation seulement complète et asymétrique¹ ; la propriété de transitivité n'est pas garantie à coup sûr et, lorsqu'elle n'est pas vérifiée, il y a effet Condorcet.

Soit 5 éléments soumis au classement pour un groupe de 3 personnes.

Soit A, B, C, D, et E ces éléments et les trois ordres suivants donnés :

A B C E D

C A D B E

D B E A C

l'ordre de lecture correspondant à l'ordre décroissant des préférences.

L'analyse de ce « scrutin » selon la méthode de Condorcet (comparaison par paire) se présente de la façon suivante :

A B	A C	A D	A E	B C	B D	B E	C D	C E	D E	} Dépouillement des trois préférences
1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	
1 .	. 1	1 .	1 .	1 .	. 1	1 .	1 .	1 .	1 .	
. 1	1 .	. 1	. 1	. 1	. 1	1 .	. 1	. 1	1 .	
2 1	2 1	2 1	2 1	2 1	1 2	3 0	2 1	2 1	2 1	Résultat du « vote »
A	A	A	A	B	D	B	C	C	D	Vainqueur en application de la règle majoritaire

Ce qui se lit au niveau global,
éléments A B C D E
score (nombre de fois vainqueur) 4 2 2 2 0

D'où le résultat global suivant :

A . (B, C, D). E

qui se lit :

A est préféré à tous les autres (A vainqueur)

E n'est préféré à aucun autre (E défait)

B, C et D ne sont pas classables entre eux.

On se trouve donc en présence d'un effet Condorcet que la terminologie classique caractérise comme étant de type I puisque l'élément A peut être consacré comme vainqueur.

En se plaçant sous un autre angle, on peut également conclure sur cet exemple en constatant que si l'application de la procédure de Condorcet ne permet pas toujours d'établir une relation d'ordre total entre n éléments, elle rend toujours possible l'établissement d'une relation d'ordre total sur une partition de l'ensemble des n éléments.

1. Asymétrique sous l'hypothèse peu restrictive que m soit impair. Cette hypothèse de travail, retenue par nous, l'a également été lors de tous les travaux antérieurs.

Nous retrouvons ici le problème de la partition d'un ensemble à n éléments [11]. Dans le cas particulier des effets Condorcet il faut exclure les partitions pour lesquelles au moins une classe contient deux éléments exactement. En effet, de par la procédure, deux objets sont toujours ordonnés ; l'intransitivité ne peut apparaître qu'avec l'adjonction d'un troisième objet. Du point de vue où nous nous plaçons, les types d'agrégation résultant de la mise en œuvre de la procédure de Condorcet peuvent être définis comme les *partages ordonnés de n en nombres entiers ne comportant pas le nombre 2*. Dans le cas où le partage comporte n classes (toutes forcément de cardinal 1), il n'y a pas d'effet Condorcet, l'ensemble des n objets étant totalement ordonné ; pour tous les partages de moins de n classes¹ et dont la première classe est de cardinal 1, il y a effet Condorcet de Type I.

3. RELATION DE TOURNOI ET EFFET CONDORCET

On peut donner une autre formulation du point de vue exposé ci-dessus en utilisant, dans le cadre de la théorie des graphes, la notion de tournoi². La procédure de Condorcet conduit en effet à définir sur l'ensemble des n objets à comparer, un 1-graphe complet et asymétrique³, c'est-à-dire un graphe de tournoi (graphe des comparaisons par paires). On définit classiquement l'équivalence de forte connexité sur l'ensemble des n sommets du tournoi en posant $A \equiv B$ si et seulement si il existe un chemin de A à B et un chemin de B à A (ce qui implique une intransitivité) ; les classes de cette équivalence sont les composantes fortement connexes du tournoi qui est ainsi décomposé suivant ces composantes. De plus les composantes du tournoi peuvent être complètement ordonnées ; les effectifs de ces composantes ordonnées par cet ordre complet constituent ce qui a été appelé ci-dessus un partage ordonné de n ne contenant pas le nombre 2 ; d'où la correspondance entre la formulation en termes de théorie des graphes et celle en termes d'analyse combinatoire.

Dans le cas de notre exemple, le graphe et sa matrice d'incidence se représentent de la façon suivante :

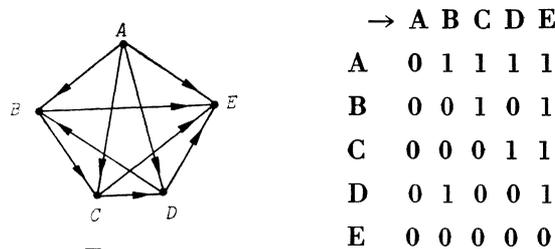


Figure 1

En décomposant le graphe en ses composantes fortement connexes, on obtient 3 classes ordonnables

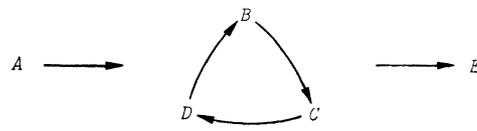


Figure 2

ce qui correspond au partage ordonné 1 — 3 — 1 du nombre 5.

1. Le nombre 2 étant exclus du partage, on ne peut, au demeurant, jamais obtenir $n-1$ classes exactement.
 2. Les éléments de ce paragraphe relatifs à la relation de tournoi sont directement inspirés de [12] qui constitue une synthèse des principales propriétés des graphes de tournoi.
 3. Voir note 2, p. 9.

Lorsque le tournoi est effectivement décomposable en plusieurs classes, il est dit réductible. En particulier, il est dit totalement réductible lorsqu'il est décomposable en n classes, ce qui correspond au cas où une procédure de Condorcet conduit à un résultat transitif. Le tournoi est irréductible, ou fortement connexe, lorsque la décomposition ne produit qu'une seule classe, c'est-à-dire lorsque la relation d'équivalence de forte connexité est vraie pour tout couple de sommets du graphe¹.

Il découle de ces définitions que les effets Condorcet correspondent aux tournois non totalement réductibles.

Le dualisme de présentation de la structure d'une procédure de Condorcet, en termes d'analyse combinatoire ou en termes de théorie des graphes, peut conduire à une analyse intéressante des configurations possibles du résultat de cette procédure.

4. DÉNOMBREMENT DES PARTAGES ORDONNÉS DE n , $K(n)$, NE COMPORTANT PAS LE NOMBRE 2².

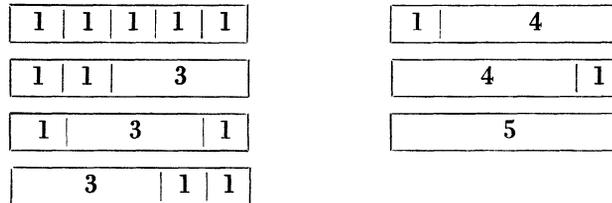
Pour $n = 3$, il y a 2 partages ordonnés



Pour $n = 4$, il y a 4 partages ordonnés



Pour $n = 5$, il y a 7 partages ordonnés



Dans le cas général, si $K(n)$ est le nombre de partages ordonnés possibles pour n donné, $K(n)$ se calcule par la formule :

$$K(n) = K(n-1) + K(n-2) + K(n-4)$$

formule dont la démonstration est donnée en annexe.

Ainsi, $K(20) = 31\,572$

$K(50)$ est de l'ordre de $6,7 \times 10^{11}$

$K(100)$ est de l'ordre de 10^{24} .

1. Dans [12], on peut trouver les algorithmes, basés sur l'analyse du vecteur-score du tournoi, qui permettent d'obtenir la décomposition d'un 1-graphe.

2. De façon équivalente, il s'agit de dénombrer les décompositions possibles d'un graphe de tournoi en ses composantes fortement connexes, étant entendu que les classes résultantes sont ordonnées entre elles et que les sommets du graphe ne sont pas différenciables par dénomination.

5. TYPOLOGIE DES EFFETS CONDORCET

A chaque partage ordonné de n ne comprenant pas le nombre 2^1 et de moins de n classes, on associe un *type* d'effets Condorcet, ce qui constitue une définition. Il y a donc $K(n) - 1$ types d'effets Condorcet pour n donné, puisqu'un seul partage est de n classes.

Dans le cas où le premier élément de tels partages est 1, nous retrouvons les effets de Type I ; tous les autres sont les effets de Type II.

Définition : lorsque le partage ne comprend qu'une seule classe, c'est-à-dire lorsque le tournoi est irréductible, nous disons qu'il y a effet Condorcet au sens strict.

Cette distinction est importante *si l'on ne sort pas du cadre limité de la procédure*. Ce n'est que dans le cas des effets Condorcet au sens strict qu'il est alors impossible de dégager quoi que ce soit du résultat global. Dans le cas de tout autre type d'effets, il est en effet toujours possible de mettre au jour des préférences collectives².

Tous ces types peuvent être regroupés selon le critère suivant : un type d'effets est dit appartenir à une p -classe lorsque le partage correspondant a un nombre de classes égal à p . Dans l'ensemble des partages de n , cette définition constitue une relation d'équivalence ; deux partages de n sont donc équivalents s'ils ont le même nombre de classes.

Les types d'effets Condorcet se répartissent alors selon le tableau suivant :

TABLEAU I

$n \backslash p$		Nombre de types d'effets appartenant à une p -classe										Nombre total de types d'effets $K(n) - 1$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3		1										1
4		1	2									3
5		1	2	3								6
6		1	3	3	4							11
7		1	4	6	4	5						20
8		1	5	9	10	5	6					36
9		1	6	13	16	15	6	7				64
10		1	7	18	26	25	21	7	8			113
11		1	8	24	40	45	36	28	8	9		199

Il s'ensuit que pour tout n , la 1-classe ne contient qu'un seul élément, un seul type d'effets, celui au sens strict.

1. Dans la suite du texte, le mot partage sera entendu dans ce sens.

2. De façon habituelle, le terme de « préférence collective » signifie de façon implicite un objet unique qu'une procédure de choix collectif a désigné comme « préféré ». Nous appelons ici préférences collectives tout préordre total, qui peut être obtenu entre n objets. Le sens du mot préférence est sans doute affaibli mais il recouvre tout de même une réalité indéniable.

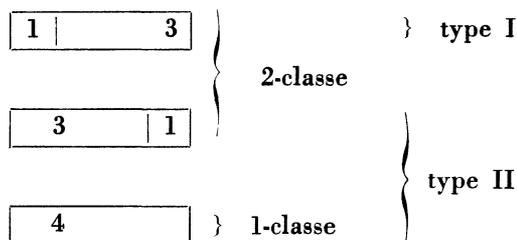
La recherche de la fréquence des effets Condorcet se divise donc de façon extrême en autant de calculs qu'il y a de types d'effets, ce qui permet ensuite, par sommation, tout regroupement, notamment en p -classes.

6. DÉTERMINATION DE FRÉQUENCES EXACTES POUR QUELQUES TYPES D'EFFETS

Pour les deux plus petites valeurs possibles prises respectivement par m et n , il est possible d'envisager le calcul direct des fréquences en utilisant une méthode de récurrence qui, pour m donné, permet de calculer le nombre d'effets d'un certain type, à l'ordre n , à partir du nombre d'effets d'un type donné, à l'ordre $n - 1$.

Pour $n = 4$, par exemple, les types d'effets sont les suivants :

Type p -classe



Pour m donné, on voit alors que pour obtenir le nombre d'effets de type $-1-3-$, il suffit de dénombrer toutes les façons possibles d'adjoindre un quatrième élément vainqueur, à l'effet $-3-$ qui constitue la 1-classe de l'ordre $n-1$. Dans le cas général on voit aisément que tout type d'effets d'ordre n peut être obtenu par l'adjonction judicieuse d'un n -ième élément à au moins un type d'effet de l'ordre $n-1$. Dans la pratique, il faut distinguer les différentes « structures » que peut revêtir l'effet d'ordre $n-1$, structures qui tiennent au sens des circularités, à leur nombre et à leur situation dans le graphe, eux-mêmes fonction des ordres choisis par les votants.

Dans le cas où $n = 4$ et $m = 3$, il suffit de dénombrer les effets de type $-1-3-$ puisque, par raison de symétrie, les effets $-3-1-$ sont en même nombre. Quant aux effets de type $-4-$, ils s'obtiennent par différence entre les effets de type II (donnés par Garman et Kamien dans [8] p. 314) et ceux de type $-3-1-$.

Un tel calcul permet d'obtenir les résultats suivants :

TABLEAU II¹

<i>n</i>	<i>m</i>	Type	Nombre	Fréquence relative		
4	3	1 3	816	0,059028		
		3 1	816	0,059028		
		4	720	0,052083		
		Total	2 352	0,170139		
	5	3	1 3	570 960	0,071705	
			3 1	570 960	0,071705	
			4	534 960	0,067183	
		Total	1 876 880	0,210593		
		5	3	1 4	95 760	0,055416
				4 1	95 760	0,055416
1 1 3	91 440			0,052916		
3 1 1	91 440			0,052916		
1 3 1	96 720			0,055972		
5	89 280			0,051666		
Total	560 400			0,324305		

1. Soit A_n un type d'effets d'ordre n , en nombre $E(m,n)$; soit A_{n-1} un type d'effets d'ordre $n - 1$ duquel on peut déduire A_n par adjonction d'un élément, en nombre $E(m,n-1)$ et décomposable en k « structures » d'effectifs

$$E_1(m,n-1), \dots, E_i(m,n-1), \dots, E_k(m,n-1).$$

Alors $E(m,n) = n \sum_{i=1}^k a_i E_i(m,n-1)$ où les a_i sont des nombre entiers puisqu'il s'agit du nombre de façons

d'adjoindre un élément à d'autres.

Pour des valeurs supérieures des deux arguments le calcul, sans être en soi très complexe, exige beaucoup trop de minutie pour pouvoir être aisément réalisé de façon économique.

Il faut remarquer que la méthode ci-dessus appliquée peut être rapprochée de celle mise au point par F. Demeyer et C.-R. Plott [10] en ce sens qu'elles conduisent toutes deux à rechercher la fréquence de chaque type de résultats (résultats transitifs essentiellement pour Demeyer et Plott). Mais chez ces auteurs, le principe de récurrence, contenu implicitement dans leur formulation générale (p. 352), n'est en rien utilisé et l'évaluation de chaque fréquence est effectuée de façon autonome, ce qui implique qu'une grande partie des calculs faits à l'ordre $n - 1$ sont refaits à l'ordre n . Ceci peut expliquer qu'un ordinateur (IBM 7094) exige plusieurs centaines d'heures (*op. cit.*, p. 354) pour évaluer pour $m = n = 5$, uniquement la fréquence globale de tous les effets de type I et celle des résultats transitifs et qu'aucun calcul n'ait été fait pour $m = 3$ et $n = 5$.

La prise en considération de la récurrence est assurément plus rapide puisqu'il a suffi d'une douzaine d'heures (temps de contrôle compris et sans utilisation d'ordinateur...) pour parvenir à mesurer la fréquence de tous les types d'effets à l'ordre 4 pour $m = 3$ et 5 et à l'ordre 5 pour $m = 3$, et par suite la fréquence des résultats transitifs. La formalisation de cette méthode conduirait alors, pour n donné, à calculer en séquence des séries de fréquences de types d'effets judicieusement choisis et d'ordre de plus en plus élevé. Les considérations de symétrie permettraient de plus de ne pas avoir à calculer toutes les fréquences.

Faute de moyens, nous nous sommes limités à mettre sur pied une simulation pour approcher les fréquences des différents types d'effets.

7. LA SIMULATION

La simulation proposée se différencie de celles déjà menées par C. Campbell et G. Tullock [6] d'une part et D. Klahr [7] d'autre part ; nous cherchons en effet à obtenir les fréquences de tous les types possibles d'effets Condorcet.

Cette perspective conduit à élaborer une procédure présentant des différences importantes par rapport à celles utilisées précédemment.

Le programme de calcul¹ peut se résumer ainsi :

- création préalable du fichier des ordres de préférences possibles, fichier de dimension $n!.n$,
- tirage de m (taille du groupe) nombres aléatoires² compris entre 1 et $n!$, auxquels correspondent m ordres de préférence,
- obtention du résultat selon le schéma d'analyse décrit dans l'exemple proposé (voir *supra*),
- itération 10 000 fois d'un tel processus pour m et n donnés.

Compte tenu des moyens de calcul mis à notre disposition, nous avons dû limiter nos calculs aux seuls cas où $n = 4, 5$ et 6 , pour m prenant toutes valeurs impaires de 3 à 25.

Dans la Table I (voir *infra*) est présentée la fréquence des effets Condorcet, tous types confondus, pour m et n donnés.

1. Le programme a été écrit en Fortran et le calcul réalisé sur machine IBM 370. Le programme et les résultats complets sont disponibles auprès des auteurs.

2. Le sous-programme générateur de ces nombres aléatoires a été construit à partir de la méthode de congruence multiplicative de Lehmer.

Afin de contrôler le caractère aléatoire du processus, un test relatif à la distribution du nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir un effet Condorcet peut être construit. Une telle distribution doit suivre, approximativement, une Loi Géométrique dont le paramètre est justement la fréquence des effets Condorcet. Le test a été fait à partir de la valeur estimée de cette fréquence. Sur les 36 distributions obtenues, l'hypothèse de la Loi Géométrique ne peut être retenue que dans 18 cas seulement (au seuil 5 %). Les cas de rejet de l'hypothèse sont marqués d'un * dans la Table I. Ce test n'a pas été mis en œuvre pour chaque type d'effets.

De tels résultats conduisent à s'interroger sur le degré de confiance qu'il faut accorder à une telle méthode, qui repose tout de même sur une simulation scientifique du hasard. Déjà C. Campbell et G. Tullock¹, travaillant sur des échantillons de taille inférieure à celle des nôtres, et bien que n'ayant apparemment pas utilisé le test de la loi géométrique s'interrogent sur quelques résultats (baisse importante de la fréquence pour $m = 13$ et $m = 29$).

Il faut simplement conclure au caractère non purement aléatoire du tirage des échantillons. L'intervalle de confiance qu'un processus purement aléatoire autorise à un seuil donné pour une estimation² est manifestement dépassé trop de fois — un seul coup d'œil sur les tables de résultats peut le mettre en évidence.

A défaut d'intervalle de confiance et puisqu'on ne peut pas mettre en jeu les résultats stricts de la théorie statistique de l'estimation, il faudra se contenter de ne considérer que « l'ordre de grandeur » lors de l'analyse des chiffres obtenus.

8. COMMENTAIRE DES RÉSULTATS

L'ensemble des résultats a été synthétisé en 3 tables. La première donne la fréquence des effets Condorcet (tous types confondus), la seconde des effets de type II, la troisième celle des effets Condorcet au sens strict.

8.1. La précision des résultats

La Table II est sans doute la plus significative à cet égard car elle comporte outre un certain nombre de valeurs exactes le rappel des valeurs obtenues par Campbell et Tullock ainsi que les valeurs limites de la fréquence pour m tendant vers l'infini.

On peut admettre sans difficulté que l'ordre de grandeur des résultats est correct bien qu'il ne soit pas possible de chiffrer ce degré de confiance. L'ordre de grandeur est en effet compatible, pour n donné, avec les valeurs-limite de la fréquence. Toujours pour n donné, la croissance de la fréquence en fonction de m est manifeste pour les premières valeurs, beaucoup moins nette pour les autres ; mais comme d'une part, la fréquence tend rapidement vers la valeur-limite et que d'autre part les résultats sont peu précis, on ne peut guère s'attendre à autre chose. Enfin, pour m donné, la croissance de la fréquence en fonction de n est très nette.

1. {6} p. 856.

2. Pour un échantillon de taille donnée = 10 000, la fréquence devrait être approchée à $\pm 0,01$ avec au moins 95 chances sur 100.

La conformité des chiffres que nous avons obtenus pour les effets de type II avec les résultats déjà établis à leur propos est bien le minimum nécessaire pour que l'on puisse accorder quelque crédit à l'ensemble et à chacun de nos résultats.

8.2. Fréquence des effets Condorcet

Les résultats sont exposés dans la Table I. On remarque la sensibilité de la variation de ces fréquences aux variations de n . Pour $n = 6$, la fréquence est déjà de l'ordre de 0,5 pour $m = 3$ et tend vers 0,67 environ comme valeur-limite. Comme la fréquence des effets de type II constitue un minorant (il faut lui ajouter celle des effets de type I pour obtenir la fréquence globale des effets) on peut penser que très vite, aux alentours de $n = 15$ sans doute, cette fréquence excède 0,99 (pour tout m).

8.3. Variations de la fréquence des p -classes d'effets

Pour $m = 3$, le tableau suivant peut être dressé des valeurs des fréquences pour chacune des p -classes, jusqu'à $n = 6$.

TABLEAU III

n	$m = 3$: fréquence des p -classes d'effets				Fréquence des effets	Fréquence des résultats transitifs
	p	1	2	3		
3		0,0556			0,0556	0,9444
4		0,0521	0,1181		0,1701	0,8299
5		0,0517	0,1108	0,1618	0,3243	0,6757
6		0,0521*	0,1134*	0,1439*	0,4896*	0,5104*

(*) Valeur estimée.

On peut remarquer, au fur et à mesure que n augmente, la décroissance des fréquences des p -classes contenues dans le tableau, tendance que ne saurait infirmer, compte tenu de la précision de la simulation, les valeurs estimées pour $n = 6$.

Ce résultat est d'importance quant à ses conséquences, s'il est possible de le généraliser dans trois sens, pour n croissant d'abord, pour toutes les p -classes ensuite et enfin pour toute valeur de m .

Appelons $F(m, n, p)$ la fréquence d'apparition d'une p -classe à l'ordre n , pour m votants.

1) Sens de variation de $F(m, n, p)$ pour p et n donnés. Une seule de ces séries est complètement déterminée, $F(m, 3; 1)$ qui croît de façon monotone avec m et a pour limite le nombre de Guilbaud. Cette croissance monotone avec m est également perceptible dans le détail (non publié) de nos résultats pour chaque type d'effets et pour chaque p -classe.

Ce résultat apparaît donc pouvoir être généralisé sans encombre de la façon suivante :

$$\text{Hypothèse I : } \forall m, n, p \quad F(m+1, n, p) - F(m, n, p) > 0$$

$$\text{Hypothèse I bis : } \forall n, p \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F(m, n, p) = I_{n, p}$$

2) Sens de variation de $F(m, n, p)$ pour p et m donnés. Dans le cas où $m = 3$ et pour $p = 1$ et 2 tout au moins, les toutes premières valeurs calculées de F sont décroissantes pour n croissant. Ce résultat autorise à extrapoler et à se demander s'il en est de même lorsque n croît indéfiniment. Une telle conclusion n'est recevable que sous l'hypothèse de variation monotone des fréquences en fonction de n , hypothèse que, seuls, nos calculs pourraient permettre d'avancer, car il n'est plus possible de se reporter à la monotonie (croissante d'ailleurs) des effets de type II mise en évidence lors des travaux antérieurs. A l'appui de cette hypothèse on peut ajouter ceci : dans le cas de l'hypothèse contraire, il faudrait pouvoir expliquer *a priori* les raisons du changement de signe de la variation de cette fréquence.

Si l'on retient cette hypothèse, sur la valeur de laquelle, en l'absence de calculs poussés, règne une incertitude, deux autres, beaucoup moins fortes peuvent lui être adjointes.

Si cette hypothèse est recevable, elle l'est pour tout p et pour tout m donnés. La généralisation de l'hypothèse de décroissance monotone de F à chacune des p -classes ne pose pas de problème particulier. Son extension à toute valeur de m garantit que pour n croissant F reste toujours décroissant pour des valeurs de plus en plus grandes de n .

Tout ceci peut se résumer dans l'hypothèse suivante :

$$\text{Hypothèse II : } \forall m, n, p \quad F(m, n+1, p) - F(m, n, p) < 0$$

Sous ces hypothèses, on obtient alors le résultat suivant :

$$\forall m, p \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(m, n, p) \leq F(\infty, p+2, p) = I_{p+2, p}$$

où $n = p + 2$ est l'ordre auquel une p -classe commence à apparaître.

En particulier, pour $p = 1$, $\forall m \quad F(m, \infty, 1) \leq F(\infty, 3, 1) = 0,0877$.

Pour la 1-classe, un tel résultat est important. Il signifie que, si les hypothèses sont vraies, le nombre de Guilbaud constitue une borne supérieure pour la fréquence de la 1-classe d'effets, c'est-à-dire des tournois irréductibles, des effets au sens strict.

Les valeurs de $F(m, n, 1)$ estimées par simulation permettent-elles de confirmer ces hypothèses ?

3) Variation de $F(m, n, 1)$ en fonction de m et n . Les valeurs calculées et estimées sont exposées dans la Table III. Les valeurs estimées pour $n = 3$ obtenues par Campbell et Tullock y figurent également pour permettre la comparaison.

Compte tenu de l'imprécision des résultats, mise en évidence pour la fréquence des effets (tous types confondus), il reste hors de question d'appliquer les tests statistiques habituels. On atteint même ici les limites de l'application des méthodes de Monte-Carlo à l'estimation de fréquences. Les différences entre fréquences devenant petites, il faut donc pouvoir réduire l'étendue de l'intervalle

de confiance. En prenant par exemple un écart de fréquence de 0,001 pour une fréquence avoisinant 0,0877 et pour un degré de confiance de 95 %, la taille de l'échantillon exigée pour une telle précision dépasse largement 1 000 000. Encore faudrait-il être parfaitement assuré du caractère purement aléatoire du tirage, ce qui semble difficile à obtenir. De plus, la précision exigée pour vérifier les hypothèses posées est bien plus forte que celle prise à titre d'exemple.

Réduit au pragmatisme, on peut toutefois établir quelques points de comparaison.

A première vue, les valeurs estimées de $F(m,n,1)$ pour les valeurs de m et n calculées, se situent dans la zone de 6 à 10 %.

L'hypothèse I, vraie pour $n = 3$ peut également être acceptée pour $n = 4, 5$ et 6 . Elle est vérifiée 21 fois sur 33 pour notre simulation ; pour $n = 3$ Campbell et Tullock l'avait vérifiée 9 fois sur 13, soit dans des proportions sensiblement équivalentes. L'existence d'une limite ≤ 1 (hypothèse I bis) est de toute façon indubitable puisque la limite de la fréquence des effets de type II constituent une borne supérieure.

Quant à l'hypothèse II elle n'est vérifiée que 8 fois sur 24 pour notre simulation (5 fois sur 12 quand on passe de $n = 4$ à $n = 5$; 3 fois sur 12 quand on passe de $n = 5$ à $n = 6$). Si on prend en compte les résultats de Campbell et Tullock elle est vraie 8 fois sur 12 en passant de $n = 3$ à $n = 4$. A l'appui de l'hypothèse, ces résultats ne sont pas probants ; ils ne le sont pas non plus à l'encontre de cette hypothèse.

De plus, si elle veut tester la conclusion tirée de ces hypothèses — le nombre de Guilbaud est une borne de $F(m,n,1)$ — cette conclusion n'est vérifiée que 15 fois sur 36 pour nos résultats (dont 9 fois sur 12 pour $n = 4$) contre 8 fois sur 14 pour Campbell et Tullock.

Faut-il donc rejeter l'hypothèse II ou l'accepter sans tenir compte de tous les résultats ? On sait la précision des résultats sujette à caution. En outre, on peut voir que le processus générateur des résultats de Campbell et Tullock a induit 11 fois sur 14 des valeurs supérieures aux valeurs réelles. Ce point laisse croire en la possibilité de l'existence d'un biais systématique tendant à majorer les fréquences. Cette supposition qui exige la difficile et coûteuse vérification du caractère aléatoire du processus du tirage des ordres peut très bien être étendue à notre méthode de simulation et le test de la loi géométrique est inapte, par construction, à révéler un biais systématique. La cause de ce biais peut résider dans le choix du nombre origine dans le sous-programme générateur de nombres aléatoires, nombre dont la périodicité serait trop courte.

Le programme a été principalement exécuté en 2 passages, le premier consacré à $n = 4$ et aux 3 premières valeurs ($m = 3, 5$ et 7) de $n = 5$ et 6 , le second aux autres valeurs de $n = 5$ et 6 . Or, c'est justement pour les résultats correspondant au second passage que l'hypothèse II est la plus contestable, ceux obtenus au premier passage pouvant être retenus à l'appui de l'hypothèse II.

En résumé, l'imprécision des valeurs estimées des fréquences nous paraît telle, qu'elle laisse intacte la possibilité qu'a l'hypothèse II d'être vraie.

On peut enfin faire état d'une hypothèse III, contenant l'hypothèse II et donc plus forte qu'elle.

$$\text{Hypothèse III : } \lim_{n \rightarrow \infty} F(\infty, n, p) = 0, \forall p.$$

Ce qui revient à dire, compte tenu de l'hypothèse I, que la limite pour n croissant de la fréquence de chaque p -classe est 0. La vérification d'une telle hypothèse est une condition suffisante pour l'hypothèse II.

9. CONCLUSION

La raison de ce travail est d'attirer l'attention sur un objectif quelque peu délaissé. L'approche en termes politiques qui, jusqu'à présent a dominé les recherches et les calculs apparaît par trop limitative. La distinction entre effets de type I et II, quoique importante, est sommaire dans le domaine des choix collectifs, domaine non limité aux systèmes électoraux ni même au choix d'un seul élément parmi n . La détermination de priorités entre différents projets, tant au niveau d'une firme qu'à celui d'une collectivité publique quelconque autorise, par exemple, l'utilisation d'une procédure de choix de type Condorcet, s'il convient de faire dépendre cette détermination de préférences individuelles. Une telle procédure permet en effet de conférer différents degrés de priorité à des classes d'objets, sauf dans le cas d'effets Condorcet au sens strict où tous les objets ont la même priorité.

C'est pour cela que la distinction des effets en p -classes nous est apparue importante, et que la mise en évidence (sous l'hypothèse II, qui reste à vérifier¹) d'une limite de la fréquence de la 1-classe d'effets est fondamentale. Cette limite rend compte de la fréquence des cas où un marchandage « à l'ordre n » doit suivre la mise en œuvre de la procédure. La structure du graphe de tournoi peut servir de base à ce marchandage dont le but est alors d'inverser le sens de certains arcs.

L'importance d'une telle perspective a d'ailleurs été perçue, quoique exprimée de façon négative, par Niemi et Weisberg qui écrivent : « A type I intransitivity is of little inherence to the political scientist, although it may be of some interest to economists »².

Il reste alors à se livrer à un véritable « calcul social » qui lui ne peut se contenter de la seule hypothèse d'équiprobabilité d'occurrence de chaque ordre, hypothèse dite de « culture neutre » mais qui recouvre plutôt une absence de culture, toute collectivité de décideurs étant définissable par l'existence *a priori* de certaines préférences.

1. Pour une critique des hypothèses fondée sur les valeurs estimées de la fréquence de tous les types d'effets jusqu'à $n = 9$, se reporter à : Mimiague F., « Estimation de la fréquence de différents types d'effet Condorcet », *Revue économique du Sud-Ouest*, n° 4, 1973.

2. *Op. cit.*, p. 320.

TABLE I. - Fréquence des effets Condorcet

$$\sum_{p=1}^{n-2} F(m,n,p)$$

<i>m</i>	<i>n</i>	3		4		5		6	
		A	C	A	C	A	C	A	C
	3	0,0556		0,1701	0,1685	0,3243	0,2919*		0,4896
	5	0,0694		0,2106	0,2009		0,3788*		0,5860
	7	0,0750			0,2314		0,4044*		0,6079
	9	0,0780			0,2377*		0,4433*		0,6215
	11	0,0798			0,2485*		0,4373		0,6373
	13	0,0811			0,2501*		0,4540		0,6420
	15	0,0820			0,2343*		0,4420*		0,6059*
	17	0,0827			0,2618*		0,4586		0,6556*
	19	0,0832			0,2804*		0,4669		0,6613
	21	0,0836			0,2755*		0,4656		0,6525
	23	0,0840			0,2688*		0,4642		0,6574
	25	0,0843			0,2413*		0,4778*		0,6382*
								
	∞	0,0877							

n : nombre d'éléments soumis à la décision.

m : taille du groupe.

Colonnes A : Valeurs vraies.

C : Valeurs estimées lors de notre simulation.

(*) : test du caractère aléatoire de la longueur de la séquence nécessaire à l'apparition des effets Condorcet, non concluant.

TABLE II. - Fréquence des effets Condorcet de type II

<i>m</i>	<i>n</i>	3			4			5			6		
		A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
3		0,0556	0,057		0,1111	0,107	0,1117	0,1600	0,154	0,1309	0,2022	0,201	0,2012
5		0,0694	0,078		0,1389	0,146	0,1297	0,1995	0,183	0,1817		0,255	0,2604
7		0,0750	0,084		0,1500	0,159	0,1550	0,2153	0,215	0,1834		0,258	0,2608
9		0,0780	0,089		0,1560	0,156	0,1617		0,230	0,2212		0,284	0,2878
11		0,0798	0,085		0,1596	0,151	0,1552		0,251	0,2341		0,294	0,2840
13		0,0811	0,073			0,147	0,1537		0,224	0,2398		0,281	0,2743
15		0,0820	0,074			0,155	0,1553		0,253	0,2349		0,298	0,2632
17		0,0827	0,084			0,173	0,1681		0,237	0,2340			0,2960
19		0,0832	0,080			0,169	0,1721		0,239	0,2363			0,2945
21		0,0836	0,089			0,172	0,1606		0,248	0,2360			0,3041
23		0,0840	0,091			0,164	0,1504		0,254	0,2428			0,3067
25		0,0843	0,097			0,180	0,1667		0,243	0,2609			0,2776
27		0,0846	0,111			0,186			0,240				
29		0,0848	0,111			0,174			0,210				
....													
∞		0,0877			0,1755			0,2513			0,3152		

n : nombre d'éléments soumis à la décision.

m : taille du groupe.

Colonnes A - Valeurs vraies.

B - Valeurs estimées par Campbell et Tullock.

C - Valeurs estimées lors de notre simulation.

TABLE III. - Fréquence des effets Condorcet au sens strict

$$F(m,n,1)$$

m	n	3		4		5		6	
		A	B	A	C	A	C	A	C
3		0,0556	0,057	0,0521	0,0539	0,0517	0,0494		0,0521
5		0,0694	0,078	0,0672	0,0618		0,0711		0,0746
7		0,0750	0,084		0,0740		0,0687		0,0792
9		0,0780	0,089		0,0782		0,0933		0,0949
11		0,0798	0,085		0,0830		0,0894		0,0920
13		0,0811	0,073		0,0600		0,0986		0,0927
15		0,0820	0,074		0,0817		0,0984		0,0939
17		0,0827	0,084		0,1040		0,0928		0,0948
19		0,0832	0,080		0,1104		0,0968		0,0969
21		0,0836	0,089		0,0992		0,0915		0,1004
23		0,0840	0,091		0,0873		0,0937		0,1004
25		0,0843	0,097		0,0868		0,1144		0,0949
27		0,0846	0,111						
29		0,0848	0,111						
....									
∞		0,0877							

n : nombre d'éléments soumis à la décision.

m : taille du groupe.

Colonnes A - Valeurs vraies.

B - Valeurs estimées par Campbell et Tullock.

C - Valeurs estimées lors de notre simulation.

ANNEXE

Établissement de la formule permettant d'obtenir le nombre $K(n)$ de types de partages résultant de l'application d'une procédure de Condorcet à n objets.

Appelons :

1) $P^1(n)$, le nombre de partages tels que la partie classée en tête soit de cardinal 1. Il s'agit à l'évidence de ce que la terminologie classique appelle nombre de résultats avec vainqueur.

2) $P^2(n)$, le nombre des partages dont la partie classée en tête n'est pas de cardinal 1 mais qui comportent par ailleurs au moins une partie n'ayant qu'un seul élément.

3) $P^3(n)$, le nombre de partages tels qu'aucune de leurs parties ait un cardinal de 1.

$$\text{Il s'ensuit que } K(n) = P^1(n) + P^2(n) + P^3(n) \quad (1)$$

Calcul de $P^1(n)$

$$\text{De par sa définition } P^1(n) = K(n-1) \quad (2)$$

Calcul de $P^2(n)$

$$\text{On peut poser : } P^2(n) = \sum_{k=3}^{n-3} [P^1(n-k) + P^2(n-k)]$$

$$\begin{aligned} \text{soit encore : } P^2(n+1) &= \sum_{k=3}^{n+1-3} [P^1(n+1-k) + P^2(n+1-k)] \\ &= \sum_{k=2}^{n-3} [P^1(n-k) + P^2(n-k)] \\ &= P^2(n) + P^1(n-2) + P^2(n-2) \end{aligned}$$

Soit, en revenant à l'ordre n :

$$P^2(n) = P^2(n-1) + P^1(n-3) + P^2(n-3) \quad (3)$$

Calcul de $P^3(n)$

$$\text{On peut poser : } P^3(n) = \sum_{k=3}^{n-3} P^3(n-k)$$

$$\text{soit encore : } P^3(n+1) = \sum_{k=3}^{n+1-3} P^3(n+1-k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{n-3} P^3(n-k) \\
&= P^3(n) + P^3(n-2)
\end{aligned}$$

soit, en revenant à l'ordre n :

$$P^3(n) = P^3(n-1) + P^3(n-3) \quad (4)$$

Calcul de $P^2(n) + P^3(n)$

$P^2(n) + P^3(n) = P^2(n-1) + P^3(n-1) + P^1(n-3) + P^2(n-3) + P^3(n-3)$, en vertu de (3) et (4).

Compte tenu de (1), on obtient :

$$P^2(n) + P^3(n) = P^2(n-1) + P^3(n-1) + K(n-3) \quad (5)$$

En exprimant (5) à l'ordre $(n-1)$, on obtient :

$$P^2(n-1) + P^3(n-1) = P^2(n-2) + P^3(n-2) + K(n-4)$$

Soit, compte tenu de (1)

$$P^2(n-1) + P^3(n-1) = K(n-2) - P^1(n-2) + K(n-4)$$

et par application de (2)

$$P^2(n-1) + P^3(n-1) = K(n-2) - K(n-3) + K(n-4) \quad (6)$$

En revenant à (5) on obtient alors :

$$P^2(n) + P^3(n) = K(n-2) + K(n-4) \quad (7)$$

Établissement de la formule de $K(n)$

De (1), (2) et (7) on tire :

$$K(n) = K(n-1) + K(n-2) + K(n-4)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Marquis de CONDORCET, *Essais sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.
- [2] BLACK, D., « On the rationale of group decision-making », *Journal of political economy*, vol. 56, n° 1, feb. 1948, pp. 23-34.
Voir aussi, *The theory of committees and elections*, Cambridge, Cambridge University Press, 1958.

- [3] ARROW, K. J., *The possibility of a universal social welfare function*, Project Rand Lad (L) 289, Santa Monica, Calif., Lectographed, October 26, 1948.
- Voir aussi *Social choice and individual values*, New York, John Wiley, 1951 (2^e éd., 1963).
- [4] GUILBAUD, G. Th., « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie Appliquée*, 15, 1952.
- Repris dans : *Eléments de la théorie mathématique des Jeux*, Paris, Dunod, 1968.
- [5] RIKER, W. H., « Voting and the summation of preferences : An interpretative bibliographical review of selected developments during the last decade », *American political science review*, vol. 55, n^o 4, December 1961, pp. 900-911.
- [6] CAMPBELL, C. D. et TULLOCK, G., « A measure of the importance of cyclical majorities », *The economic journal*, 75, 1965, pp. 853-856.
- Voir aussi : « The paradox of voting — A possible method of calculation », *American political science review*, 60, 1966, pp. 684-685.
- [7] KLAHR, D., « A computer simulation of the paradox of voting », *The American political Science review*, 60, 1966, pp. 364-390.
- [8] GARMAN M. et KAMIEN, M. I., « The paradox of voting : Probability calculations », *Behavioral science*, 13, 1968, pp. 306-316.
- [9] NIEMI, R. G. et WEISBERG, H. F., « A mathematical solution for the probability of the paradox of voting », *Behavioral Science*, 13, 1968, pp. 317-323.
- [10] DEMEYER, F. et PLOTT, C. R., « The probability of a cyclical majority », *Econometrica*, 32, n^o 2, pp. 345-354.
- [11] BERTIER, P., « Partages, parties, partitions — Décomptes et représentations », *Metra*, vol. 6, n^o 1, 1967, pp. 103-129.
- [12] MONJARDET, B., *Tournois*, Multigraphie 14, juillet 1972.