MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Préférences stochastiques

Mathématiques et sciences humaines, tome 32 (1970), p. 45-56
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__32__45_0>

M.S.H. (8e année, n° 32, 1970, p. 45-56)

PRÉFÉRENCES STOCHASTIQUES

par

G. Th. GUILBAUD *

I. SUR UN THÉORÈME DU MOIS DE MAI 1952

1. 1. Une personne (ou un groupe) doit faire un choix ; schématisons la situation, en la présentant comme de coutume :

un sujet en présence de plusieurs objets A, B, C, D, ... ; on peut observer :

— soit des « préférences » ou « comparaisons par paires » conduisant à des jugements tels que : $C < A$ (c'est-à-dire : je place C avant A) ;

— soit un classement ou ordre total :

$$C < D < B < A < \dots$$

Si l'on veut probabiliser des tels comportements, on peut donc :

— soit affecter des probabilités aux ordres totaux possibles ;

— soit affecter des probabilités aux jugements de préférences par paires.

Déduire le second du premier est facile ; la question est un peu plus délicate quand on veut remonter du second au premier.

Voici le résultat fondamental qui est très simple.

1. 2. *Théorème*

Pour qu'une probabilisation des préférences (binaires) soit compatible avec une probabilisation des ordres totaux, il faut et suffit que :

$$\text{prob } (A < B) + \text{prob } (B < C) \geqslant \text{prob } (A < C)$$

quels que soient les trois objets : A, B et C (inégalité triangulaire).

1. 3 *Autre forme du même théorème*

Cette condition peut être énoncée sous une forme plus symétrique (et plus aisée à généraliser) :

$$1 \leqslant \text{prob } (A < B) + \text{prob } (B < C) + \text{prob } (C < A) \leqslant 2$$

(somme des probabilités pour un circuit fermé).

---

* Centre de Mathématique Sociale, EPHE, VIe Section.

1. 4. Ce théorème a été énoncé dans une communication : « Sur une difficulté de la théorie du risque » au colloque d'économétrie du C.N.R.S. en mai 1952 (C.N.R.S., Paris, 1953, *Colloques internationaux*, nº 40, p. 25). Le même théorème est cité sous sa forme restreinte (limitée à trois objets) par J. Marschak, dans un article (« Binary choice constraints » in Arrow, Karlin and Suppes (eds.), *Mathematical methods in the social sciences*, Stanford University Press, 1959, pp. 317-318) où l'auteur ne semble pas certain de l'énoncé général (pour un nombre quelconque d'objets) qu'il qualifie de « conjecture ». La question est reprise par F. Bresson, « Les décisions », chap. 29, P. Fraisse et J. Piaget (eds.), *Traité de psychologie expérimentale*, Paris, Presses Universitaires de France, 1965, t. 8, p. 231).

1. 5. Bien que la question ne soit pas difficile, et que plusieurs auteurs aient sans doute été amenés à refaire les mêmes calculs dans des contextes différents, il a paru utile de donner ici quelques détails sur les démonstrations. On n'oubliera pas que le formalisme mathématique reste le même si l'on remplace la mesure en probabilité par un pourcentage des individus qui, dans un groupe, adoptent telle ou telle opinion. C'est dire que le modèle fait partie de l'analyse, désormais classique, de l'effet Condorcet[1].

II. LE CAS DU CHOIX ENTRE TROIS OBJETS

Soit un sujet à qui on propose trois objets : A, B et C. (On dira *trois* pour traiter d'abord le cas le plus simple, après quoi on pourra généraliser.)

2. 1. *Les possibilités*

1) Les six attitudes possibles ;

$(1) : A < B < C$
$(2) : A < C < B$
$(3) : C < A < B$
$(4) : C < B < A$
$(5) : B < C < A$
$(6) : B < A < C$

2) les six jugements de préférence (ou comparaisons par paires) :

$(a) : B < C$	$(a') : C < B$
$(b) : C < A$	$(b') : A < C$
$(c) : A < B$	$(c') : B < A$

La logique de la situation (en forme booléenne) :

$(a) =$ (5) ou (6) ou (1)	$(1) = (a)$ et (b') et (c)
$(b) =$ (3) ou (4) ou (5)	$(3) = (a')$ et (b) et (c)
etc.	

On a aussi :

(a) et $(a') =$ impossible, etc.

La transitivité s'exprime ainsi :

(a et b et c) ou (a' et b' et c') = impossible.

1. Voir en particulier :
— G. Th. Guilbaud, *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Dunod, 1968, pp. 51-57.
— G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl, « Analyse algébrique d'un scrutin», dans *Ordres totaux finis*, Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence, juillet 1967, Paris, Mouton, 1971, ch. 3, pp. 71-100.

2. 2. *Les probabilités*

Si l'on veut probabiliser, il faut respecter les conditions :

$$\begin{aligned}
&prob\,(1) + prob\,(2) + prob\,(3) + \ldots + prob\,(6) = 1\\
&prob\,(a) + prob\,(a') = 1\\
&prob\,(b) + prob\,(b') = 1\\
&prob\,(c) + prob\,(c') = 1\\
&\qquad prob\,(a) = prob\,(1) + prob\,(6) + prob\,(5)\\
&\qquad prob\,(b) = prob\,(3) + prob\,(4) + prob\,(5)\\
&\qquad prob\,(c) = prob\,(1) + prob\,(2) + prob\,(3)
\end{aligned}$$

sans oublier :

$$0 \leqslant prob \leqslant 1$$

2. 3. *Les attitudes*

Si l'on donne les six probabilités d'attitude : $prob\,(1)$, $prob\,(2)$, ..., $prob\,(6)$, on calcule sans peine $prob\,(a)$, $prob\,(b)$, ..., c'est-à-dire les probabilités des préférences et on vérifie :

$$\begin{aligned}
prob\,(a) + prob\,(b) + prob\,(c) &= 1 + prob\,(1) + prob\,(3) + prob\,(5)\\
prob\,(a') + prob\,(b') + prob\,(c') &= 1 + prob\,(2) + prob\,(4) + prob\,(6)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
prob\,(a) + prob\,(b) + prob\,(c) &\geqslant 1\\
prob\,(a') + prob\,(b') + prob\,(c') &\geqslant 1
\end{aligned}$$

Mais comme : $p\,(a) + p\,(a') = 1$, etc., on peut écrire cela autrement ; par exemple :

$$prob\,(a) + prob\,(b) \geqslant prob\,(c')$$

c'est-à-dire :

$$prob\,(A < B) + prob\,(B < C) \geqslant prob\,(A < C).$$

C'est l'inégalité triangulaire.

Voici encore une autre forme :

$$\boxed{1 \leqslant prob\,(A < B) + prob\,(B < C) + prob\,(C < A) \leqslant 2}$$

2. 4. *Les préférences*

Inversement, supposons qu'on se donne d'abord :

$$prob\,(A < B), \qquad prob\,(B < C) \qquad \text{et} \qquad prob\,(C < A).$$

On en déduit immédiatement les trois complémentaires :

$$prob\,(B < A), \qquad prob\,(C < B) \qquad \text{et} \qquad prob\,(A < C).$$

Peut-on maintenant en déduire les probabilités des six attitudes ? On doit avoir :

$$prob\,(A < B < C) + prob\,(B < A < C) + prob\,(B < C < A) = prob\,(B < C)$$

et les cinq autres équations analogues.

Pour résoudre commodément, on posera :

$$\begin{array}{ll} prob\,(B < C) = 1/2 + f & prob\,(C < B) = 1/2 - f \\ prob\,(C < A) = 1/2 + g & prob\,(A < C) = 1/2 - g \\ prob\,(A < B) = 1/2 + h & prob\,(B < A) = 1/2 - h \end{array}$$

On remarquera que la valeur particulière $f = 0$ signifie en quelque sorte l'indifférence. On peut dire que les trois nombres f, g et h (compris entre $-1/2$ et $1/2$) mesurent l'écart à l'indifférence ou, si l'on veut, la force de la préférence.

Il vient alors comme conséquences immédiates des relations écrites ci-dessus :

$$\begin{array}{l} prob\,(A < B < C) - prob\,(C < B < A) = f + h \\ prob\,(B < C < A) - prob\,(A < C < B) = f + g \\ prob\,(C < A < B) - prob\,(B < A < C) = g + h \end{array}$$

Mais c'est insuffisant pour calculer les six probabilités qu'on veut : il faut ajouter quelques informations supplémentaires ; ce sera assez naturellement les sommes puisqu'on connait déjà les différences.

Introduisons donc les expressions :

$$prob\,(A < B < C) + prob\,(C < B < A)$$

et les deux analogues.

Elles ont d'ailleurs un sens fort clair : probabilité pour que B soit entre les deux autres, ce qu'on écrira en abrégé :

$$prob\,(< B <) = prob\,(A < B < C) + prob\,(C < B < A).$$

Avec ces notations, on a facilement :

$$\begin{array}{l} prob\,(A < B < C) = 1/2\,[\ \ f + h + prob\,(< B <)] \\ prob\,(C < B < A) = 1/2\,[- f - h + prob\,(< B <)] \\ prob\,(B < C < A) = 1/2\,[\ \ f + g + prob\,(< C <)] \\ prob\,(A < C < B) = 1/2\,[- f - g + prob\,(< C <)] \\ prob\,(C < A < B) = 1/2\,[\ \ g + h + prob\,(< A <)] \\ prob\,(B < A < C) = 1/2\,[- g - h + prob\,(< A <)]\,. \end{array}$$

Ces formules donneront la solution du problème posé, à condition que les six nombres ainsi calculés soient tous positifs et que leur somme soit égale à l'unité.

Pour que la somme soit égale à l'unité, il faut que l'on ait :

$$prob\,(< A <) + prob\,(< B <) + prob\,(< C <) = 1.$$

Pour obtenir des résultats positifs, il faut que :

$$f + h \leqslant prob\,(< B <) \qquad \text{et} \qquad -f - h \leqslant prob\,(< B <)$$

et les analogues.

Supposons qu'on ait donné les trois nombres : f, g et h ; il reste à choisir les trois nombres :

$$prob\,(< A <), \qquad prob\,(< B <) \qquad \text{et} \qquad prob\,(< C <)$$

de façon à satisfaire toutes les conditions qu'on vient de dire. Mais pour qu'un tel choix soit possible, il faut que les sommes :

$$\begin{array}{l}
(f + h) + \quad (f + g) + \quad (g + h) \\
(-f - h) + \quad (f + g) + \quad (g + h) \\
(-f - h) + (-f - g) + \quad (g + h) \\
(-f - h) + \quad (f + g) + (-g - h) \\
\text{etc.}
\end{array}$$

soient toutes inférieures à l'unité.

Finalement les seules conditions à retenir sont :

1)
$$\begin{aligned}
-1/2 &\leqslant f \leqslant 1/2 \\
-1/2 &\leqslant g \leqslant 1/2 \\
-1/2 &\leqslant h \leqslant 1/2
\end{aligned}$$

2)
$$-1/2 \leqslant f + g + h \leqslant 1/2.$$

2. 5. En revenant aux notations initiales, les conditions s'écrivent :

$$\begin{gathered}
0 \leqslant prob\,(A < B) \leqslant 1 \\
0 \leqslant prob\,(B < C) \leqslant 1 \\
0 \leqslant prob\,(C < A) \leqslant 1 \\
1 \leqslant prob\,(A < B) + prob\,(B < C) + prob\,(C < A) \leqslant 2. \qquad (1)
\end{gathered}$$

On aura noté deux faits importants :

1) Les probabilités des préférences par paires ne peuvent être quelconques, elles sont soumises à la condition (1) ;

2) Quand les probabilités de préférences par paires vérifient la condition (1), les possibilités des ordres totaux ne sont pas pour autant déterminées.

A titre d'exemple, on peut avoir :

$$prob\,(A < B) = prob\,(B < A) = prob\,(B < C) = \text{etc.} = 1/2.$$

c'est-à-dire l'indifférence en ce qui concerne les paires. Mais il n'en résulte pas qu'il y ait indifférence en ce qui concerne les six ordres possibles ; on a seulement :

$$\begin{aligned}
prob\,(A < B < C) &= prob\,(C < B < A) \\
prob\,(B < A < C) &= prob\,(C < A < B) \\
prob\,(A < C < B) &= prob\,(B < C < A)
\end{aligned}$$

et l'on peut encore choisir comme on voudra ces six nombres, pourvu qu'ils soient positifs, deux à deux égaux et de somme unité.

III. LE THÉORÈME GÉNÉRAL.

3. 1. *Les jugements de préférence* tels que :

« A est avant B »

(ce qu'on note : $A < B$), concernent les couples (A, B) pour lesquels A et B sont distincts.

Nous devons donc ici considérer, pour un ensemble fini donné :

$$\mathbf{E} = \{ A, B, C, D, \dots \}$$

non pas le carré cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$, mais ce même carré amputé de la diagonale.

Probabiliser les jugements de préférence, c'est attribuer à tout couple d'éléments distincts, soit (A, B), un nombre réel :

$$prob\ (A < B)$$

compris entre zéro et un. Mais cette application ne peut être quelconque :

1) Nous exigerons évidemment :

$$prob\ (A < B) + prob\ (B < A) = 1 \tag{1}$$

quels que soient les éléments distincts A et B.

Remarque

Si l'on posait :

$$prob\ (A < B) = \frac{1 + f(A, B)}{2}$$

la fonction f représentant ce qu'on pourrait appeler l'écart à l'indifférence [1], la condition précédente s'écrirait :

$$f(A, B) = -f(B, A).$$

2) D'après ce qui a été vu ci-dessus (voir 2.5), il est convenable d'imposer en outre, la condition :

$$1 \leqslant prob\ (A < B) + prob\ (B < C) + prob\ (C < A) \leqslant 2. \tag{2}$$

1. On pourrait alors poser aussi : $f(A, A) = 0$, ce qui reviendrait à donner la probabilité 1/2 au jugement qui compare A à lui-même.

Si l'on définit la fonction *prob* $(A < B)$ par le moyen de $f(A, B)$:

$$-1 \leqslant f(A, B) + f(B, C) + f(C, A) \leqslant 1.$$

3) Les deux conditions qu'on vient de dire ont un air de ressemblance ; on fait la somme des valeurs de la fonction *prob* au long d'un circuit fermé :

A, B et B, A pour : (1)

A, B et B, C et C, A pour : (2)

On peut alors généraliser, pour un circuit de longueur n.

La condition s'écrit tout naturellement :

$$\boxed{1 \leqslant \text{Somme des } prob \leqslant n - 1}$$

(ce qui donne bien les conditions (1) et (2) respectivement quand on fait $n = 2$ et $n = 3$).

Remarque

Si l'on utilise la fonction f au lieu de *prob*, on trouve que la somme des valeurs de f, le long d'un circuit, doit rester comprise entre $2 - n$, et $n - 2$.

3. 2. On va se proposer d'étudier l'ensemble de toutes les probabilisations possibles pour un ensemble fini E donné, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions *prob* qui appliquent dans le segment réel (0,1), le carré $E \times E$ sauf la diagonale, et qui satisfont aux conditions susdites, à savoir :

— Pour tout circuit fermé passant par n éléments de E, la somme des valeurs de la fonction *prob* est comprise entre 1 et $n - 1$.

On notera que ces conditions ne sont pas indépendantes. Si l'on a :

$$\begin{aligned} prob\,(A < B) + prob\,(B < A) &= 1 \\ prob\,(A < C) + prob\,(C < A) &= 1 \\ prob\,(B < C) + prob\,(C < B) &= 1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant prob\,(A < B) + prob\,(B < C) + prob\,(C < A) \\ 1 &\leqslant prob\,(B < A) + prob\,(A < C) + prob\,(C < B), \end{aligned}$$

on en peut déduire :

$$prob\,(A < B) + prob\,(B < C) + prob\,(C < A) \leqslant 2.$$

De même, si la condition est vérifiée pour tous les circuits de $n = 2$ et $n = 3$, il est facile de montrer qu'elle est vérifiée aussi pour tous les circuits de $n = 4$. Et par récurrence, si elle est vérifiée pour tous les circuits jusqu'à la longueur $(n - 1)$, on en peut déduire qu'elle est vérifiée pour les circuits de n.

Désignons par **P** (E) l'ensemble des applications *prob* satisfaisant aux conditions susdites. Cet ensemble peut être doté d'une structure vectorielle et selon cette structure, c'est un ensemble convexe.

Cela signifie que si p_1 et p_2 sont deux probabilisations acceptables, c'est-à-dire deux éléments de **P** (E), et si k_1 et k_2 sont deux réels positifs de somme égale à l'unité, alors la fonction :

$$k_1 p_1 + k_2 p_2$$

(moyenne pondérée de p_1 et p_2) est encore un élément de **P** (E).

Premier cas

Lorsque l'ensemble E ne comporte que trois éléments, la figuration géométrique est aisée, avec trois dimensions, en posant par exemple :

$$\begin{array}{ll} prob\,(A < B) = z, & prob\,(B < A) = 1 - z \\ prob\,(B < C) = x, & prob\,(C < B) = 1 - x \\ prob\,(C < A) = y, & prob\,(A < C) = 1 - y \end{array}$$

Les conditions imposées se réduisent à :

$$0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$$

$$1 \leqslant x + y + z \leqslant 2 .$$

Les trois premières définissent un pavé, et la quatrième une troncature dudit pavé; on obtient ce qu'on appelle un antiprisme, borné par deux bases triangulaires et six triangles latéraux; on notera que les six sommets de l'antiprisme sont aussi sommets du pavé; ce sont les points :

x	y	z
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0.

3. 3. *Cas général*

Si le cardinal de E est supérieur à trois, la situation n'est guère plus compliquée : l'ensemble **P** (E) est représenté par un polytope convexe dont on va chercher les sommets. Rappelons d'abord quelques résultats bien connus pour un vectoriel de dimension finie, sur un corps de base ordonné.

Un ensemble est convexe si toute moyenne de deux ou plusieurs éléments de l'ensemble fait encore partie de l'ensemble. On appelle extrêmes les éléments qui ne sont pas moyennes de deux autres. Lorsque l'ensemble convexe est borné, tout élément de l'ensemble qui n'est pas extrême est une moyenne de plusieurs extrêmes. La seule connaissance des extrêmes (ou sommets) permet alors de reconstruire tout l'ensemble, par voie de moyennes pondérées.

Condition nécessaire pour qu'une probabilisation soit extrême.

Soit une fonction *prob*, élément de **P** (**E**), c'est-à-dire remplissant les conditions susdites. Prenons une fonction *val* qui applique l'ensemble **E** dans celui des réels.

Considérons alors la fonction :

$$q\ (A,\ B) = prob\ (A\ <\ B) + k\ .\ (val\ (A) - val\ (B))$$

où k est un réel. Nous allons chercher, en choisissant bien la fonction *val* et le paramètre k, à faire que q, soit aussi une probabilisation acceptable, c'est-à-dire appartenant à **P** (**E**).

Il y a évidemment, la solution triviale : $k = 0$.

Remarquons d'abord que la somme des valeurs de la fonction q pour un circuit fermé est égale à la somme des valeurs de *prob* pour le même circuit.

Pour que la fonction q appartienne à **P** (**E**) comme *prob*, il suffit donc qu'on s'arrange pour que toutes les valeurs de q soient comprises entre 0 et 1.

Il faut pour cela que l'on ait, quels que soient A et B :

$$-\ prob\ (A\ <\ B) \leqslant k\ .\ (val\ B - val\ A) \leqslant prob\ (B\ <\ A).$$

Pour les couples, s'il y en a, tels que : $val\ A = val\ B$, cette condition est toujours remplie.

Pour les couples tels que : $val\ A \neq val\ B$, il faut choisir k dans l'intervalle réel ayant pour bornes :

$$prob\ (A\ <\ B)\ /\ val\ A - val\ B) \qquad \text{et} \qquad prob\ (B\ <\ A)\ /\ val\ B - val\ A.$$

Voici donc comment procéder : une fois choisie la fonction *val*, on fera la liste de tous les couples tels que $val\ A \neq val\ B$. Pour chacun de ces couples, on calcule les bornes de l'intervalle permis à k. Enfin on prend la partie commune à tous ces intervalles : c'est encore un intervalle (non vide, puisque la valeur triviale $k = 0$ est toujours acceptable).

Soyons maintenant un peu plus exigeants : nous voulons que k puisse aussi bien prendre des valeurs positives que négatives, c'est-à-dire que zéro soit intérieur à l'intervalle permis. Il faut et suffit pour cela que, pour chaque couple concerné, les deux bornes prescrites soient de signes contraires, c'est-à-dire que ni $prob\ (A\ <\ B)$, ni $prob\ (B\ <\ A)$ ne soient nulles. La procédure sera donc la suivante :

1) Pour tous les couples tels que : $prob\ (A\ <\ B) = 0$ et $prob\ (B\ <\ A) = 1$ (ou le contraire), on prendra $val\ A = val\ B$.

2) Pour les autres (s'il y en a) on déterminera l'intervalle permis pour k.

3) L'intersection de tous ces intervalles fournira deux valeurs k' et $-\ k''$ (l'une positive et l'autre négative), d'où deux fonctions appartenant à **P** (**E**), à savoir :

$$\begin{aligned} q'\ (A,\ B) &= prob\ (A\ <\ B) + k'\ \ .\ (val\ A - val\ B) \\ q''\ (A,\ B) &= prob\ (A\ <\ B) - k''\ .\ (val\ A - val\ B). \end{aligned}$$

On note que :

$$k''\ .\ q'\ (A,\ B) + k'\ .\ q''\ (A,\ B) = (k'' + k')\ .\ prob\ (A\ <\ B),$$

ce qui signifie que *prob* est une moyenne pondérée des deux fonctions q' et q'' : elle n'est donc pas extrême !

L'algorithme précédent ne peut être mis en échec que si tous les couples (A, B) sont du type :

$$prob\ (A, B) = 0 \text{ ou } 1.$$

D'où notre premier résultat :

Pour qu'une fonction $prob\ (A < B)$ soit un élément extrême de **P** (**E**), il faut qu'elle ne prenne d'autres valeurs que 0 et 1.

3. 4. *Structure de l'ensemble des extrêmes*

Désignons par la notation $\hat{\mathbf{P}}$ cette partie de **P** pour laquelle des valeurs de *prob* sont exclusivement 0 ou 1.

On a d'abord :

$$prob\ (A < B) + prob\ (B < A) = 1,$$

donc l'une des valeurs est 1 et l'autre 0. Comme il est naturel, au lieu d'écrire :

$$prob\ (A < B) = 1$$

nous écrirons :

$$A < B$$

(proposition certaine).

Ensuite, à cause des conditions :

$$1 \leqslant prob\ (A < B) + prob\ (B < C) + prob\ (C < A) \leqslant 2$$

on voit que les trois termes ne peuvent être tous les trois nuls, ni tous les trois égaux à l'unité. Il en résulte, entre autres, que :

$$\text{si} \qquad A < B \qquad \text{et si} \qquad B < C$$

alors :

$$A < C.$$

Finalement, toute fonction prise dans $\hat{\mathbf{P}}$ (**E**) détermine un ordre total sur **E**.

Inversement, si l'on se donne un ordre total sur **E**, il lui correspond une fonction de l'ensemble $\hat{\mathbf{P}}$ (**E**) ; il suffit de traduire :

$$\mathrm{A} < \mathrm{B}$$

par :

$$prob\ (A < B) = 1, \qquad prob\ (B < A) = 0.$$

On vient ainsi d'établir une bijection entre :

— l'ensemble $\hat{\mathbf{P}}$ (**E**) des éléments extrêmes de **P** (**E**) ;

— l'ensemble des $N!$ ordres totaux sur **E**.

$$(\text{si } N = \textbf{Card E})$$

3. 5. D'autre part, nous savons que tout élément de **P** peut se construire comme moyenne pondérée d'un certain nombre d'éléments de $\hat{\mathbf{P}}$. C'est là une propriété générale des parties convexes d'un espace vectoriel, pourvu que ces parties soient bornées, ce qui est évidemment le cas.

Donc si p est un élément quelconque de **P (E)**, on peut trouver une formule (en général : cette formule n'est pas unique) :

$$p = k_1 \cdot \hat{p}_1 + k_2 \cdot \hat{p}_2 + k_3 \cdot \hat{p}_3 + \quad \text{etc.}$$

dans laquelle les $\hat{p}_i$ sont les éléments de $\hat{\mathbf{P}}$ **(E)**, et les k_i des réels positifs de somme unité (certains pouvant être nuls).

Mais à chaque i correspond, comme on l'a vu, un ordre total O_i sur **E**. Une liste (k) des coefficients k_i est donc tout simplement une pondération pour chacun des $N!$ ordres possibles sur **E**. On posera naturellement :

$$k_i = prob\ (O_i).$$

Soit alors **Q (E)**, l'ensemble des probabilisations possibles de l'ensemble des $N!$ ordres sur **E** :

$$(k) \in \mathbf{Q}\ (\mathbf{E}).$$

Pour un couple quelconque d'éléments de **E**, disons (A, B), on a :

$$\hat{p}_i\ (A < B) = 1 \text{ ou } 0,$$

selon que A est avant B dans O_i ou le contraire.

Donc :

$$p\ (A < B) = \text{somme des } prob\ (O_i)$$

telles que $A < B$ dans O_i.

On vient d'atteindre le résultat annoncé :

Pour toute fonction $p\ (A < B)$ appartenant à l'ensemble **P (E)** on peut trouver (et en général de plusieurs manières) une fonction $prob\ (O_i)$ appartenant à **Q (E)**.

3. 6. On a rencontré, incidemment, une représentation géométrique de l'ensemble des $N!$ ordres totaux sur **E** : l'ensemble $\hat{\mathbf{P}}$ des sommets du polytope **P**.

Ce n'est pas tout à fait ce qu'en d'autres circonstances, on a proposé d'appeler *permutoèdre*[1].

---

1. G. Th. Guilbaud et P. Rosenstiehl, « Analyse algébrique d'un scrutin», *Math. Sci. hum.*, n° 4, sept. 1963, pp. 9-33. Et des mêmes auteurs, sous le même titre, un chapitre de *Ordres totaux finis*. (Travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence, juillet 1967), Paris, Mouton 1971, chap. 3, pp. 71-100.

Par exemple, si :

$$N = \text{card}\,\mathbf{E} = 3,$$

le permutoèdre est un hexagone plan, tandis que **P** est un antiprisme à neuf faces. Mais bien entendu, on peut retrouver le permutoèdre dans **P**.

Nous reviendrons sur ces figurations géométriques à une autre occasion.