

G. KREWERAS

**Intermédiarité, dendroïdes et quasi-dualité**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 29 (1970), p. 5-15

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1970\\_\\_29\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__29__5_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INTERMÉDIARITÉ, DENDROÏDES ET QUASI-DUALITÉ

par  
G. KREWERAS

### I. — INTERMÉDIARITÉ INTERNE ET EXTERNE. CHAÎNES ET QUASI-DUALITÉ.

Étampes est *entre* Paris et Orléans; *entre* le Directoire et l'Empire, il y a eu le Consulat. Les usages les plus familiers de la préposition « entre » la montrent comme symbole d'une relation *ternaire*, concernant en général des êtres conçus dans le temps ou dans l'espace; c'est du reste la seule préposition qui ne puisse jamais en français, sauf audace de style, introduire un complément unique au singulier.

Dans les deux exemples ci-dessus, « entre » dénote une relation ternaire *interne*: Paris, Orléans, Étampes sont tous trois éléments d'un même ensemble, celui des villes de France; Directoire, Consulat, Empire appartiennent tous trois à un même répertoire, celui des périodes historiques.

Mais il suffit de penser à des emplois presque aussi simples de la même préposition pour voir que la relation, tout en restant ternaire, est quelquefois *externe*. *Entre* le coucher et le lever, il y a la nuit; *entre* le lever et le coucher suivant, il y a la journée de travail; lever et coucher sont des opérations presque instantanées, des *instants*, alors que la nuit et la journée sont des *périodes*. Mais inversement, *entre* la nuit et la journée, il y a le lever: le langage de tous les jours (c'est le cas de le dire) place indifféremment des périodes entre les instants et des instants entre les périodes. L'intermédiarité apparaît ainsi comme une relation mettant en jeu non pas les éléments d'un ensemble, mais les éléments de *deux ensembles*, avec amorce d'une *dualité* sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Dans l'espace il en est bien entendu de même. Un kilomètre de route s'étend *entre* deux bornes; mais de chacun des deux côtés d'une borne, il y a un kilomètre de route, et la borne est *entre* ces deux kilomètres. La langue populaire compte les *bornes* au lieu de compter les *kilomètres*, et peu importe lorsque la route est longue; mais les enfants des écoles (et parfois les étudiants des facultés!) se trompent facilement lorsqu'il s'agit de tenir un compte précis de ce qui se passe aux *extrémités*: quoi qu'il en soit l'image de la figure 1, avec  $n$  sommets dont deux extrêmes et  $n - 1$  arêtes (comme on dit dans la « théorie des graphes »), définit l'une des structures les plus intuitives qui soient, celle de *chaîne*.



Fig. 1

Notons dès maintenant que l'intuition se débarrasse aisément du caractère *fini* des chaînes en permettant soit à l'un des sommets extrêmes, soit aux deux d'être « rejetés infiniment loin », c'est-à-dire

de ne plus exister. Notons aussi que la *chaîne infinie* dans les deux sens nous donne un parfait exemple de *dualité* entre l'ensemble A des sommets et l'ensemble B des arêtes: entendons par là que la somme cartésienne  $A + B$  peut être appliquée *bijectivement* dans elle-même, de façon que l'image de tout sommet soit une arête et l'image de toute arête un sommet, et avec conservation de la relation d'inter-médiarité (fig. 2).

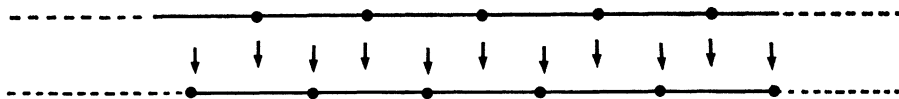


Fig. 2

L'idée de cette dualité s'étend cependant aisément au cas d'une chaîne infinie dans un seul sens ou même d'une chaîne finie, pourvu que l'on soit disposé à sacrifier le caractère bijectif de l'application définie plus haut. Plus précisément on pourra dire d'une chaîne  $C' = A' + B'$  qu'elle est *quasi-duale* (ou *dérivée*) d'une chaîne  $C = A + B$ , si l'on peut trouver une application *injective*  $f$  de  $C'$  dans  $C$ , telle que  $f(A') \subset B$  et  $f(B') \subset A$  et que «  $u$  entre  $x$  et  $y$  » entraîne «  $f(u)$  entre  $f(x)$  et  $f(y)$  ». On voit sur la figure 3 comment les dérivations successives font passer d'une chaîne finie à la chaîne triviale formée d'un sommet unique (et même si l'on veut à la « chaîne vide »):

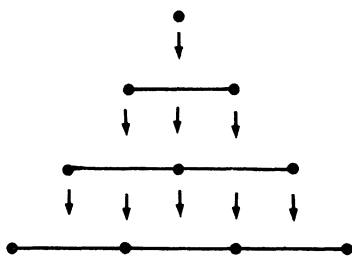


Fig. 3

Le phénomène est analogue à celui qui se produit, dans la théorie des fonctions, lors des dérivations successives des monômes (du type  $x^n/n!$ ).

## II. — ARBRES, GRAPHOÏDES ET DENDROÏDES.

Après les chaînes finies, les objets les plus simples de la théorie des graphes sont les *arbres* finis. Comme les chaînes, ils ont  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes; ils sont en outre (c'est ainsi qu'on les définit habituellement) connexes et acycliques. Il en résulte, comme on le sait bien, que tout arbre  $T$ , à l'égard d'une paire quelconque de ses sommets, comprend une *chaîne* unique dont ces sommets sont les deux extrémités. Mais l'arbre fini  $T$  lui-même peut avoir plus de deux extrémités (ou « sommets pendants »): il s'agit de sommets qui, pour aucune des chaînes incluses dans  $T$ , ne se trouvent *entre* deux arêtes.

Cependant la dualité (ou même la quasi-dualité) rencontrée à propos des chaînes n'a plus de sens dans l'univers des arbres. Car pour toute arête il existe deux sommets, et deux seulement, *entre* lesquels elle est située; mais pour un sommet  $a$  (autre qu'une extrémité) il peut y avoir plusieurs paires d'arêtes, telles que  $a$  soit *entre* les deux arêtes d'une paire. Dans le cas de la figure 4, il est tout naturel de dire que

le sommet  $a$  est *entre les cinq* arêtes qui y aboutissent; mais la préposition « entre » ne dénote plus alors une relation ternaire.

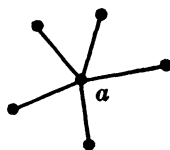


Fig. 4

Un tel emploi du mot « entre » n'est nullement contraire à l'usage courant. C'est celui qui apparaît dans des phrases comme « il y a *entre* eux un air de famille »: « eux » ne sont pas nécessairement deux, mais peuvent être trois, quatre ou davantage. Le mot « arête » devient alors impropre pour désigner justement cet « air de famille » qui peut exister entre plus de deux éléments d'un ensemble. Nous parlerons, abstraitement, non pas d'air de famille mais de *liaison*.

Plus précisément, nous appellerons *graphoïde* le système (A, B) formé par un ensemble A d'éléments appelés *sommets* et un ensemble B de parties de A appelées *liaisons* et tel que les conditions suivantes soient réalisées:

- (i) toute liaison se compose d'*au moins deux* sommets;
- (ii) deux liaisons distinctes ont *au plus un* sommet commun.

Il est clair que certaines liaisons pourront avoir exactement deux sommets; c'est elles et elles seules que l'on appellera des arêtes. Un graphoïde dont toutes les liaisons sont des arêtes est évidemment un graphe.

De même que les plus simples des graphes sont des arbres, nous définirons des graphoïdes plus simples que les autres sous le nom de *dendroïdes*. Un dendroïde sera un graphoïde connexe et acyclique; définition qui, pour avoir un sens, devra être précédée de la définition d'une *chaîne*.

En fait, ce que nous appellerons chaîne sera précisément une suite finie

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_{n-1} b_{n-1} a_n$$

de  $2n-1$  éléments distincts appartenant alternativement à A et à B (le premier et le dernier, dits *extrémités* de la chaîne, appartenant à A) et tels que chacune des liaisons  $b_i$  *contienne* les deux sommets  $a_i$  et  $a_{i+1}$  *entre lesquels* elle est écrite. Une suite analogue définira non plus une chaîne mais un *cycle* si, toutes les autres conditions étant maintenues, on a  $a_1 = a_n$  (avec  $n \geq 3$ ).

Dès lors un dendroïde sera un graphoïde pour lequel deux sommets quelconques sont extrémités d'une chaîne et d'une seule. On pourra ainsi employer la préposition « entre » non seulement pour dire qu'une certaine liaison est une « liaison entre » tels sommets, mais aussi pour dire qu'un certain sommet (appartenant à plusieurs liaisons) est situé « entre » ces liaisons; nouvel accord avec le langage quotidien, pour lequel *entre* exprime souvent la communauté, ou l'appartenance simultanée, comme dans le préfixe du mot même d'*intersection* que les mathématiciens ont spécialisé pour cela.

### III. — DÉRIVATION ET DUALITÉ DANS LES DENDROÏDES.

Pour l'imagination visuelle, un dendroïde D pourra se représenter sous une apparence telle que celle de la figure 5, qui comporte 12 sommets et 7 liaisons, ces dernières étant nommées a, b, c, d, e, f, g.

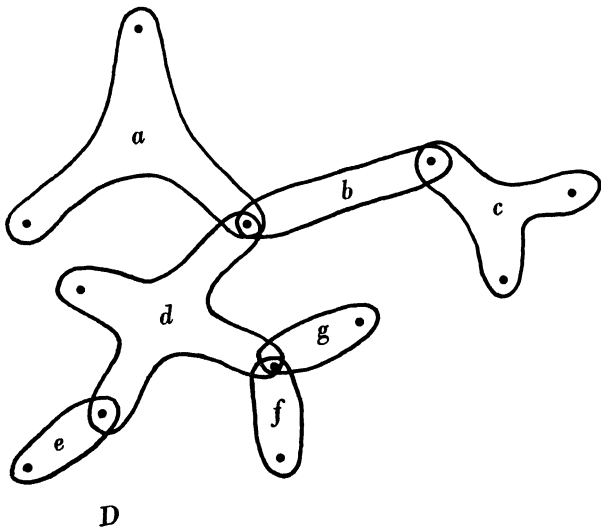


Fig. 5

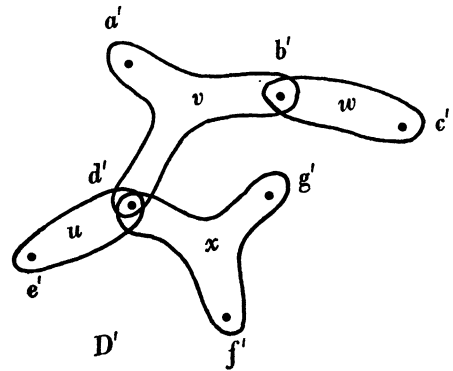


Fig. 6

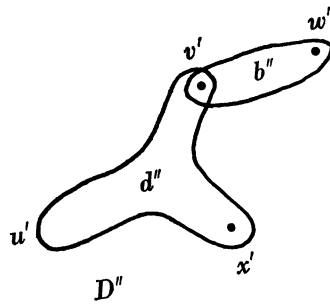


Fig. 7

Le dendroïde  $D'$  dérivé (ou quasi-dual) de  $D$ , que représente la figure 6, aura pour ensemble de sommets:  $a', b', c', d', e', f', g'$ . Entre les sommets  $a', b', d'$  (par exemple) de  $D'$ , il y aura une liaison, appelée  $v$  sur la figure 6, parce que les liaisons correspondantes  $a, b, d$  de  $D$  avaient un sommet en commun. A son tour le dendroïde  $D''$  dérivé de  $D'$  est représenté sur la figure 7: la liaison  $d'' = \{ u', v', x' \}$  de  $D''$  correspond au sommet  $d'$  de  $D'$ , qui est entre (commun aux) liaisons  $u, v, x$  de  $D'$ .

La comparaison des figures 5 et 7 montre pourquoi la dérivation mérite le nom de quasi-dualité: la figure 7 ne reproduit certes pas la figure 5 (comme il le faudrait s'il s'agissait d'une véritable dualité), mais il s'en faut en quelque sorte de peu. Le dendroïde  $D$  de la figure 5 a en effet certains de ses sommets qui sont « pendants » en ce sens qu'ils n'appartiennent chacun qu'à une seule liaison, et il a en outre certaines de ses liaisons (comme  $c$  par exemple) qui sont « terminales » en ce sens que tous leurs sommets sauf un, sont pendants; or le dendroïde  $D''$  de la figure 7 est, comme on s'en assure aisément, ce qui reste de  $D$  lorsqu'on y supprime tous les sommets pendants et toutes les liaisons terminales.

La dualité devient parfaite s'il n'y a pas de sommet pendent, ce qui, bien entendu, ne peut se produire que pour les dendroïdes *infinis*. Car si un dendroïde n'a qu'un nombre fini de sommets, il existe une chaîne  $a_1 \dots a_n$  dont le nombre  $n$  de sommets est maximal, et alors ses extrémités  $a_1$  et  $a_n$  sont nécessairement des sommets pendants.

Les figures 8 et 9 donnent un exemple de construction de deux dendroïdes  $D$  et  $D'$  en dualité; ces deux dendroïdes sont infinis mais « localement finis » en ce sens que les degrés des sommets et des

liaisons sont finis (le degré d'un sommet est le nombre de liaisons distinctes auxquelles il appartient, et le degré d'une liaison est le nombre de sommets qui lui appartiennent). Pour  $D$  tous les sommets sont de degré 2 et toutes les liaisons sont de degré 3; pour  $D'$  ce sont les liaisons qui sont de degré 2, ces liaisons sont donc des arêtes et  $D'$  est un arbre.

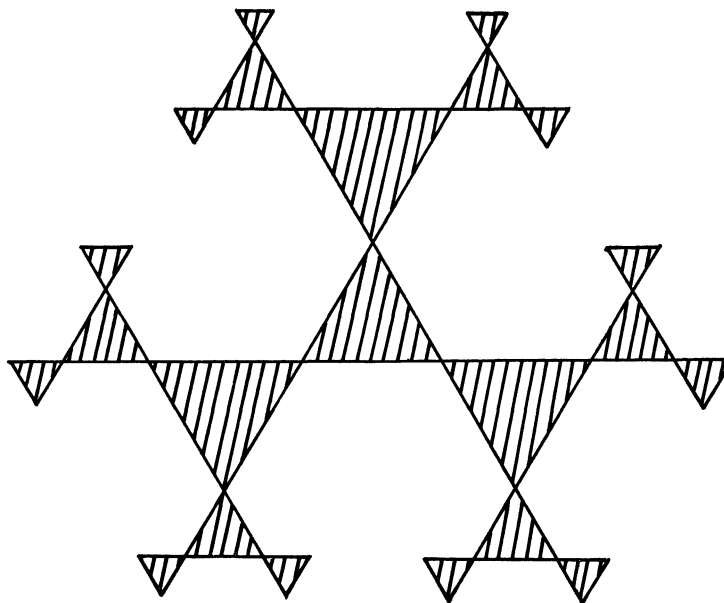


Fig. 8

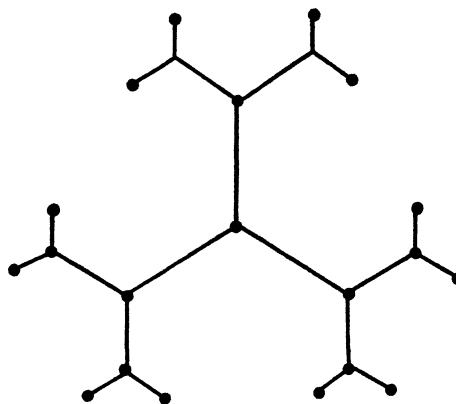


Fig. 9

Quant à la figure 10, elle donne l'exemple le plus simple (après la chaîne infinie dans les deux sens) de dendroïde isomorphe à son propre dual.

Une représentation parfois commode des dendroïdes, du moins dans le cas fini, est fournie par les *matrices d'incidence*. La matrice d'incidence d'un dendroïde  $D = (A, B)$  a pour ensemble de lignes  $A$ , pour ensemble de colonnes  $B$ ; le fait qu'un sommet  $a$  de  $A$  appartienne ou non à une liaison  $b$  (de  $B$ ) se traduit par l'inscription d'un 1 ou d'un 0 dans la case  $(a, b)$  de la matrice. (A noter qu'une telle représentation pourrait convenir à des graphoïdes qui ne seraient pas nécessairement des dendroïdes.)



#### IV. — ARBRE ASSOCIÉ A UN DENDROÏDE.

Pour ramener à des schémas classiques certains problèmes (notamment énumératifs) qui se posent à propos des dendroïdes, il est commode de faire correspondre à tout dendroïde  $D = (A, B)$  un *arbre associé*. Nous appellerons ainsi un graphe  $T = (X, Y)$  défini comme suit :

1. son ensemble de sommets  $X$  est la somme cartésienne  $A + B$ ;
2. son ensemble d'arêtes  $Y$  est défini par l'ensemble des relations d'appartenance entre les sommets et les liaisons de  $D$  (ou, ce qui revient au même, par l'ensemble des cases marquées 1 dans la matrice d'incidence de  $D$ ).

Il résulte de cette définition, et des propriétés des dendroïdes, que non seulement  $T = (X, Y)$  est bien un arbre, mais qu'en outre aucun des sommets de cet arbre qui proviennent de  $B$  ( $X = A + B$ ) ne peut être un sommet pendant.

Cette dernière remarque peut également s'exprimer de la manière suivante : entre deux sommets pendants de  $T$ , la distance comptée en nombre d'arêtes de l'unique chaîne ayant ces deux sommets pour extrémités) est nécessairement un nombre *pair*. Ou encore : si l'on veut faire un coloriage des sommets de  $T$  en deux couleurs (en respectant la condition habituelle que deux sommets reliés par une arête ne soient jamais de la même couleur), alors *tous les sommets pendants de  $T$  auront nécessairement la même couleur*.

N'importe quel arbre ne satisfait pas à cette condition. On peut bien toujours, pour un arbre, partitionner en deux classes l'ensemble des sommets par un coloriage (la partition obtenue est d'ailleurs unique, on peut l'appeler « la partition de coloriage » de l'arbre); mais les sommets pendants ne seront en général pas tous dans la même classe.

Mais si l'on se donne a priori un arbre  $T$  dont tous les sommets pendants soient dans la même classe  $A$  de la partition de coloriage  $\{A, B\}$ , alors il existe un dendroïde  $D = (A, B)$  dont  $T$  est l'arbre associé : il suffira, pour le définir, de considérer tout sommet  $b$  de la classe  $B$  comme une liaison de même nom  $b$  entre tous les sommets (de la classe  $A$ ) auxquels le relie des arêtes de  $T$ .

#### V. — ARBRES AYANT UNE PARTITION DE COLORIAGE ET DES DEGRÉS IMPOSÉS.

La famille  $F$  de tous les arbres qui ont un ensemble de sommets  $X$  donné et dont la partition de coloriage soit une partition de  $X$  en deux classes données  $A$  et  $B$  satisfait à un *lemme* intéressant, qui permet de compter ceux d'entre eux pour lesquels les sommets ont des degrés imposés. Plutôt que les degrés, il sera d'ailleurs commode de considérer les *sous-degrés* (ou degrés diminués d'une unité) qui sont des entiers non-négatifs; les sous-degrés sont nuls pour les sommets pendants et pour eux seuls.

Si l'on appelle  $a$  et  $b$  les cardinaux respectifs de  $A$  et  $B$ , tout arbre de la famille  $F$  a  $a + b$  sommets, donc  $a + b - 1$  arêtes. Il en résulte que la somme des degrés des sommets de  $A$ , tout comme celle des degrés des sommets de  $B$ , est égale à  $a + b - 1$ ; ou encore, que la somme des sous-degrés des sommets de  $A$  est égale à  $b - 1$  et que la somme des sous-degrés des sommets de  $B$  est égale à  $a - 1$ . Par conséquent si l'on impose le sous-degré  $d_i - 1$  pour tout sommet  $i \in A$  et le sous-degré  $d_j - 1$  pour tout sommet  $j \in B$ , on doit tout d'abord satisfaire aux deux conditions

$$\sum_{i \in A} (d_i - 1) = b - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in B} (d_j - 1) = a - 1. \quad (1)$$

Cela dit, une fois imposés  $a + b$  entiers non-négatifs  $d_i - 1$  et  $d_j - 1$  satisfaisant à ces deux conditions, existe-t-il dans la famille  $F$  des arbres ayant précisément ces entiers pour sous-degrés ?



Le lemme répond par l'affirmative, et indique que le nombre total de tels arbres est égal au produit des deux nombres multinomiaux

$$\frac{(b-1)!}{\prod_{i \in A} (d_i - 1)!} \times \frac{(a-1)!}{\prod_{j \in B} (d_j - 1)!} \quad (2)$$

La démonstration, dont nous ne donnons pas le détail ici, est essentiellement une récurrence sur la somme  $a + b$ .

Ce lemme s'applique à tous les arbres qui satisfont aux conditions exigées, et non pas seulement à ceux qui sont associés à des dendroïdes. Toutefois pour ces derniers les degrés  $d_j$  des liaisons doivent être  $\geq 2$ , ce qui entraîne que les sous-degrés  $d_j - 1$  ne sont plus seulement des entiers non-négatifs, mais des entiers positifs. Cela suppose notamment, par suite de la deuxième des conditions (1), que  $b \leq a - 1$ : un dendroïde de  $a$  sommets possède au maximum  $a - 1$  liaisons, et s'il en possède exactement  $a - 1$ , ce ne peut être qu'un arbre.

## VI. — DENDROÏDES AYANT UN NOMBRE DE LIAISONS IMPOSÉ.

Si l'on s'intéresse aux dendroïdes pour lesquels on spécifie l'ensemble A des  $a$  sommets, l'ensemble B des  $b$  liaisons, les sous-degrés (positifs)  $d_j - 1$  de ces liaisons *mais pas les sous-degrés des sommets*, le nombre de tous ces dendroïdes aura le deuxième facteur de l'expression (2) en facteur commun, et la somme des premiers facteurs ne sera autre que le développement, par la formule du multinôme, de l'expression :

$$\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{a \text{ termes}}^{b-1} = a^{b-1} \quad ;$$

le nombre total de ces dendroïdes sera donc

$$a^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!}{\prod_{j \in B} (d_j - 1)!} \quad (3)$$

Si parmi les sous-degrés  $d_j - 1$  imposés aux liaisons il y en a  $t_k$  qui sont égaux à  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), le dénominateur de (3) peut s'écrire

$$(1!)^{t_1} (2!)^{t_2} \dots (k!)^{t_k} \dots ,$$

d'où un nombre de dendroïdes égal à

$$a^{b-1} \frac{(a-1)!}{(1!)^{t_1} (2!)^{t_2} \dots (k!)^{t_k} \dots} \quad (3')$$

Supposons maintenant qu'au lieu de spécifier les sous-degrés  $d_j - 1$  des  $b$  liaisons, on se contente de spécifier que  $t_k$  de ces sous-degrés doivent être égaux à  $k$ , et cela pour  $k = 1, 2, \dots$  (On doit naturellement avoir

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \dots + t_k + \dots &= b \\ t_1 + 2 t_2 + \dots + k t_k + \dots &= a - 1. \end{aligned}$$

Dans ces conditions le nombre (3') devra être répété autant de fois qu'il est possible de spécifier les sous-degrés conformément au « type » défini par la suite d'entiers  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ ; ce qui revient à le multiplier par le nombre multinomial

$$\frac{b!}{t_1! t_2! \dots t_k! \dots}$$

On obtient ainsi un nombre de dendroïdes égal à

$$a^{b-1} \cdot b! \cdot \frac{(a-1)!}{(1!)^{t_1} t_1! (2!)^{t_2} t_2! \dots (k!)^{t_k} t_k! \dots} \quad (4)$$

Le facteur « fraction » écrit ci-dessus est égal, on le sait, au nombre de manières distinctes dont on peut partitionner un ensemble donné de  $a-1$  éléments en  $b$  classes dont  $t_k$  sont de cardinal  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), c'est-à-dire au nombre de partitions de « type » donné. Si l'on n'impose pas le type de la partition, mais seulement le fait qu'elle comprenne  $b$  classes non-vides, la somme des fractions correspondantes n'est autre que le nombre de Stirling (de deuxième espèce)  $P_b^{a-1}$ .

Revenant aux dendroïdes, si non seulement on n'impose pas les sous-degrés des  $b$  liaisons, mais si l'on n'impose même pas le « type » auquel ces sous-degrés doivent correspondre, le nombre total de dendroïdes devient égal à

$$a^{b-1} b! P_b^{a-1} \quad (5)$$

Ce décompte suppose néanmoins que l'on se donne non seulement le nombre total  $b$  des liaisons, mais que ces liaisons constituent un ensemble de  $b$  objets aux étiquettes spécifiées, par exemple:  $j_1, j_2, \dots, j_b$

S'il n'en est plus ainsi, mais si l'on considère comme identiques deux dendroïdes qui ne diffèrent entre eux que par une permutation de l'étiquetage  $j_1, j_2, \dots, j_b$ , le nombre (5) est à diviser par  $b!$ . Le nombre total de dendroïdes distincts à  $b$  liaisons que l'on peut construire sur un ensemble donné de  $a$  sommets est donc finalement donné par

$$a^{b-1} P_b^{a-1} \quad (6)$$

On retrouve notamment, comme cas particulier de cette expression (6), le nombre total d'arbres, qui correspond à  $b = a - 1$ :  $P_{a-1}^{a-1}$  est égal à 1, et le nombre d'arbres est  $a^{a-2}$ , ce qui est l'expression classique du nombre d'arbres distincts qui peuvent être construits sur un ensemble donné de  $a$  sommets.

## VII. — ARBRES CONSTRUCTIBLES PAR ASSEMBLAGES D'ARÊTES.

A titre d'exemple d'utilisation de la quasi-dualité comme méthode de résolution d'un problème énumératif, nous nous demanderons maintenant combien d'arbres distincts peuvent être construits non plus avec un ensemble donné de sommets, mais avec un ensemble donné d'arêtes. Nous supposerons qu'il s'agit de  $a - 1$  arêtes individualisées, par une étiquette ou une couleur par exemple, et qu'un arbre est complètement défini par l'ensemble des « groupements d'arêtes » en sommets.

Or, définir un arbre  $T$  par ces groupements d'arêtes, c'est définir le dendroïde  $(A, B)$  dérivé de cet arbre  $T$ , dendroïde dont l'ensemble des sommets  $A$  sera de cardinal  $a - 1$  et dont les liaisons correspondront à tous les sommets non pendants de  $T$ . Dans ce dendroïde tous les sommets seront de degré  $\leq 2$ , puisqu'aucune arête de  $T$  ne peut appartenir à plus de deux groupements d'arêtes. Le comptage de ces dendroïdes se fait à partir du lemme énoncé précédemment; il est commode de commencer par spécifier

comment l'ensemble  $A$  des  $a - 1$  sommets se partitionne en  $A_1$  et  $A_2$ , ensembles respectifs des sommets de degré 1 et 2.

Si  $A_2$  est formé de  $r$  sommets,  $A_1$  est formé de  $a - 1 - r$  sommets, et la somme des degrés des sommets est  $2r + a - 1 - r = a + r - 1$ . Les liaisons, elles, sont aussi nombreuses que les sommets non pendants de  $T$ , qui possède  $a$  sommets en tout; mais comme il y a autant de sommets pendants que d'arêtes terminales, et qu'il y a  $a - 1 - r$  de ces dernières (à cause de  $A_1$ ), cela entraîne que le nombre  $l$  de liaisons soit exactement  $b = r + 1$ .

Le nombre de tels dendroïdes se détermine par une démarche analogue à celle suivie précédemment, à cela près que l'on garde jusqu'au bout le premier facteur de l'expression (2) au lieu de commencer par le sommet; ce nombre est égal en fin de compte à

$$P_{r+1}^{a-2} \frac{(b-1)!}{(0!)^{a-1-r} (1!)^r} = P_{r+1}^{a-2} r!.$$

Si maintenant l'on ne spécifie pas le sous-ensemble  $A_2$  de  $A$  mais seulement son cardinal  $r$ , le nombre trouvé est à multiplier par le binomial  $\binom{a-1}{r}$ , ce qui donne un nombre de possibilités égal à

$$P_{r+1}^{a-2} (a-1)(a-2) \dots (a-r) = \frac{1}{a} P_{r+1}^{a-2} a(a-1)(a-2) \dots (a-(r+1)+1).$$

Si enfin on ne spécifie pas même  $r$ , qui peut varier de 0 à  $a - 3$ , il y a lieu de sommer cette dernière expression par rapport à  $r$ . Mais l'on sait que les nombres de Stirling  $P_l^k$  possèdent la propriété d'être les coefficients à l'aide desquels on peut exprimer  $x^k$  comme combinaison linéaire des polynômes factoriels:

$$x^k = \sum_{l=1}^k P_l^k x(x-1) \dots (x-l+1).$$

Il en résulte que la sommation par rapport à  $r$  donne finalement

$$\frac{1}{a} a^{a-2} = a^{a-3}.$$

Il y a ainsi  $a^{a-3}$  arbres distincts qui se construisent à partir de  $a - 1$  arêtes individualisées. La figure 12 indique les 4 arbres qui correspondent au cas où  $a = 4$  ( $a - 1 = 3$ ).

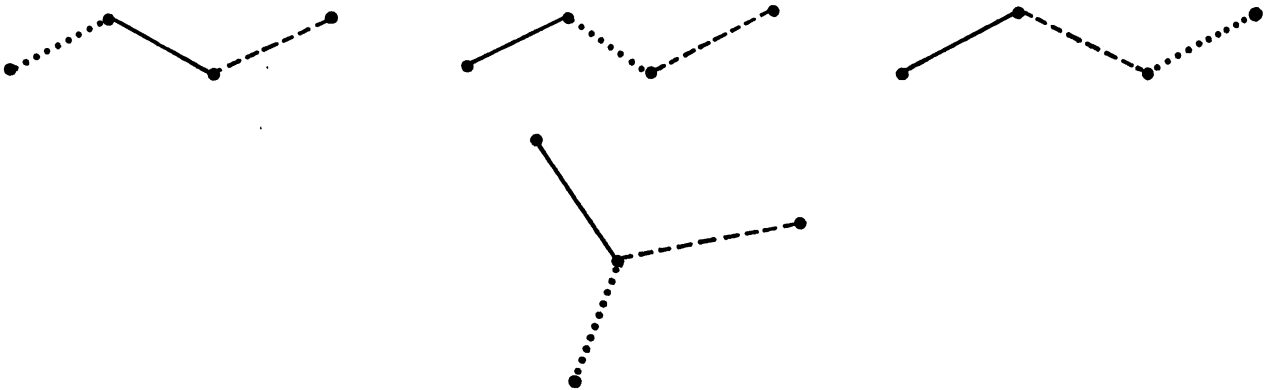


Fig. 12

## VIII. — BIBLIOGRAPHIE.

1. Les propriétés générales des arbres sont présentées dans tous les ouvrages consacrés à la théorie des graphes; voir notamment :

C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, 2<sup>e</sup> éd., Dunod, Paris, 1967.

C. FLAMENT, *Théorie des graphes et structures sociales*, Mouton, Paris, 1964.

F. HARARY, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Philippines, 1969.

O. ORE, *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Colloquium, 38, 1962.

B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, t. I, Dunod, Paris, 1969.

2. Le résultat fondamental relatif au comptage de tous les arbres constructibles sur un ensemble donné de sommets ( $n^{n-2}$  arbres pour  $n$  sommets) remonte à Cayley :

A. CAYLEY, *Collected mathematical papers*, Cambridge, 13 (1889-1898), pp. 28-28.

De nombreuses autres démonstrations en ont été données par la suite ; pour leur énumération critique, voir :

J. MOON, *Various proofs of Cayley's formula for counting trees*, A Seminar on Graph Theory (F. Harary, ed.), Holt, Rinehart and Winston, New York (1967), pp. 70-78.

3. Les notions de graphoïde et de dendroïde sont introduites de manière plus ou moins explicite ou systématique dans les travaux suivants :

K. HUSIMI, "Note on Mayer's theory of cluster integrals", *J. of Chem. Physics*, 18 (1950), pp. 682-684.

F. HARARY and G. E. UHLENBECK, "On the number of Husimi trees", *Proc. of the N.A.S.* 39 (1953), pp. 315-322.

F. HARARY, "A characterization of block graphs", *Can. Math. Bull.*, 6 (1963), pp. 1-6.

F. HARARY and G. PRINS, "The block cut-point tree of a graph", *Publ. Math. Debrecen*, 13 (1966), pp. 103-107.