

D. APPRATO

R. ARCANGELI

R. MANZANILLA

**Sur la construction de surfaces de classe C^k à partir
d'un grand nombre de données de Lagrange**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 4 (1987),
p. 529-555

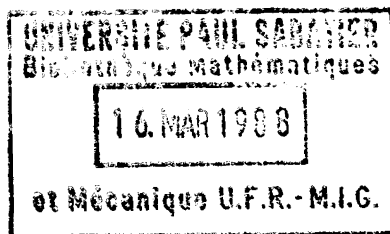
http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_4_529_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



SUR LA CONSTRUCTION DE SURFACES DE CLASSE C^k À PARTIR D'UN GRAND NOMBRE DE DONNÉES DE LAGRANGE (*)

par D. APPRATO ⁽¹⁾, R. ARCANGELI ⁽¹⁾, R. MANZANILLA ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On étudie dans cet article le problème de la construction, à partir d'un grand nombre de données de Lagrange, d'approximants de classe C^1 ou C^2 d'une surface définie par une équation explicite. On propose une méthode d'ajustement qui consiste à déterminer un approximant « éléments finis » d'une fonction spline d'ajustement associée aux points de données. On montre la convergence de la méthode et on donne des résultats numériques.*

Abstract. — *In this paper, for a surface defined by an explicit equation, the problem of constructing C^1 or C^2 approximates from a large number of Lagrange data is studied. A fitting method consisting in the determination of a finite element approximate of a smoothing spline associated with the data points is proposed. Convergence of the method is proved and numerical results are given.*

1. INTRODUCTION

1.1 Le problème

On considère le problème suivant : étant donné un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$, un système $\{a_i\}_{i=1, \dots, N}$ de points de $\bar{\Omega}$ et une fonction $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, construire un approximant ϕ de classe C^k de f n'utilisant que les données de Lagrange $\{f(a_i)\}_{i=1, \dots, N}$. On suppose N « grand » (de l'ordre de plusieurs milliers par exemple) et $k = 1$ ou 2 : ces conditions se trouvent effectivement imposées dans divers problèmes intervenant en modélisation sismique, en aéronautique, etc... Pour des

(*) Reçu en octobre 1986. Recherche effectuée dans le cadre d'un contrat avec la Société Elf-Aquitaine.

⁽¹⁾ Laboratoire d'Analyse Numérique, U.A. 1204 C.N.R.S., Université de Pau et des Pays de l'Adour, Avenue de l'Université, 64000 Pau, France.

raisons de coût, on souhaite que l'approximant dépende d'un nombre M de degrés de liberté nettement inférieur à N .

Les problèmes de construction de surfaces ont fait l'objet de nombreux travaux (cf. R. Franke [6] et la bibliographie de cet article).

Les contraintes du problème ci-dessus rendent peu réaliste l'utilisation des méthodes classiques d'*interpolation*, pour lesquelles on a d'ailleurs, a priori, $M = N$. Les méthodes d'éléments finis (d'Hermite, puisque l'on veut réaliser une approximation de classe C^1 ou C^2) sont inapplicables directement ; on peut néanmoins envisager l'utilisation de la méthode des plaquettes splines (cf. par exemple A. Le Méhauté [8]). Les méthodes de fonctions splines, de type global, conduisent à la résolution d'un système linéaire d'ordre N et à une expression compliquée pour ϕ . S'il s'agit, dans le cas d'un ouvert Ω quelconque notamment, de fonctions splines plaques minces d'interpolation (cf. J. Duchon [5]), alors ce système est plein et sa résolution coûteuse ; on peut, il est vrai, procéder par subdivision de domaines et raccordement des solutions locales (cf. L. Paihua [11], F. Utreras [14]).

Dans ce travail, nous proposons une méthode d'*ajustement* : on cherche une fonction ϕ de classe C^k telle que f et ϕ soient, non plus égales aux points a_i , $1 \leq i \leq N$, comme dans le cas de l'interpolation, mais « proches » au sens d'un critère de type moindres carrés (cf. P. Dierckx [4], qui donne un algorithme basé sur un critère du même genre). D'ailleurs, comme on le verra, le système linéaire qui détermine ϕ peut être déduit du système des moindres carrés par une régularisation convenable. Notons que l'utilisation de fonctions splines plaques minces d'ajustement conduit à un système linéaire plein d'ordre N , comme dans le cas des fonctions splines plaques minces d'interpolation.

La méthode est introduite au paragraphe 2. La fonction ϕ cherchée apparaît comme l'approximant dans un espace V_h de dimension M d'une fonction spline d'ajustement associée aux points a_i , $1 \leq i \leq N$; dans ce cas, on dispose donc du choix de M .

Au paragraphe 3, on définit plusieurs espaces d'approximation V_h de type éléments finis « de classes C^1 et C^2 » (cf. P. G. Ciarlet [2]).

Au paragraphe 4, on propose une méthode de raffinement local de l'approximation lorsque cette dernière s'avère mauvaise dans un sous-domaine Ω_0 de Ω , cette circonstance pouvant se produire lorsque f présente de fortes variations dans Ω_0 .

Enfin, au paragraphe 5, on étudie le problème de la convergence de l'approximation quand $N \rightarrow +\infty$ et $h \rightarrow 0$.

1.2. Notations

Soient m un entier ≥ 2 et Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne. On désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de)

fonctions réelles v qui appartiennent à $L^2(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^{\alpha} v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ (où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$) d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} v)^2 dx \right)^{1/2}.$$

On note :

$$\begin{aligned} \forall u \in H^m(\Omega), \quad \forall v \in H^m(\Omega), \quad (u, v)_{m,\Omega} &= \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx, \\ \forall v \in H^m(\Omega), \quad |v|_{m,\Omega} &= (v, v)_{m,\Omega}^{1/2}. \end{aligned}$$

Soient d'autre part $N \in \mathbb{N}$ et $X = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points de $\bar{\Omega}$ contenant un sous-ensemble P_{m-1} — unisolvant (cf. P. G. Ciarlet [2]). On définit l'opérateur $\rho \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), \mathbb{R}^N)$ par

$$\forall v \in H^m(\Omega), \quad \rho v = (v(a_1), \dots, v(a_N))$$

(il résulte des hypothèses sur m et Ω que $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$) et on pose :

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N, \quad \langle \xi, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i, \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \langle \xi \rangle &= \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit enfin f une fonction donnée dans $H^m(\Omega)$.

2. LA MÉTHODE D'AJUSTEMENT

2.1. Fonctions splines d'ajustement

Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle J_{ε} définie sur $H^m(\Omega)$ par

$$J_{\varepsilon}(v) = \langle \rho v - \rho f \rangle^2 + \varepsilon |v|_{m,\Omega}^2. \quad (2.1)$$

On appelle (pour une définition plus générale, cf. M. Atteia [1] et P. J. Laurent [7]) « D^m -spline d'ajustement dans Ω relative à l'opérateur ρ , à l'élément $\rho f \in \mathbb{R}^N$ et au paramètre ε », ou plus brièvement « fonction spline d'ajustement », toute solution, s'il en existe, du problème.: trouver σ_{ε} solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon} \in H^m(\Omega), \\ \forall v \in H^m(\Omega), \quad J_{\varepsilon}(\sigma_{\varepsilon}) \leq J_{\varepsilon}(v). \end{cases} \quad (2.2)$$

Raisonnant dans $H^m(\Omega)$ muni de la norme $v \rightarrow (\langle \rho v \rangle^2 + |v|_{m,\Omega}^2)^{1/2}$, équivalente (d'après J. Necăs [10], théorème 2.7.1) à la norme $\| \cdot \|_{m,\Omega}$, on voit qu'il résulte immédiatement du lemme de Lax-Milgram que le problème (2.2) admet une solution unique σ_ε qui est également la solution unique du problème : trouver σ_ε vérifiant

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon \in H^m(\Omega), \\ \forall v \in H^m(\Omega), \quad \langle \rho \sigma_\varepsilon, \rho v \rangle + \varepsilon (\sigma_\varepsilon, v)_{m,\Omega} = \langle \rho f, \rho v \rangle. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.2 Définition d'un approximant de classe C^k de f

Soient k un entier ≥ 0 , $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de réels > 0 admettant 0 pour point d'accumulation et, pour tout $h \in \mathcal{H}$, soit V_h un sous-espace de dimension finie de $H^m(\Omega)$ tel que $V_h \subset C^k(\bar{\Omega})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, on considère le problème : trouver $\sigma_{\varepsilon h}$ solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h} \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \quad J_\varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}) \leq J_\varepsilon(v_h). \end{cases} \quad (2.4)$$

Le problème (2.4) est un problème discret associé à (2.2). Il est équivalent au problème : trouver $\sigma_{\varepsilon h}$ solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h} \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \quad \langle \rho \sigma_{\varepsilon h}, \rho v_h \rangle + \varepsilon (\sigma_{\varepsilon h}, v_h)_{m,\Omega} = \langle \rho f, \rho v_h \rangle. \end{cases} \quad (2.5)$$

Les deux problèmes admettent la même solution unique $\sigma_{\varepsilon h}$.

On sait que, sous des hypothèses convenables, σ_ε est proche de f et que $\sigma_{\varepsilon h}$ converge vers σ_ε quand $h \rightarrow 0$. On peut alors considérer que $\sigma_{\varepsilon h}$ est proche de f : nous reviendrons en détail sur ce point au paragraphe 5.

Nous proposons donc de choisir pour approximant ϕ de classe C^k de f la solution $\sigma_{\varepsilon h}$ de (2.4) ou (2.5).

Si l'on note (omettant l'indice h pour simplifier) M la dimension de V_h et $(w_i)_{i=1, \dots, M}$ une base de V_h , alors $\sigma_{\varepsilon h}$ s'exprime sous la forme

$$\sigma_{\varepsilon h} = \sum_{j=1}^M \alpha_j w_j,$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq M$. Introduisant les matrices

$$A = (w_j(a_i))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}$$

et

$$R = ((w_j, w_i)_{m,\Omega})_{1 \leq i, j \leq M},$$

on voit que (2.5) est équivalent au problème : trouver $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ solution de

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}^M, \\ (A^T A + \varepsilon R) \alpha = A^T \rho f, \end{cases} \quad (2.6)$$

où A^T désigne la matrice transposée de A .

Remarque 2.1

Quand Ω n'est pas polygonal, on est conduit (cf. Remarque 3.1) à définir des problèmes analogues à (2.3) ou (2.5), formulées non plus sur Ω mais sur un domaine *polygonal* contenant Ω .

Remarque 2.2

La matrice $A^T A$ n'est autre que la matrice des moindres carrés associée à la base (w_j) , donc le problème (2.6) apparaît comme un système linéaire des moindres carrés *régularisé* (à l'aide de la matrice R). On pourrait envisager de régulariser directement le système des moindres carrés : cela est possible, et de différentes manières (cf. par exemple G. Ribière [12]). Mais l'étude de la convergence montre l'intérêt qu'il y a à raisonner d'abord sur le problème continu. ■

Nous allons maintenant donner des exemples concrets de sous-espaces V_h . Nous essaierons de voir au paragraphe 5 comment on peut choisir les paramètres ε et h .

3. EXEMPLES DE SOUS-ESPACES V_h .

Nous nous bornerons à proposer des espaces de type éléments finis (en abrégé E.F.) de classe C^1 et de classe C^2 . Comme il s'agit dans tous les cas d'E.F. droits, nous sommes amenés à supposer, dans ce paragraphe du moins, que l'ouvert Ω est, suivant les cas, polygonal quelconque ou réunion de rectangles à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

Pour définir un espace de type éléments finis, il suffit (en l'absence de conditions aux limites) de définir l'élément fini générique correspondant. C'est ce que nous allons faire en donnant trois exemples de classe C^1 et trois exemples de classe C^2 .

Il existe beaucoup d'éléments finis de classe C^1 : cf. par exemple P. G. Ciarlet [2]. Nous citerons, parmi les plus connus, les E.F. triangulaires d'Argyris et de Bell (de classe C^1) et l'E.F. rectangulaire de Bogner-Fox-Schmit (de classe C^1), dont il est inutile de rappeler ici la définition.

Les E.F. de classe C^2 sont moins classiques. Nous indiquerons seulement : les éléments finis triangulaires « d'Argyris et de Bell de classe C^2 » (cf. A.

Zenišek [15] et A. Le Méhauté [8], où figure la construction systématique de familles d'E.F. de classe C^k sur un n -simplexe) et l'E.F. rectangulaire « de Bogner-Fox-Schmit de classe C^2 ».

Nous donnons ci-après leur définition (selon P. G. Ciarlet [2]) sous forme de triplet (K, P, Σ) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$, on désigne par $P_n(E)$ [resp. par $Q_n(E)$] l'espace des restrictions à E des fonctions polynômes de degré $\leq n$ par rapport à l'ensemble des variables [resp. par rapport à chaque variable] x_1 et x_2 .

E.F. D'Argyris de classe C^2

- K est un triangle de sommets b_i , $1 \leq i \leq 3$,
- $P = P_9(K)$,
- $\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} v \mapsto v(b_0); \quad v \mapsto \partial^\alpha v(b_i), \quad |\alpha| \leq 4, \quad 1 \leq i \leq 3; \\ v \mapsto \frac{\partial v}{\partial v_i}(b_{i+1, i+2}), \quad 1 \leq i \leq 3; \\ v \mapsto \frac{\partial^2 v}{\partial v_i^2}(b_{i+1, i+1, i+2}), \quad 1 \leq i \leq 3; \\ v \mapsto \frac{\partial^2 v}{\partial v_i^2}(b_{i+1, i+2, i+2}), \quad 1 \leq i \leq 3 \end{array} \right\},$

où b_0 désigne le centre de gravité de K , $\frac{\partial}{\partial v_i}$ et $\frac{\partial^2}{\partial v_i^2}$ les dérivées normales premières et secondes à K_i (côté opposé à b_i), $b_{i+1, i+2}$ le milieu de K_i , et $b_{i+1, i+1, i+2}$ et $b_{i+1, i+2, i+2}$ les points qui divisent K_i en trois parties égales.

E.F. de Bell de classe C^2

- K est un triangle de sommets b_i , $1 \leq i \leq 3$,
- $P = \left\{ p \in P_9(K); \frac{\partial p}{\partial v_i} \in P_7(K_i), \frac{\partial^2 p}{\partial v_i^2} \in P_5(K_i), \quad 1 \leq i \leq 3 \right\},$
- $\Sigma = \{v \mapsto v(b_0); v \mapsto \partial^\alpha v(b_i), \quad |\alpha| \leq 4, \quad 1 \leq i \leq 3\}.$

E.F. de Bogner-Fox-Schmit de classe C^2

- K est un rectangle de sommets b_i , $1 \leq i \leq 4$,
- $P = Q_5(K)$,
- $\Sigma = \{v \mapsto \partial^\alpha v(b_i); \quad |\alpha| \leq 2, \quad \alpha = (2, 1), \alpha = (1, 2),$
 $\alpha = (2, 2), \quad 1 \leq i \leq 4\}.$

Remarque 3.1

Lorsque l'ouvert Ω n'est pas polygonal, on peut néanmoins utiliser des espaces V_h du type éléments finis *droits*. Compte tenu du fait que le problème (2.3) est formulé dans l'espace $H^m(\Omega)$ entier et non dans un sous-espace, il n'entre pas en effet de conditions aux limites dans la définition des sous-espaces d'approximation V_h . On procède alors de la manière suivante : pour tout $h \in \mathcal{H}$, on introduit un domaine polygonal borné convenable Ω^h contenant Ω , on définit V_h sur Ω^h et on détermine, par la méthode du paragraphe 2, une fonction $\phi^h : \bar{\Omega}^h \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi^h|_{\Omega}$ approche f . L'étude de la convergence faite au paragraphe 5 justifie la méthode.

Remarque 3.2

L'utilisation des E.F. d'Argyris et de Bell de classe C^1 et C^2 est relativement coûteuse, tant du fait du calcul des fonctions de base (même si l'on applique la méthode de A. Le Méhauté [8]) que de celui de leur manipulation.

Les E.F. de Bogner-Fox-Schmit de classes C^1 et C^2 ont un nombre de degrés de liberté inférieur à celui des éléments correspondants d'Argyris et de Bell (16 contre 21 et 18 respectivement dans le cas de la classe C^1 , 36 contre 55 et 46 respectivement dans celui de la classe C^2). D'autre part, leurs fonctions de base sont explicitement connues. Leur utilisation est donc nettement moins coûteuse, mais a priori limitée au cas où l'ouvert Ω est réunion de rectangles à côtés parallèles aux axes.

En fait, il n'en est rien, du moins dans le cas de notre problème d'ajustement (la situation serait différente dans le cas d'un problème d'interpolation). Cela résulte de la remarque 3.1 : puisqu'on dispose en partie du choix de l'ouvert Ω^h , on peut le prendre du type « réunion de rectangles » (cf. paragraphe 5 pour plus de précisions).

Dans notre problème, on peut donc toujours (et on a intérêt à le faire) utiliser des E.F. de type rectangulaire de Bogner-Fox-Schmit. C'est ainsi qu'ont été traités les exemples numériques du paragraphe 6 (cf. R. Manzanilla [9]). ■

Notons enfin deux propriétés importantes des espaces de type éléments finis. La première, bien connue, est que la matrice du système linéaire (2.6) est une matrice-bande. La deuxième est qu'il est possible de raffiner localement l'approximant de f obtenu dans un premier calcul. Cette dernière propriété fait l'objet du paragraphe qui suit.

4. RAFFINEMENT LOCAL DE L'APPROXIMATION

Il est possible que la fonction f , bien que de régularité H^m dans Ω , présente de fortes variations dans un sous-domaine Ω_0 de Ω et que, de ce

fait, la solution $\sigma_{\varepsilon h}$ de (2.5) ne constitue pas un approximant satisfaisant de f dans Ω_0 .

On étudie en conséquence un moyen d'améliorer l'approximation dans Ω_0 tout en conservant la régularité C^k dans Ω .

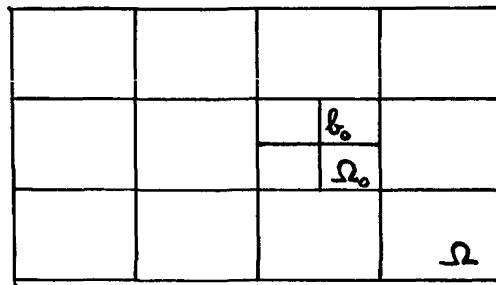
Pour cela soient $\varepsilon > 0$ et h fixés. On introduit un sous-espace de dimension finie W_h de $H^m(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} W_h \supsetneq V_h, \\ \forall w_h \in W_h, \quad \exists v_h \in V_h : (w_h - v_h)|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_0} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Si V_h est un espace de type éléments finis, il existe des espaces V_h satisfaisants à (4.1). Voici un exemple.

Exemple 4.1

On suppose que Ω est un rectangle et que Ω_0 est un élément d'une triangulation de $\bar{\Omega}$ au moyen de rectangles. On prend pour V_h l'espace de type éléments finis d'élément générique Bogner-Fox-Schmit (de classe C^1 ou C^2) correspondant.



Soit b_0 le centre de Ω_0 . On définit alors W_h comme l'espace des fonctions de $C^k(\bar{\Omega})$ qui coïncident avec une fonction de V_h sur $\bar{\Omega} \setminus \Omega_0$ et qui, sur chacun des quatre sous-rectangles admettant b_0 pour sommet et s'appuyant sur la frontière de Ω_0 , se réduisent à l'interpolé de Bogner-Fox-Schmit correspondant. ■

On pose alors

$$K = \left\{ w_h \in W_h ; \quad (w_h - \sigma_{\varepsilon h})|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_0} = 0 \right\},$$

$$K_0 = \left\{ w_h \in W_h ; \quad w_h|_{\bar{\Omega} \setminus \Omega_0} = 0 \right\},$$

et on considère les problèmes suivants : trouver $\sigma_{\varepsilon h}^*$ et $z_{\varepsilon h}$ respectivement solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h}^* \in K, \\ \forall w_h \in K, \quad J_\varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}^*) \leq J_\varepsilon(w_h) \end{cases} \quad (4.2)$$

et de

$$\begin{cases} z_{\varepsilon h} \in K_0, \\ \forall w_h \in K_0, \quad J_\varepsilon(z_{\varepsilon h} + \sigma_{\varepsilon h}^*) \leq J_\varepsilon(w_h + \sigma_{\varepsilon h}^*), \end{cases} \quad (4.3)$$

où J_ε est la fonctionnelle définie par (2.1).

On sait que les problèmes (4.2) et (4.3) admettent l'un et l'autre une solution unique. On a évidemment $\sigma_{\varepsilon h}^* = z_{\varepsilon h} + \sigma_{\varepsilon h}$.

Il est clair que

$$J_\varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}^*) \leq J_\varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}).$$

Cette relation montre que $\sigma_{\varepsilon h}^*$ est un meilleur approximant de f que $\sigma_{\varepsilon h}$.

On sait d'autre part que $z_{\varepsilon h}$ est la solution unique du problème variationnel

$$\begin{cases} z_{\varepsilon h} \in K_0, \\ \forall w_h \in K_0, \quad \langle \rho z_{\varepsilon h}, \rho w_h \rangle + \varepsilon (z_{\varepsilon h}, w_h)_{m, \Omega} = \\ \qquad \qquad \qquad = \langle \rho f - \rho \sigma_{\varepsilon h}, \rho w_h \rangle - \varepsilon (\sigma_{\varepsilon h}, w_h)_{m, \Omega}. \end{cases}$$

On voit que la détermination de $z_{\varepsilon h}$ ne fait intervenir en réalité que des fonctions à support dans $\bar{\Omega}_0$: dans le cas de l'exemple 4.1, calculer $\sigma_{\varepsilon h}^*$ revient en définitive à résoudre un système linéaire d'ordre 4 ou 9, suivant qu'il s'agit du cas de la classe C^1 ou de celui de la classe C^2 .

5. RÉSULTATS DE CONVERGENCE

Pour étudier la convergence de l'approximation quand $N \rightarrow +\infty$ et $h \rightarrow 0$, on suppose donnés :

- des sous-ensembles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$ de réels strictement positifs admettant 0 pour point d'accumulation ;
- un domaine borné non vide Ω de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne, un ouvert (borné) rectangulaire $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, un domaine borné Ω^h de $\mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne, tels que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \Omega \subset \Omega^h \subset \tilde{\Omega}, \quad (5.1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{mes}(\Omega^h \setminus \bar{\Omega}) = 0; \quad (5.2)$$

- deux entiers m et m' tels que $m' \geq m \geq 2$ et une fonction $f \in H^{m'}(\Omega)$;
- pour tout $d \in \mathcal{D}$, un ensemble X^d de $N(d)$ points distincts de $\bar{\Omega}$ [pour simplifier, on notera N au lieu de $N(d)$] contenant un sous-ensemble P_{m-1} — unisolvant et tel que

$$\sup_{x \in \Omega} \delta(x, X^d) = d \quad (5.3)$$

[où δ désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$]. On notera que le premier membre de (5.3) n'est autre que la *distance de Hausdorff* de X^d à Ω [qui tend donc vers 0 avec d].

On suppose d'autre part vérifiée l'hypothèse

$$\exists C > 0, \quad \exists \theta > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \theta : N \leq \frac{C}{d^2}, \quad (5.4)$$

qui traduit une propriété de régularité asymptotique de la répartition des points de X^d dans $\bar{\Omega}$;

- pour tout $d \in \mathcal{D}$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, un opérateur (indépendant de h) $\rho^d \in \mathcal{L}(H^m(\Omega^h), \mathbb{R}^N)$ défini par $\rho^d v = (v(a^d))_{a^d \in X^d}$;
- une fonction *bornée* $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ [pour simplifier, on notera usuellement ε au lieu de $\varepsilon(d)$].

Pour tout $d \in \mathcal{D}$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, on introduit la norme

$$\|v\|_{d, m, \Omega^h} = (\langle \rho^d v \rangle^2 + \|v\|_{m, \Omega^h}^2)^{1/2},$$

qui, comme on le sait, est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{m, \Omega^h}$ sur $H^m(\Omega^h)$.

Soit $\tilde{f} \in H^{m'}(\bar{\Omega})$ un prolongement de f (qui existe, puisque Ω , à frontière lipschitzienne, possède la propriété de m' -prolongement). Pour tout $d \in \mathcal{D}$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, on note σ_ε^{dh} la solution du problème : trouver σ_ε^{dh} vérifiant

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon^{dh} \in H^m(\Omega^h), \\ \forall v \in H^m(\Omega^h), \quad \langle \rho^d \sigma_\varepsilon^{dh}, \rho^d v \rangle + \varepsilon(\sigma_\varepsilon^{dh}, v)_{m, \Omega^h} = \langle \rho^d \tilde{f}, \rho^d v \rangle, \end{cases} \quad (5.5)$$

qui n'est autre que la formulation de (2.3) dans $H^m(\Omega^h)$ au lieu de $H^m(\Omega)$.

Soit enfin X_0 un sous-ensemble P_{m-1} — unisolvant fixe quelconque de points de $\bar{\Omega}$. Les hypothèses $o \in \mathcal{D}$ et (5.3) impliquent que

$$\forall a \in X_0, \exists (a^d)_{d \in \mathcal{D}} : (\forall d \in \mathcal{D}, a^d \in X^d) \quad \text{et} \quad \left(a = \lim_{d \rightarrow 0} a^d \right). \quad (5.6)$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on note alors X_0^d l'ensemble des points de X^d ainsi associés à X_0 et on pose

$$\forall v \in H^m(\Omega), \quad \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0 = \left(\sum_{a^d \in X_0^d} v^2(a^d) + |v|_{m,\Omega}^2 \right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Dans la suite, la même lettre C désignera diverses constantes strictement positives. $\blacksquare$

LEMME 5.1 : *Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $d \in \mathcal{D}$, $d \leq \eta$, l'application $v \mapsto \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0$ soit une norme sur $H^m(\Omega)$ uniformément équivalente par rapport à d à la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$.*

Démonstration

1) D'après le théorème d'immersion de Sobolev de $H^m(\Omega)$ dans $C^0(\bar{\Omega})$,

$$\exists C > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad \forall v \in H^m(\Omega) : \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0 \leq C \|v\|_{m,\Omega}.$$

2) Montrons maintenant l'inégalité en sens inverse. Pour tout $v \in H^m(\Omega)$, on a évidemment la relation

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in X_0} v^2(a) \leq \sum_{a \in X_0} (v(a) - v(a^d))^2 + \sum_{a^d \in X_0^d} v^2(a^d).$$

Compte tenu de (5.6), il résulte du théorème d'immersion *hölderienne* de Sobolev pour l'espace $H^m(\Omega)$ que

$$\begin{cases} \forall \beta > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta, \quad \forall v \in H^m(\Omega) : \\ \sum_{a \in X_0} (v(a) - v(a^d))^2 \leq \beta^2 \|v\|_{m,\Omega}^2, \end{cases} \quad (5.7)$$

d'où

$$\forall v \in H^m(\Omega), \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta : \frac{1}{2} \sum_{a \in X_0} v^2(a) + |v|_{m,\Omega}^2 - \beta^2 \|v\|_{m,\Omega}^2 \leq (\llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0)^2.$$

Or l'application $v \mapsto \left(\frac{1}{2} \sum_{a \in X_0} v^2(a) + |v|_{m,\Omega}^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur $H^m(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$. On en déduit que

$$\exists C > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta, \quad \forall v \in H^m(\Omega) : (C^2 - \beta^2) \|v\|_{m,\Omega}^2 \leq (\llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0)^2,$$

et le résultat suit en prenant $\beta < C$ dans (5.7). $\blacksquare$

On en déduit le :

COROLLAIRE 5.1 : *Il existe $\eta > 0$ et $C > 0$ tels que*

$$\forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^m(\Omega^h) : \|v\|_{m,\Omega} \leq C \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega^h}.$$

Démonstration : D'après le lemme 5.1,

$$\exists \eta > 0, \quad \exists C > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta, \quad \forall v \in H^m(\Omega) : \|v\|_{m,\Omega} \leq \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0,$$

d'où le résultat, vu que, compte tenu de (5.1),

$$\forall d \in \mathcal{D}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^m(\Omega^h), \quad \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega}^0 \leq \llbracket v \rrbracket_{d,m,\Omega^h} \quad \blacksquare$$

Le théorème suivant est un résultat général de convergence des fonctions splines d'ajustement définies en (5.5).

THÉORÈME 5.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses (5.1), (5.2) et (5.3). Alors*

$$\lim_{(d,h) \rightarrow (0,0)} \|\sigma_\varepsilon^{dh} - f\|_{m,\Omega} = 0,$$

où, pour tout $(d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}$, σ_ε^{dh} désigne la solution de (5.5).

Démonstration

1) Prenant $v = \sigma_\varepsilon^{dh} - \tilde{f}$ dans (5.5), il vient

$$\forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad \left\langle \rho^d(\sigma_\varepsilon^{dh} - \tilde{f}) \right\rangle^2 + \varepsilon(\sigma_\varepsilon^{dh}, \sigma_\varepsilon^{dh} - \tilde{f})_{m,\Omega^h} = 0.$$

On en déduit que

$$\forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m,\Omega^h} \leq |\tilde{f}|_{m,\Omega^h} \quad (5.8)$$

et que

$$\exists C > 0, \quad \forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad \left\langle \rho^d(\sigma_\varepsilon^{dh} - \tilde{f}) \right\rangle \leq C. \quad (5.9)$$

Il résulte alors de (5.8), (5.9) et du corollaire 5.1 que

$$\exists C > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \geq \eta, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \|\sigma_\varepsilon^{dh}\|_{m,\Omega} \leq C.$$

La famille $(\sigma_\varepsilon^{dh})_{(d,h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, d \leq \eta}$ étant bornée dans $H^m(\Omega)$, il existe une suite $(\sigma_\varepsilon^{d_n h_n})_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n, h_n) = (0, 0)$, extraite de la famille $(\sigma_\varepsilon^{dh})$ et un

élément $f^* \in H^m(\Omega)$ tels que $f^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{faible } \sigma_\varepsilon^{d_n h_n}$ dans $H^m(\Omega)$.

2) Montrons maintenant que $f^* = f$. Pour cela, raisonnons par l'absurde : supposons $f^* \neq f$. Il existe alors un ouvert non vide ω contenu dans Ω et un réel $\alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in \omega, \quad |f^*(x) - f(x)| > \alpha.$$

Posons

$$\nu = 1 + \text{partie entière de } \frac{C^2}{\alpha^2},$$

où C désigne la constante introduite dans (5.9). Soit Y_0 un sous-ensemble de ν points distincts de ω . Raisonnant comme pour établir (5.6), on voit que

$$\forall b \in Y_0, \quad \exists (a^d)_{d \in \mathcal{D}} : (\forall d \in \mathcal{D}, \quad a^d \in X^d) \quad \text{et} \quad \left(b = \lim_{d \rightarrow 0} a^d \right).$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on note Y_0^d l'ensemble des points de X^d ainsi associés à Y_0 . Il est clair que, pour tout d assez petit, Y_0^d est formé de points distincts. Il résulte alors de (5.9) que

$$\sum_{a^{d_n} \in Y_0^{d_n}} (\sigma_\varepsilon^{d_n h_n}(a^{d_n}) - f(a^{d_n}))^2 \leq C^2. \quad (5.10)$$

Utilisant alors le théorème d'immersion hölderienne de Sobolev pour l'espace $H^m(\Omega)$, on vérifie que

$$\forall b \in Y_0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_\varepsilon^{d_n h_n}(a^{d_n}) = f^*(b).$$

Faisant tendre n vers $+\infty$ dans (5.10), on obtient finalement la contradiction

$$\nu \alpha^2 \leq C^2.$$

Donc $f^* = f$.

3) Puisque l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_\varepsilon^{d_n h_n} = f, \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}. \quad (5.11)$$

D'autre part, on a évidemment

$$\left| \sigma_\varepsilon^{d_n h_n} - f \right|_{m, \Omega}^2 = \left| \sigma_\varepsilon^{d_n h_n} \right|_{m, \Omega}^2 + \left| f \right|_{m, \Omega}^2 - 2(\sigma_\varepsilon^{d_n h_n}, f)_{m, \Omega}.$$

Mais il en résulte de (5.1) et (5.8) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sigma_\varepsilon^{d_n h_n}|_{m, \Omega} \leq |\tilde{f}|_{m, \Omega^{h_n}}$$

et il résulte de (5.2) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{f}|_{m, \Omega^{h_n}} = |f|_{m, \Omega},$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\sigma_\varepsilon^{d_n h_n} - f|_{m, \Omega} = 0.$$

Compte tenu de (5.11), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_\varepsilon^{d_n h_n} - f\|_{m, \Omega} = 0.$$

4) Achevons la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons en effet que $\lim_{(d, h) \rightarrow (0, 0)} \|\sigma_\varepsilon^{dh} - f\|_{m, \Omega} \neq 0$. Cela revient à dire qu'il existe

$\alpha > 0$ et $(d'_n, h'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de $\mathcal{D} \times \mathcal{H}$ convergent vers $(0, 0)$, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\sigma_\varepsilon^{d'_n h'_n} - f\|_{m, \Omega} > \alpha.$$

Mais une telle suite est bornée dans $H^m(\Omega)$ et le raisonnement précédent entraîne une contradiction. ■

Notons que l'on a aussi le :

COROLLAIRE 5.2 : *On suppose vérifiées les hypothèses (5.1), (5.2) et (5.3). Alors*

$$\lim_{(d, h) \rightarrow (0, 0)} |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega^h \setminus \bar{\Omega}} = 0.$$

Démonstration : Puisque, compte tenu de (5.1),

$$\forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega^h \setminus \bar{\Omega}}^2 = |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega^h}^2 - |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega}^2,$$

on a, d'après (5.8),

$$\forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega^h \setminus \bar{\Omega}}^2 \leq |\tilde{f}|_{m, \Omega^h}^2 - |\sigma_\varepsilon^{dh}|_{m, \Omega}^2.$$

Or il résulte de (5.2) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\tilde{f}|_{m, \Omega^h} = |f|_{m, \Omega}$$

et le résultat suit d'après le théorème 5.1. ■

D'autre part

PROPOSITION 5.1 : *On suppose vérifiée l'hypothèse (5.4). Alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \quad \exists \theta > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \theta, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^m(\Omega^h) : \\ \llbracket v \rrbracket_{d, m, \Omega^h} \leq \frac{C}{d} \|v\|_{m, \Omega^h}. \end{array} \right.$$

Démonstration : Utilisant l'injection continue de $H^m(\Omega)$ dans $C^0(\bar{\Omega})$, on a, avec (5.1),

$$\exists C > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^m(\Omega^h), \quad \forall x \in \bar{\Omega} : |v(x)| \leq C \|v\|_{m, \Omega^h}.$$

On en déduit que

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^m(\Omega^h), \quad \llbracket v \rrbracket_{d, m, \Omega^h}^2 \leq (NC^2 + 1) \|v\|_{m, \Omega^h}^2,$$

d'où le résultat, compte tenu de (5.4). ■

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on suppose maintenant donnés une triangulation (cf. par exemple P. G. Ciarlet [2]) $\tilde{\mathcal{T}}_h$ de $\bar{\Omega}$ au moyen de triangles (ou de rectangles) K de diamètres $\leq h$ et un espace $\tilde{V}_h$ de type éléments finis construits sur $\tilde{\mathcal{T}}_h$, sous-espace de dimension finie de $H^m(\bar{\Omega}) \cap C^k(\bar{\Omega})$. Si k' (avec évidemment $k' \geq k$) désigne la classe de l'élément fini générique de $\tilde{V}_h$, alors l'inclusion $\tilde{V}_h \subset H^m(\bar{\Omega})$ implique (cf. P. G. Ciarlet [2], où est traité le cas $m = 2$) la condition $m \leq k' + 1$. Compte tenu de l'hypothèse $m \geq 2$ déjà formulée, on voit que m doit satisfaire à la relation

$$2 \leq m \leq k' + 1. \quad (5.12)$$

De plus, on suppose que m, m' (soumis jusqu'à maintenant à la seule condition $m' \geq m$) et la famille $(\tilde{V}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ sont tels que l'hypothèse classique de la théorie des éléments finis

$$\exists C > 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in H^{m'}(\bar{\Omega}) :$$

$$\inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|v - v_h\|_{m, \bar{\Omega}} \leq C \|v\|_{m', \bar{\Omega}} h^{m' - m} \quad (5.13)$$

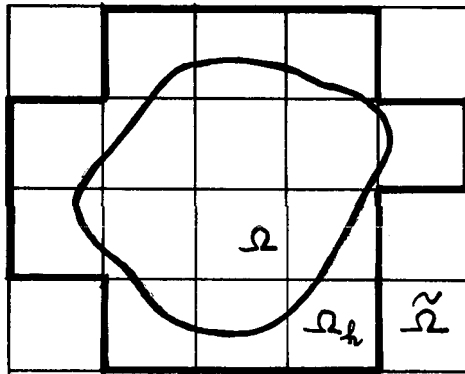
soit vérifiée. A priori, une condition nécessaire pour que (5.13) ait lieu est que l'on puisse définir le $\tilde{V}_h$ — interpolant d'un élément quelconque de $H^{m'}(\tilde{\Omega})$, ce qui, puisque $\tilde{V}_h \subset C^{k'}(\tilde{\Omega})$, implique (cf. A. Ženišek [15], A. Le Méhauté [8], dans le cas des éléments finis triangulaires) l'inclusion $H^{m'}(\tilde{\Omega}) \subset C^{2k'}(\tilde{\Omega})$ et par conséquent la condition sur m' :

$$m' \geq 2k' + 2. \quad (5.14)$$

Dans la suite, conformément à ce que l'on fait en pratique, on suppose que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } h \in \mathcal{H}, & \Omega^h \text{ est l'intérieur de la réunion} \\ \text{des } K \in \tilde{\mathcal{T}}_h \text{ qui coupent } \Omega \end{cases} \quad (5.15)$$

[on notera que Ω^h vérifie bien les hypothèses (5.1) et (5.2)]



et, pour tout $h \in \mathcal{H}$, on introduit l'espace V_h défini par

$$\{V_h \text{ est l'espace des restrictions à } \Omega^h \text{ des fonctions de } \tilde{V}_h. \quad (5.16)$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$ et pour tout $h \in \mathcal{H}$, on note alors $\sigma_{\varepsilon h}^{dh}$ l'unique solution du problème : trouver $\sigma_{\varepsilon h}^{dh} \in V_h$ solution de

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h}^{dh} \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \quad \langle \rho^d \sigma_{\varepsilon h}^{dh}, \rho^d v_h \rangle + \varepsilon (\sigma_{\varepsilon h}^{dh}, v_h)_{m, \Omega^h} = \langle \rho^d \tilde{f}, \rho^d v_h \rangle, \end{cases} \quad (5.17)$$

qui n'est autre que la formulation de (2.5) dans l'espace V_h défini (à partir de $\tilde{V}_h$) par (5.15) et (5.16).

On peut maintenant montrer un théorème général de convergence dans $H^m(\Omega)$ de l'approximant $\sigma_{\varepsilon h}^{dh}$ vers f .

THÉOREME 5.2 : *On suppose que les hypothèses (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.12), (5.13) et (5.14) sont vérifiées et que $f \in H^{m'}(\Omega)$. On suppose en outre que ε admet une borne inférieure strictement positive. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathcal{D} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$ convergeant vers 0 quand $(d, h) \rightarrow (0, 0)$ et des constantes $d_0 > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$\forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq d_0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \|\sigma_{\varepsilon h}^{dh} - f\|_{m, \Omega} \leq \varphi(d, h) + C \frac{h^{m'-m}}{d},$$

où $\sigma_{\varepsilon h}^{dh}$ est la solution de (5.17).

Démonstration

1) On a évidemment

$$\forall d \in \mathcal{D}, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad \|\sigma_{\varepsilon h}^{dh} - f\|_{m, \Omega} \leq \|\sigma_{\varepsilon h}^{dh} - \sigma_{\varepsilon}^{dh}\|_{m, \Omega} + \|\sigma_{\varepsilon}^{dh} - f\|_{m, \Omega}.$$

Puisque (théorème 5.1) $\lim_{(d, h) \rightarrow (0, 0)} \|\sigma_{\varepsilon}^{dh} - f\|_{m, \Omega} = 0$, on est ramené à étudier le terme $\|\sigma_{\varepsilon h}^{dh} - \sigma_{\varepsilon}^{dh}\|_{m, \Omega}$. Utilisant d'abord le corollaire (5.1), ensuite le lemme de Céa (cf. par exemple P. G. Ciarlet [2]) dans l'équation variationnelle (5.5), il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists C > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall d \in \mathcal{D}, \quad d \leq \eta, \quad \forall h \in \mathcal{H} : \\ \|\sigma_{\varepsilon h}^{dh} - \sigma_{\varepsilon}^{dh}\|_{m, \Omega} \leq C \left(\frac{\max(1, \varepsilon(d))}{\min(1, \varepsilon(d))} \right)^{1/2} \inf_{v_h \in V_h} \llbracket \sigma_{\varepsilon}^{dh} - v_h \rrbracket_{d, m, \Omega^h}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

or

$$\inf_{v_h \in V_h} \llbracket \sigma_{\varepsilon}^{dh} - v_h \rrbracket_{d, m, \Omega^h} \leq \llbracket \sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f} \rrbracket_{d, m, \Omega^h} + \inf_{v_h \in V_h} \llbracket \tilde{f} - v_h \rrbracket_{d, m, \Omega^h}.$$

2) Reprenant le début de la démonstration du théorème 5.1, on a

$$\forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad \langle \rho^d(\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f}) \rangle^2 = \varepsilon(\sigma_{\varepsilon}^{dh}, \tilde{f} - \sigma_{\varepsilon}^{dh})_{m, \Omega^h}.$$

Puisque la fonction ε est bornée il vient, compte tenu de (5.8) :

$$\exists C > 0, \quad \forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H}, \quad \langle \rho^d(\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f}) \rangle^2 \leq C |\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f}|_{m, \Omega^h}.$$

On en déduit que

$$\exists C > 0, \quad \forall (d, h) \in \mathcal{D} \times \mathcal{H},$$

$$\llbracket \sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f} \rrbracket_{d, m, \Omega^h}^2 \leq C \left[|\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f}|_{m, \Omega^h} + |\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f}|_{m, \Omega^h}^2 \right],$$

et le théorème 5.1 et le corollaire 5.2 entraînent alors que

$$\lim_{(d, h) \rightarrow (0, 0)} \left\| \left[\sigma_{\varepsilon}^{dh} - \tilde{f} \right] \right\|_{d, m, \Omega^h} = 0.$$

3) Utilisant alors l'hypothèse supplémentaire sur ε , la proposition (5.1) et l'hypothèse (5.13), le résultat suit avec $d_0 = \min(\eta, \theta)$. ■

Remarque 5.1

On ne voit pas comment on pourrait obtenir des majorations de l'erreur $\left\| \sigma_{\varepsilon h}^{dh} - f \right\|_{j, \Omega}$, $j = 0, \dots, m-1$, car le raisonnement par dualité de Aubin-Nitsche (cf. par exemple P. G. Ciarlet [2]) n'est pas utilisable ici.

Remarque 5.2

Le théorème 5.2 montre que l'approximant $\sigma_{\varepsilon h}^{dh}$ converge vers f dans $H^m(\Omega)$ quand $(d, h) \rightarrow (0, 0)$ si $\frac{h^{m'-m}}{d} \rightarrow 0$. Or, il résulte de (5.12) et (5.14) que $m' - m \geq k' + 1$, par conséquent la convergence a lieu pourvu que

$$\frac{h^{k'+1}}{d} \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

Si, pour tout $h \in \mathcal{H}$, P_h désigne le nombre de nœuds de l'espace V_h , alors la condition (5.19) est équivalente (dans les situations usuelles) à la suivante :

$$\frac{N(d)}{P_h^{k'+1}} \rightarrow 0.$$

Cette dernière condition montre que, comme on le souhaitait a priori, la convergence peut être obtenue en choisissant des espaces V_h dont la dimension est nettement inférieure au nombre de points de données, puisque $k' \geq 1$.

Mais, même si l'on suppose, ce qui est raisonnable, que $k' = k$, cela nécessite l'hypothèse (cf. (5.14)) :

$$f \in H^{2k+2}(\Omega).$$

En fait, il résulte de G. Strang [13] que, moyennant une propriété « d'uniformité des fonctions de base » de l'élément fini générique de V_h (qu'il est facile de vérifier pour les éléments finis quadrilatéraux de Bogner-Fox-Schmit), la convergence a lieu sous l'hypothèse (moins restrictive puisque, d'après (5.12), $m = 2$ si $k = 1$ et $m \leq 3$ si $k = 2$) :

$$f \in H^{m+2}(\Omega).$$

Remarque 5.3

Le théorème 5.2 montre que, sous la condition (5.19), l'approximant $\sigma_{\varepsilon h}^{dh}$ converge vers f lorsque, par exemple, le paramètre ε est fixé (quelconque). Mais il ne donne aucune indication sur le choix de ε .

Dans les exemples du paragraphe 6, ε a été pris assez petit pour approcher la solution *moindres carrés* σ_{0h}^{dh} (de semi-norme $|\cdot|_{m, \Omega^h}$ — minimale), solution de l'équation obtenue en prenant $\varepsilon = 0$ dans (5.17). Le problème de la convergence de σ_{0h}^{dh} vers f reste un problème ouvert.

Lorsque les données de Lagrange $\{f(a_i)\}_{i=1, \dots, N}$ sont supposées *entachées d'erreurs*, le choix du paramètre ε constitue un problème différent. Dans ce cas, sous l'hypothèse raisonnable du « bruit blanc », la meilleure méthode est probablement la *méthode de validation croisée* (cf. P. Craven, G. Wahba [3] et la bibliographie de cet article).

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Donnons deux exemples d'applications de la méthode d'ajustement du paragraphe 2. Dans chaque exemple

- on a pris pour Ω un ouvert rectangulaire de façon à discrétiser le problème (2.3) sur Ω lui-même ($\Omega = \Omega^h = \tilde{\Omega}$), au moyen d'E.F. de B.F.S. ;
- $m = 2$, $k = 1$ dans le cas de la classe C^1 et $m = 3$, $k = 2$ dans celui de la classe C^2 ;
- $\varepsilon = 10^{-6}$;
- X est homothétique à un même ensemble de 1 500 points aléatoirement distribués et $\tilde{\Omega}$ est subdivisé en 16 carrés égaux (notons que $\dim V_h = 100$ dans le cas de la classe C^1 et $\dim V_h = 225$ dans celui de la classe C^2) comme indiqué ci-dessous :

Les fonctions utilisées sont définies comme suit :

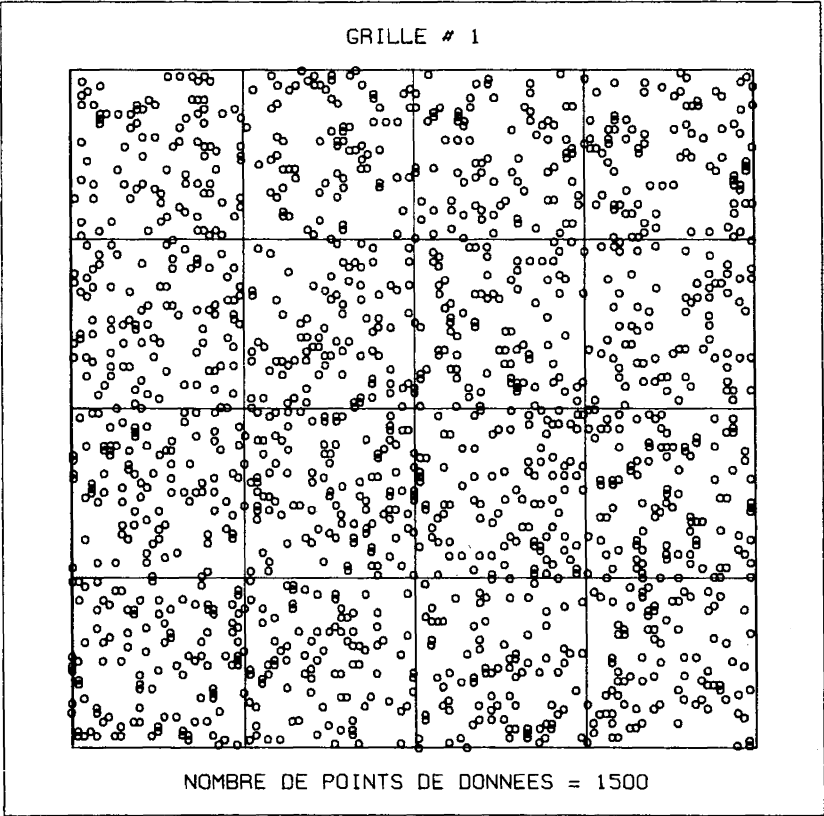
Exemple 1 :

$$f(x, y) = \sin [(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2], \quad \Omega =]0, 3[\times]0, 3[;$$

Exemple 2 :

$$f(x, y) = \cos \{8[(x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2]^{1/2}\}, \quad \Omega =]0, 1[\times]0, 1[.$$

Pour chaque exemple, on donne quatre vues différentes du graphe de la fonction exacte f et des approximants ϕ de classes C^1 et C^2 .



Le tableau ci-après indique dans chaque cas l'erreur relative

$$r(f) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} (\phi(m_i) - f(m_i))^2}{\sum_{i=1}^{10^4} (f(m_i))^2} \right)^{1/2},$$

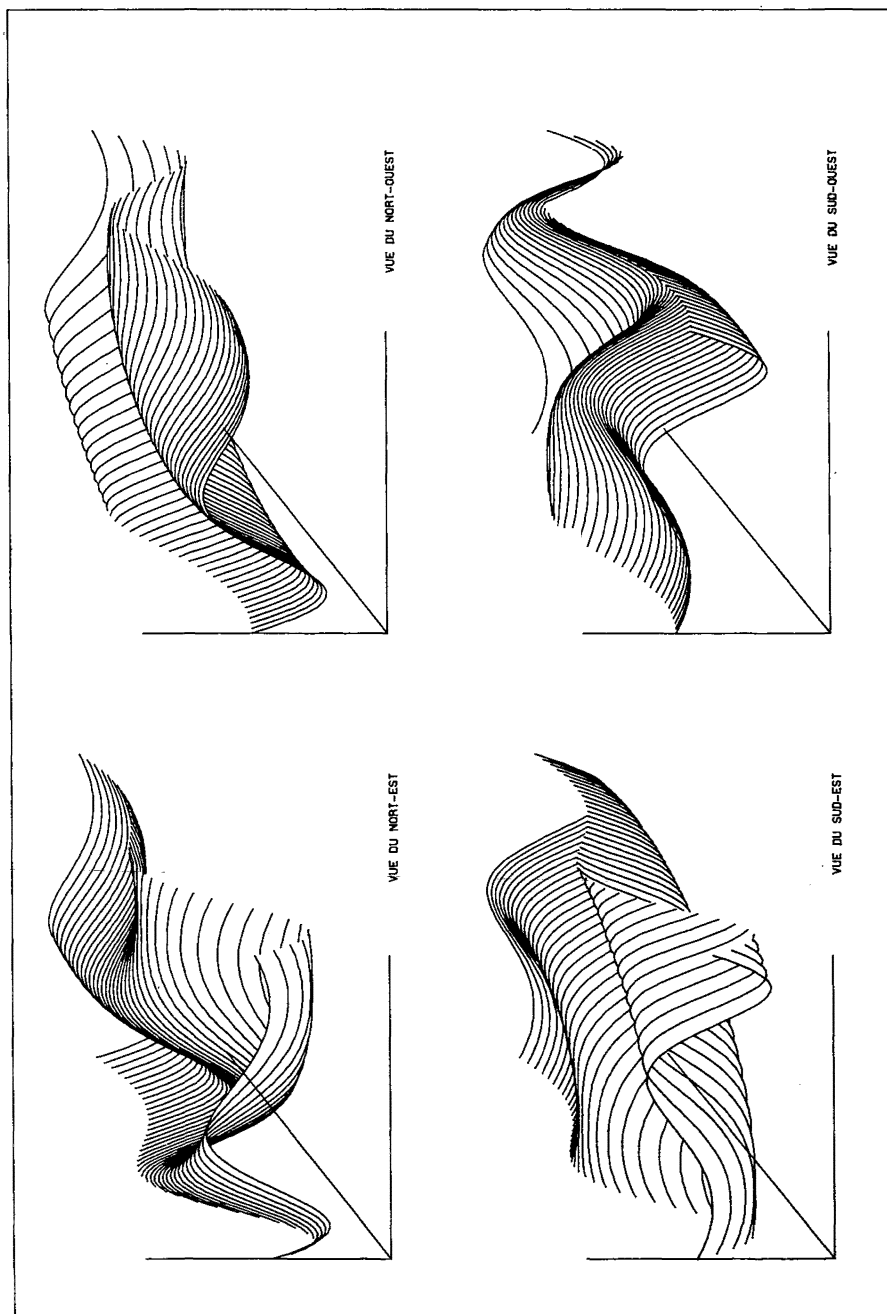
où les 10 000 points m_i constituent un échantillon de points de $\bar{\Omega}$ régulièrement répartis :

Exemple	1	2
Classe		
C^1	0.28×10^{-1}	0.62×10^{-2}
C^2	0.30×10^{-2}	0.25×10^{-2}

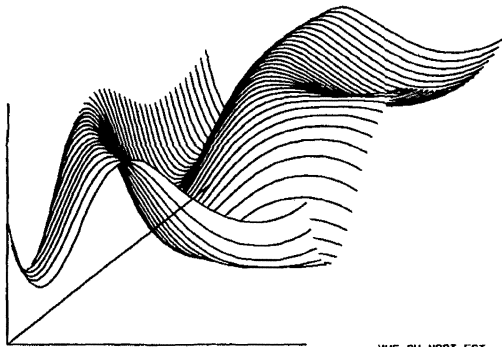
REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier nos collègues S. Arcangéli, qui a écrit le programme de tracé de surfaces que nous avons utilisé, et R. Royer, qui nous a aidé à implémenter l'algorithme.

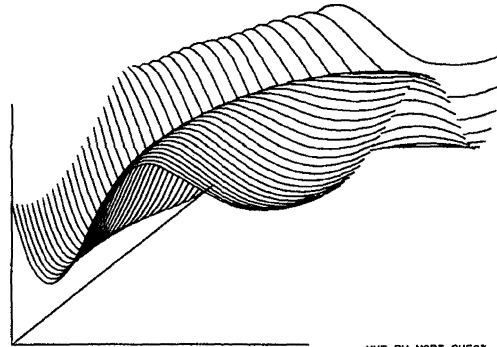
EXEMPLE 1



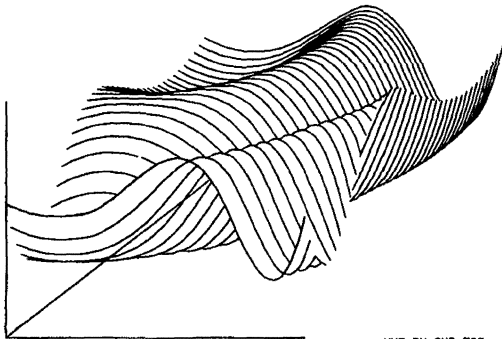
FONCTION $SIN((X-5)**2+(Y-5)**2)$
 INTERVALLE=(0,3)*(0,3)



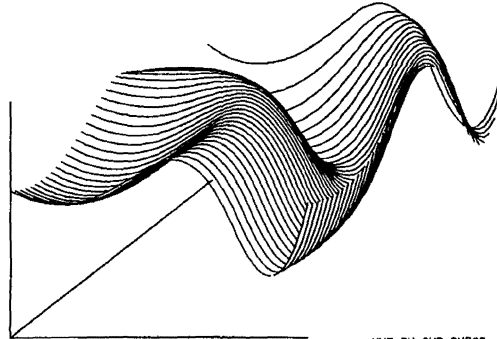
VUE DU NORT-EST



VUE DU NORT-OUEST



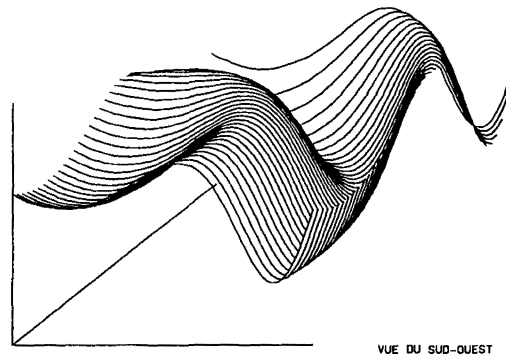
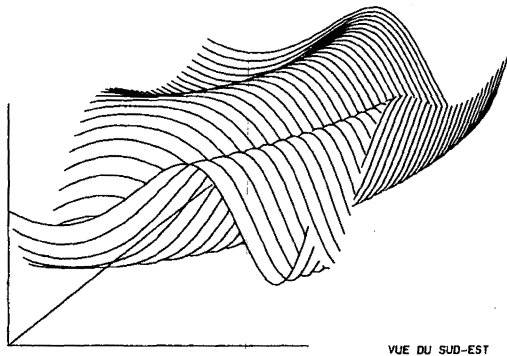
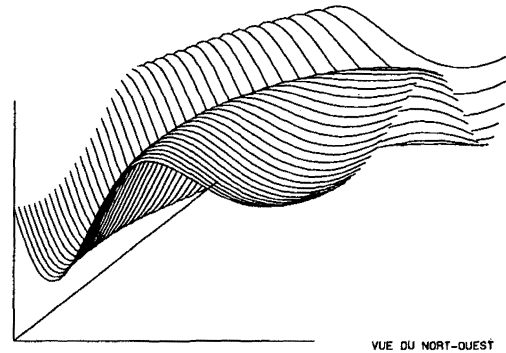
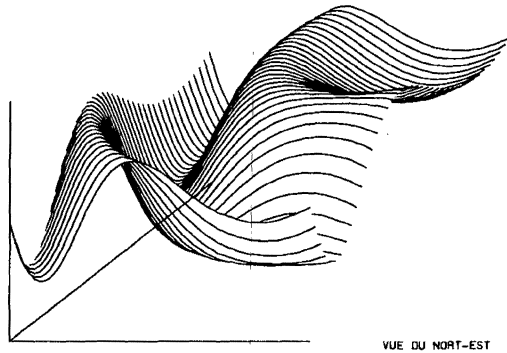
VUE DU SUD-EST



VUE DU SUD-OUEST

APPROXIMATION DE $\sin((X-0.5)^2 + (Y-0.5)^2)$
 EPS=1.0E-06
 INTERVALLE=(0.,3.)*(0.,3.)
 ERREUR RELATIVE EN NORME EUCLIDIENNE = 0.2785E-01

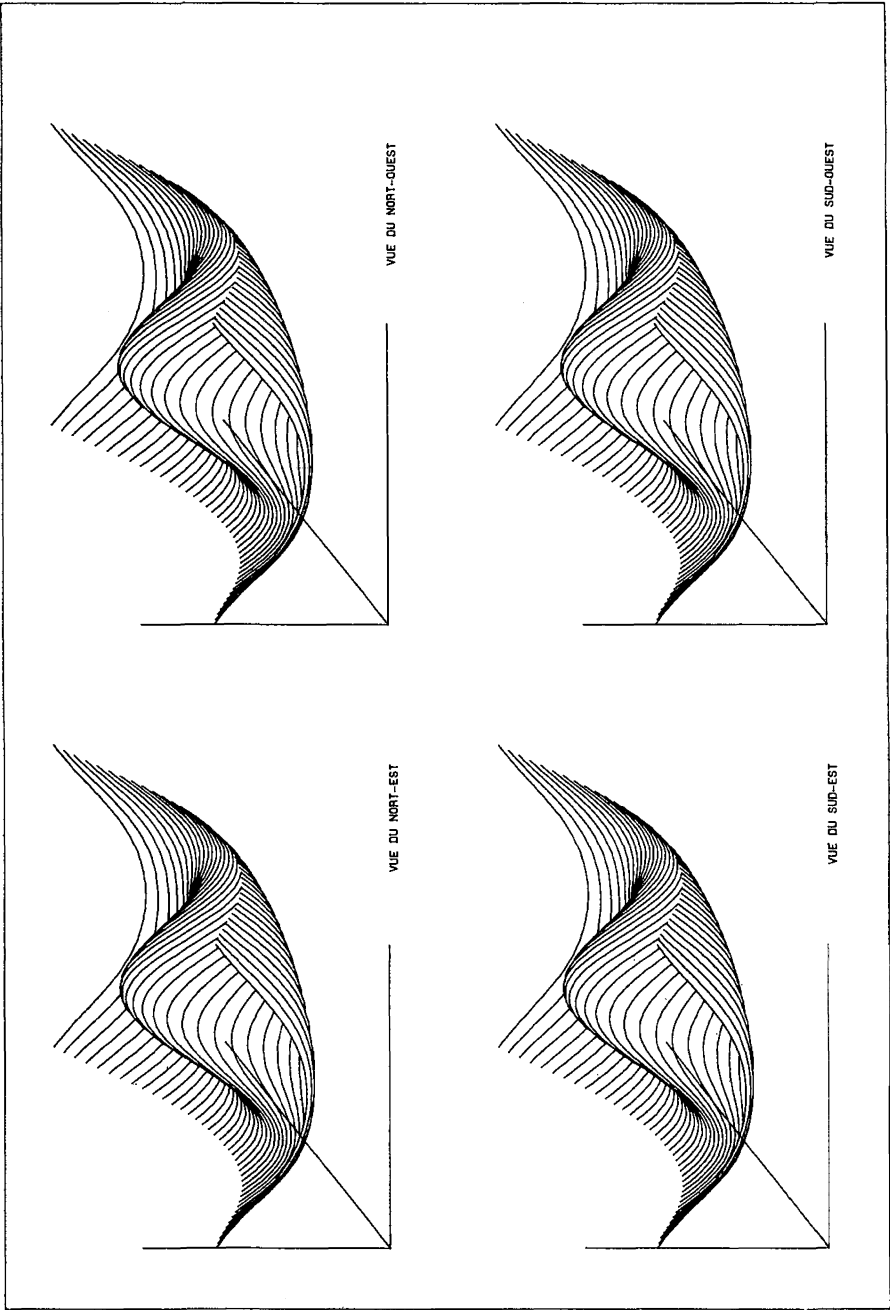
CLASSE C^1



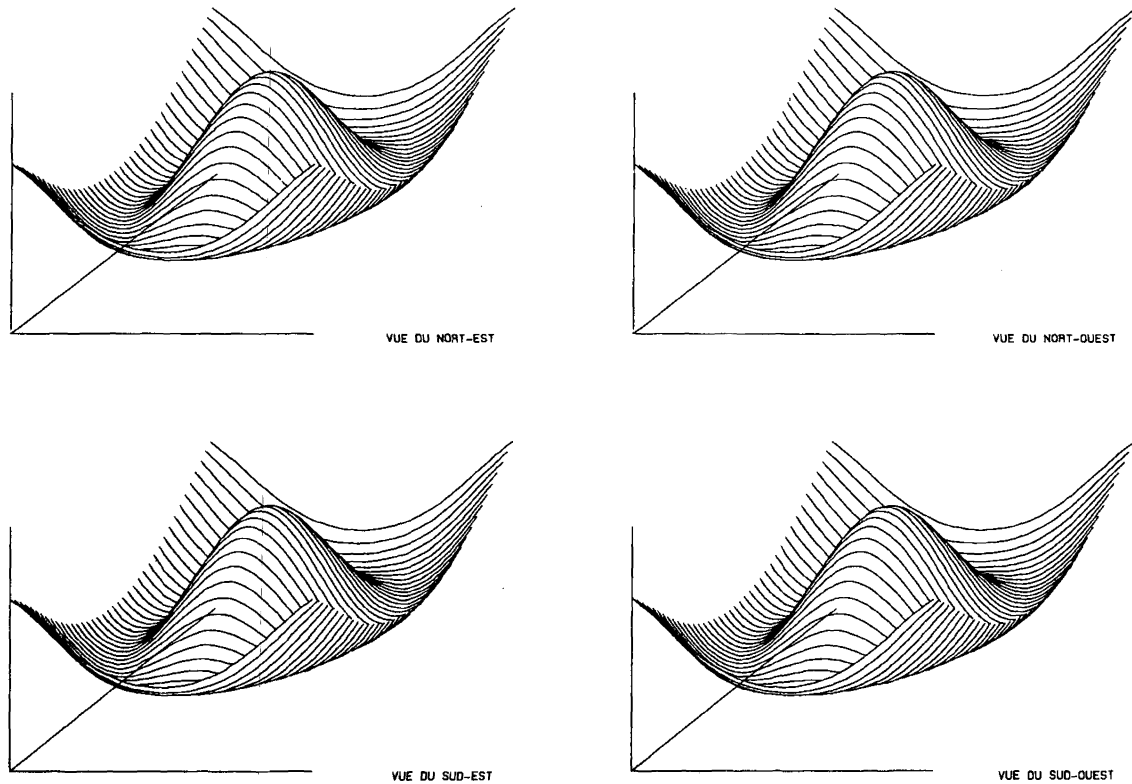
APPROXIMATION DE $\sin((X-5)^2 + (Y-5)^2)$
 $EPS=1.0E-06$
 $INTERVALLE=(0,3) \times (0,3)$
 ERREUR RELATIVE EN NORME EUCLIDIENNE = $0.3036E-02$
 GRILLE #1

CLASSE C^2

EXEMPLE 2

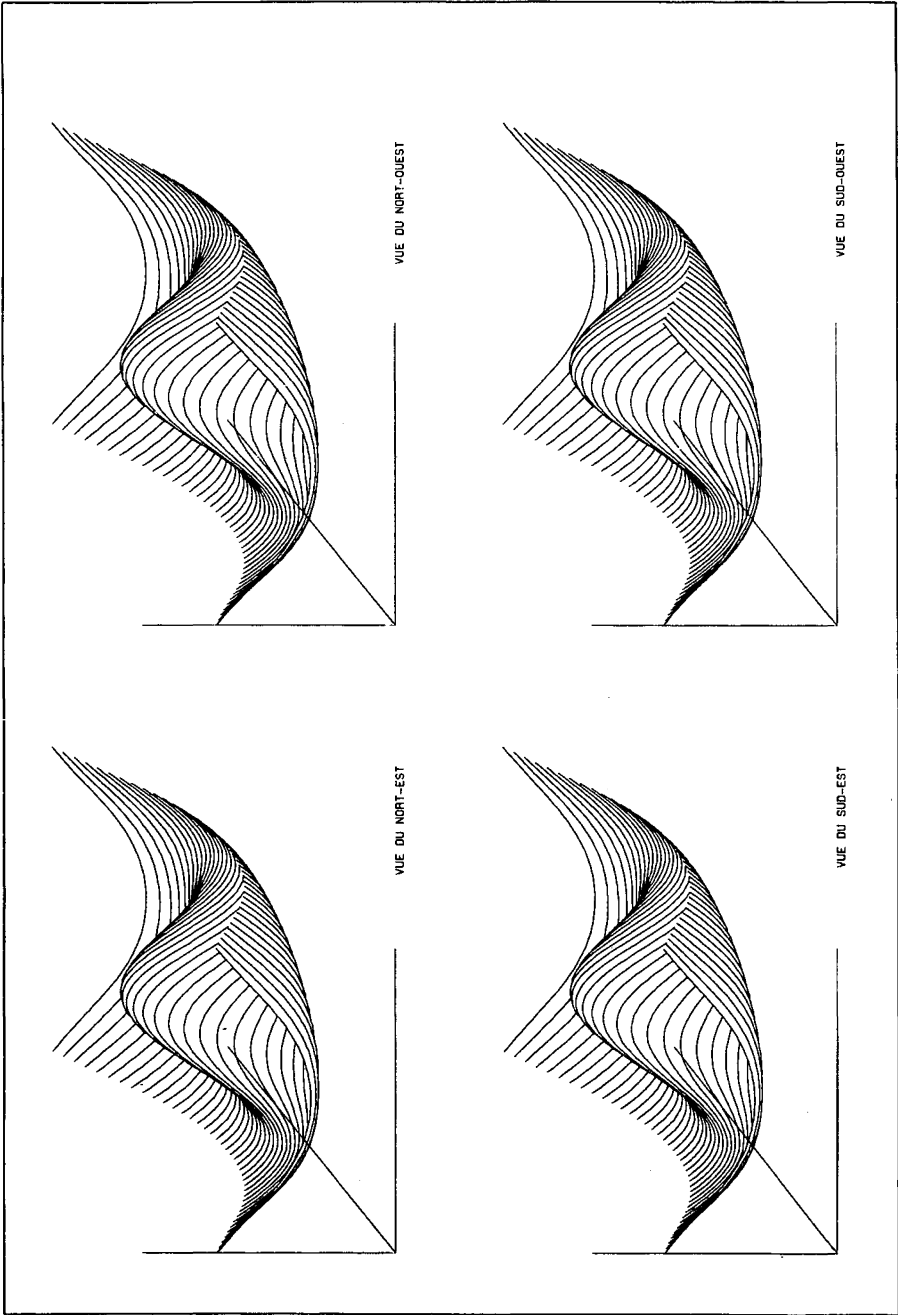


FONCTION $\cos(8*\sqrt{(X-.5)**2+(Y-.5)**2})$
INTERVALLE=(0.,1.)*(0.,1.)



APPROXIMATION DE $\cos(8 \cdot \sqrt{(X-0.5)^2 + (Y-0.5)^2})$
 EPS=1.0E-06
 INTERVALLE=(0.,1.)*(0.,1.)
 ERREUR RELATIVE EN NORME EUCLIDIENNE = 0.6228E-02
 GRILLE #1

CLASSE C^1



CLASSE C²

APPROXIMATION DE $\cos(8*\sqrt{(X-.5)**2+(Y-.5)**2})$
EPS=1.0E-06
INTERVALLE=(0.,1.)*(0.,1.)
ERREUR RELATIVE EN NORME EUCLIDIENE = 0.2545E-02
GRILLE #1

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATTEIA, *Fonctions « splines » définies sur un ensemble convexe*, Numer. Math., 12, 192-210 (1968).
- [2] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam (1978).
- [3] P. CRAVEN, G. WAHBA, *Smoothing Noisy Data with Spline Functions*, Numer. Math., 31, 377-403 (1979).
- [4] P. DIERCKX, *An Algorithm for Surface-Fitting with Spline Functions*, IMA J. of Numer. Anal. 1, 267-283, (1981).
- [5] J. DUCHON, *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces*, R.A.I.R.O., Anal. Numer., vol. 10, n° 12, 5-12 (1976).
- [6] R. FRANKE, *Scattered Data Interpolation : Tests of Some Methods*, Math. of Comp., vol. 38, n° 157, 181-200 (1982).
- [7] P. J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris (1972).
- [8] A. LE MEHAUTE, Thèse d'État, Rennes (1984).
- [9] R. MANZANILLA, Thèse, Pau (1986).
- [10] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Paris, Masson (1967).
- [11] L. PAIHUA, Thèse de 3^e cycle, Grenoble (1978).
- [12] G. RIBIÈRE, *Amélioration du résidu dans la résolution des systèmes linéaires au sens des moindres carrés*, Institut Blaise Pascal, Paris (1967).
- [13] G. STRANG, *Approximation in the Finite Element Method*, Numer. Math., 19, 81-98 (1972).
- [14] F. UTRERAS, Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble (1979).
- [15] A. ŽENIŠEK, *A General Theorem on Triangular Finite $C^{(m)}$ — Elements*, R.A.I.R.O., R-2, 119-127, (août 1974).