REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

JEAN HARDOUIN DUPARC

Une formule de Runge-Kutta

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, n° R1 (1970), p. 3-8

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_1_3_0>

R.I.R.O.
(4e année, N° R-1, 1970, p. 3-8)

UNE FORMULE DE RUNGE-KUTTA

par Jean HARDOUIN DUPARC

Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de l'Université de Bordeaux

Résumé. — *L'auteur propose une formule de rang trois pour la méthode de Runge-Kutta. Cette formule paraît avantageuse par sa simplicité et son efficacité vis-à-vis de l'erreur sur un pas. D'autres formules sont mentionnées dans la conclusion.*

Les formules de la méthode de Runge Kutta de rang 3 possèdent 2 degrés de liberté que l'on peut traduire par les abscisses relatives des pas intermédiaires; le choix de ces abscisses, à la discrétion de l'utilisateur, peut être utilisé de différentes façons. Contes et Reeves [1], dans un but d'économie sur le stockage des informations, choisissent des valeurs telles, que la contribution aux divers pas de la dérivée au début de l'intervalle soit constante, mais ce choix s'avère mauvais vis-à-vis de l'erreur sur un pas. Kuntzmann ([2] page 23 et [3] page 68) propose une formule optimale, effectivement excellente, en rendant égaux en valeur absolue les trois coefficients des éléments de l'erreur, fonction de la quatrième puissance du pas. Il s'agit là d'une certaine politique. En effet, on pourrait tout aussi bien être tenté de minimiser une autre norme du vecteur à 3 composantes que forment ces coefficients, plutôt que celle du maximum.

Songeant à l'une de ces possibilités, nous nous sommes penchés sur la configuration topographique de cette norme dans l'espace à deux dimensions des abscisses relatives aux pas intermédiaires.

Pour simplifier l'exposé, nous adopterons les notations et résultats de l'ouvrage: Problèmes différentiels de conditions initiales de Ceschino et Kuntzmann [3].

θ_1 et θ_2 étant les abscisses des pas intermédiaires, on a pour ces trois coefficients les expressions suivantes (cf. p. 67 [3]).

$$\text{terme en } C_3 : \alpha = \left| \frac{\theta_1 + \theta_2}{18} - \frac{\theta_1\theta_2}{12} - \frac{1}{24} \right|$$

$$\text{terme en } J_1C_2 : \beta = \left| \frac{\theta_1}{12} - \frac{1}{24} \right|$$

$$\text{terme en } KC_1 : \gamma = \left| \frac{\theta_2}{6} - \frac{1}{6} \right|$$

La norme qui nous intéresse est égale à $\alpha + \beta + \gamma$. Si nous dessinons les courbes de niveau de cette norme dans le plan θ_1, θ_2, nous remarquons que le minimum sur θ_1 et $\theta_2 \in (0,1)$ est atteint pour $\theta_1 = 1/2$ et $\theta_2 = 3/4$. (Les dites courbes de niveau se présentent sous forme d'as de carreau déformés.)

Nous avons alors pour les coefficients α, β, γ, le tableau suivant (cf. p. 71 [3]).

	θ_1	θ_2	α	β	γ	NORME
Nystrom	2/3	2/3	0,00418	0,0139	0,0139	0,032
Classique.	1/2	1	0	0	0,0417	0,042
Contes et Reeves.....	0,6265383	0,0754259	0,0066	0,0105	0,113	0,130
Optimum Kuntzmann.	0,46481623	0,76759188	0,0029	0,0029	0,0029	0,0087
{ Quasi optimum.....	1/2	3/4	0,0035	0	0	0,0035

Outre l'avantage d'atteindre le minimum de la norme de la valeur absolue, cette méthode conduit à des coefficients simples, ce qui peut être avantageux, au moins dans le calcul à la main, elle ne possède pas de coefficients négatifs et l'un des coefficients est nul.

Les tableaux de formules, selon les notations de l'ouvrage de Ceschino et Kuntzmann (p. 50 et suivantes [3]) sont :

TABLEAU A

1/2		
0	3/4	
2/9	3/9	4/9

TABLEAU B

1/4		
3/16	3/8	
4/9	3/9	2/9

TABLEAU K

$(1/2)^k$		
$(3/4)^k$		
$\dfrac{3k^2+6k-2}{3(k+1)(k+2)}$	$\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}$	$\dfrac{8}{3(k+1)(k+2)}$

Le coefficient d'erreur en C_2 pour $k = 2$ est 1/96 (cf. p. 76 [3]) égal à celui de la formule classique et très voisin de celui de la formule optimale qui est égal à $1,39/144 \simeq 1/100$; quand on choisit d'annuler le terme en $J_1 C_1$.

Donnons quelques valeurs des abscisses intermédiaires établies selon le principe de minimisation d'une norme du vecteur des coefficients des éléments de l'erreur pour les méthodes de Rang 3 et 4 de Runge Kutta :

Norme minimisée	Méthode de rang 3		Méthode de rang 4	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
	(Méthode décrite ci-dessus)			
Somme des valeurs absolues.	0,5	0,75	0,37	0,6
Euclidienne	0,496505	0,751747	0,368	0,593
	(Méthode optimale de M. Kuntzmann)			
Du maximum	0,464 816	0,767 592	0,35	0,584

Nous remarquons que les valeurs obtenues sont très voisines dans les deux cas.

Au rang 3, les trois méthodes donnent des résultats très voisins dans la plupart des cas.

Au rang 4, les différences obtenues tant sur les coefficients que sur les erreurs constatées sont encore plus faibles; nous pouvons tenter d'expliquer ce phénomène par le fait que au rang 4 il existe deux éléments de l'erreur insensibles aux variations des coefficients (termes en $K_1J_1C_1$ et $J_1^3C_1$, cf. [3] p. 81) et au rang 3 un seul (terme en $J_1^2C_2$, cf. [3] page 71).

Nous avons en outre constaté, au rang 4, que selon les exemples tantôt la formule de Boulton ($\theta_1 = 1/3$, $\theta_2 = 2/3$) était meilleure que les formules optimales ci-dessus, tantôt nous avions le phénomène inverse, mais dans chaque cas la formule de Kuntzmann ($\theta_1 = 2/5$, $\theta_2 = 3/5$), qui se situe à peu près entre la formule de Boulton et les formules optimales au sens que nous indiquons, donne un résultat intermédiaire également.

Il semble donc, en conclusion de cette étude que nous puissions recommander dans les deux cas une formule se situant au voisinage de ces optimas et de préférence la plus simple possible. C'est ainsi que nous recommanderons au rang 3 la formule objet de cet article, et au rang 4 la formule de Kuntzmann; au sujet des formules de rang 4, nous sommes portés à déconseiller la formule de Runge Kutta classique (malgré sa grande simplicité) ainsi que ses dérivées (Gill et Strachey) nous déconseillons encore plus les formules de Ince ($\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 1/2$) et Mineur ($\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 0$) qui s'avèrent décevantes dans la pratique.

Au cours de ces recherches nous avons également étudié des formules destinées au cas où les dérivées premières ne sont pas présentes dans l'équation; nous avons exposé quelques résultats obtenus dans cette direction au cours des « Journées nationales d'Analyse Numérique », organisées par l'AFCET à Bordeaux les 25, 26 et 27 septembre 1969 [4].

Donnons enfin quelques résultats numériques comparés concernant la formule quasi-optimum de rang 3, ci-dessus, sur des exemples d'équations différentielles qu'illustrent l'ouvrage [3] p. 70 et 71.

Équation $y' = -2ty^2 \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0{,}1$

t	| Erreur $\times 10^6$ |				
	NYSTROM	CLASSIQUE	CONTES ET REEVES	KUNTZMANN	QUASI-OPTIMUM
0,1	11	33	89	3	0
0,2	17	62	156	9	4
0,3	19	82	196	17	11
0,4	18	90	200	25	18
0,5	17	83	184	31	23
1,0	35	16	88	3	3
2,0	29	17	41	19	20

$y' = -ty \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0{,}1$

t	| Erreur $\times 10^6$ |				
	NYSTROM	CLASSIQUE	CONTES ET REEVES	KUNTZMANN	QUASI-OPTIMUM
0,1	1	5	11	1	0
0,2	3	8	22	0	0,1
0,3	3	13	32	2	0,4
0,4	4	16	40	2	1
0,5	5	19	46	3	1,5
1,0	8	22	49	7	4
2,0	33	27	20	21	23

$$y' = y - \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{2}} \qquad y(0) = 1 \qquad h = 0{,}1$$

t	| Erreur × 10^6 |				
	NYSTROM	CLASSIQUE	CONTES ET REEVES	KUNTZMANN	QUASI-OPTIMUM
0,2	3	2	3	2	2
0,4	7	5	7	5	5
1	23	15	22	14	15
2	74	47	70	44	50
3	210	134	200	126	142

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. D. CONTE et R. F. REEVES, A Kutta Third order procedure for solving differential equations requiring minimum storage, *Journal A.C.M. 3* (1956), p. 22-25.

[2] J. KUNTZMANN, Deux formules optimales du type Runge-Kutta, *Chiffres 2* (1959), p. 21-26.

[3] F. CESCHINO et J. KUNTZMANN, *Méthodes numériques*, Problèmes différentiels de conditions initiales, Dunod (Paris), 1963.

[4] J. HARDOUIN DUPARC, Deux résultats sur certaines formules particulières du type Runge-Kutta. Communication aux *Journées Nationales d'Analyse Numérique* de Bordeaux, AFCET, 25, 26 et 27 septembre 1969.