

GUY BOULAYE

**Sur l'ensemble ordonné des parties connexes
d'un graphe connexe**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 2, n° R1 (1968), p. 13-25

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_13_0

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES D'UN GRAPHE CONNEXE

par Guy BOULAYE

Résumé. — Étant donné un graphe connexe, on donne quelques résultats sur l'ensemble des parties connexes. Cet ensemble est plongé bijectivement dans un hypercube, définissant ainsi une fonction booléenne, attachée au graphe et caractéristique. On définit ensuite diverses opérations sur un ou deux graphes et on donne la fonction booléenne attachée au résultat d'une opération.

Sur la fonction booléenne elle-même peuvent se faire des recherches telles que la détermination des chemins entre des sommets donnés, etc.

ENSEMBLE ORDONNE DES PARTIES CONNEXES D'UN GRAPHE CONNEXE

Pour abrégé, nous dirons « n -graphe » pour « graphe connexe à n sommets ».

Soit X l'ensemble des sommets d'un graphe connexe à $n = |X|$ sommets. On sait que l'ensemble $P(X)$ des parties de X est un treillis de Boole de dimension n .

A un élément X_i de $P(X)$ correspond un monôme booléen $m(X_i)$ dont la signification est simple : si un sommet A n'appartient pas à la partie X_i , la variable A figure dans ce monôme sous forme complémentée ($\bar{A}$), si A appartient à X_i , la variable A apparaît dans le monôme sous forme directe. Exemple : soit $X = \{A, B, C, D, E, F\}$, à $\{A, B, C\}$ correspond le monôme $ABC\bar{D}\bar{E}\bar{F}$. A l'ensemble X lui-même correspond le monôme où toutes les variables sont écrites sous forme directe.

L'ensemble des parties connexes est un sous-ensemble de $P(X)$, ordonné par l'inclusion. Au graphe G lui-même, on fait correspondre la fonction booléenne somme des monômes attachés à ses parties connexes, c'est-à-dire la fonction dont l'ensemble représentatif sur le n -cube est justement isomorphe à l'ensemble des parties connexes de G .

Un majorant commun à deux parties connexes est une partie connexe les incluant toutes deux. Mais, pour deux parties connexes il n'existe pas forcément de borne supérieure, comme le montre l'exemple suivant du cycle à 4 éléments $ABCD$ où $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ et $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ ont deux majorants minimaux $AB\bar{C}\bar{D}$ et $A\bar{B}CD$.

Minorant commun : C'est une partie connexe contenue à la fois dans chaque partie. Ce peut être la partie vide. Deux parties connexes n'ont pas forcément une borne inférieure. Les parties $AB\bar{C}\bar{D}$ et $A\bar{B}CD$, dans le réseau ci-dessus, possèdent deux minorants maximaux $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ et $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$.

Théorème : *L'ensemble E_n , ordonné par l'inclusion des parties connexes d'un n -graphe est un treillis si et seulement si les p éléments de tout cycle de longueur p forment un graphe complet à p sommets.*

Preuve : S'il n'y a pas de cycle, le graphe est un arbre et on sait qu'alors E_n est un treillis [1].

Considérons le cas où il y a un cycle ou plusieurs satisfaisant tous les hypothèses du théorème. Soit deux parties connexes non comparables A et B . Si l'intersection ensembliste $A \cap B$ est vide ou ne contient qu'un sommet, elle est bien connexe. Considérons donc le cas où $A \cap B$ contient au moins deux sommets.

Si $A \cap B$ ne comporte aucun élément appartenant à un cycle, avec tout couple de sommets, $A \cap B$ contient la chaîne qui les joint et par suite l'intersection est connexe. Ainsi, la non-connexité de $A \cap B$ ne peut provenir que d'éléments de cycle. Supposons donc que l'intersection contienne au moins deux éléments de cycles; soit a et b ceux-ci. Comme le cycle est un graphe complet, a et b sont jointifs et $A \cap B$ est connexe.

Sous les hypothèses du théorème, les parties connexes forment donc une famille de Moore dans l'ensemble des parties, et par suite forment elles-mêmes un treillis.

Par contre s'il existe un cycle dont 2 éléments ne sont pas jointifs, nous avons vu que l'intersection de deux parties connexes peut ne pas être connexe et qu'il peut alors exister deux minorants maximaux des deux parties.

Remarquons enfin que sous les hypothèses du théorème, $\text{Sup}(A, B)$ est bien déterminée et si $A \cap B = \emptyset$, il existe une chaîne minimale joignant A et B et une seule.

PROPRIETE DU TREILLIS

Dans un n -graphe où les sommets de tout cycle (s'il y en a) forment un graphe complet, les parties connexes forment un treillis T_n et :

1. T_n est codable dans le n -cube B^n c'est-à-dire qu'il existe une application h isotone de T_n dans B^n , telle que :

$$\forall \{X, Y\}, \{X, Y\} \in T_n, X \neq Y \Rightarrow h(X) \neq h(Y)$$

2. Toute chaîne maximale joignant $\text{Min}(T_n)$ à $\text{Max}(T_n)$ est de longueur n .

3. Les atomes sont les seuls éléments $\cup$ -irréductibles de T_n .

4. Tout sous-treillis de T_n , ne contenant pas $\text{Min}(T_n)$ est distributif (démonstration analogue à celle de [1]).

Les trois premières propriétés entraînent que le treillis est $\cup$ -semi-modulaire et générable par extensions successives [3].

Inversement, on montre qu'un treillis fini satisfaisant les trois premières conditions précédentes et la suivante :

« Tout sous-treillis ne contenant pas le minimum est $\cap$ -semi-modulaire » est le treillis des parties connexes d'un ensemble connexe [3].

Chemins

Dans un graphe, les chemins ont un rôle privilégié. Ils forment un ensemble ordonné pour l'inclusion et nous allons établir à ce sujet un théorème reprenant l'hypothèse du précédent.

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que les chemins d'un graphe connexe forment un treillis pour l'inclusion est que :

- 1) Il existe un chemin hamiltonien,
- 2) les sommets de tout cycle (s'il y en a) forment un graphe complet.

Preuve : Les deux parties de la condition sont nécessaires. C'est évident pour la première. Pour la seconde il suffit de considérer à nouveau le cycle à 4 éléments. La condition est suffisante puisqu'alors l'intersection ensembliste est toujours un chemin et les chemins forment alors une famille de Moore dans l'ensemble des parties connexes, ensemble qui est lui-même un treillis en vertu de la seconde partie de la condition.

Fonction booléenne attachée à un n -graphe

Soit E_n l'ensemble ordonné, immergé dans le n -cube, des parties connexes du n -graphe. Nous attachons au n -graphe, la fonction booléenne F dont l'ensemble représentatif dans B^n est E_n .

Soit t le dernier sommet rajouté, lors de la construction du graphe, voisin de $a, b, c, \dots g$ et soit X la somme des lettres désignant les sommets autres que $t, a, b, c \dots g$. Alors F est de la forme :

$$(1) \quad F = f \cdot (a + b + c + \dots + \bar{t}) + (\bar{X}) \quad \psi(t, abc \dots g)$$

avec les précisions :

- 1) f est, dans B^{n-1} , la fonction attachée au $(n-1)$ graphe ne contenant pas t .
- 2) ψ est la fonction attachée au n -arbre de centre t et à $(n-1)$ feuilles $a, b, c, \dots g$ (voir plus loin).

Fonction attachée à un graphe complet

Dans un graphe complet, toute partie est connexe et par suite, la fonction attachée à un graphe complet est la fonction unité.

Opérations sur un n -graphe

1. Création d'une branche

Soit h et k les deux sommets entre lesquels on se propose de rajouter une branche.

Avant modification, la fonction attachée s'écrit :

$$hkf_3 + h\bar{k}f_2 + \bar{h}kf_1 + \bar{h}\bar{k}f_0$$

Considérons un monôme $m \cdot h \cdot \bar{k}$, après adjonction de la branche hk , il existe aussi la partie connexe mhk . De même pour un monôme en $\bar{h}k$. La nouvelle fonction s'obtient donc en supprimant la lettre k dans les monômes en $h\bar{k}$ et la lettre h dans les monômes en $\bar{h}k$.

2. Dédoublément d'un sommet

Soit t voisin de $(a, b, c, \dots)$. Dédoubler t , en t_1 et t_2 , consistera à avoir 2 sommets t_1 et t_2 voisins des mêmes $a, b, c, \dots$ et liés par une branche (fig. 1).

Soit f la fonction attachée avant dédoublément. Pour obtenir la fonction attachée après dédoublément de t , faisons $t = t_1$ dans f , (ce n'est qu'une

notation). Puis rajoutons t_2 voisin de $(a, b, c, \dots)$ par la formule (1) et enfin créons une branche entre t_1 et t_2 .

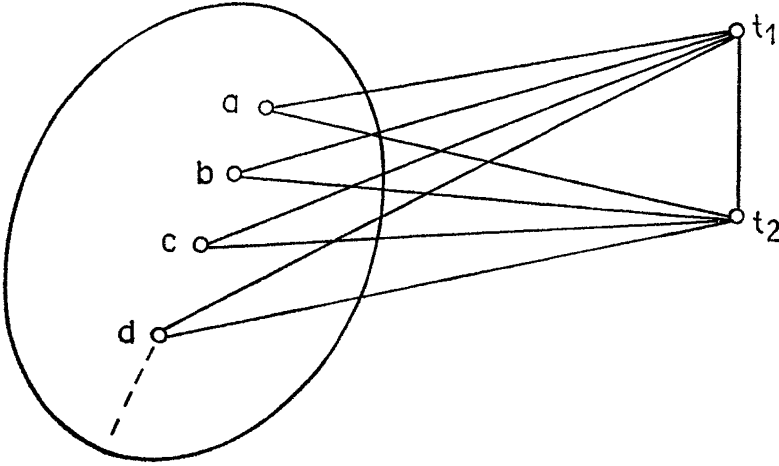


Figure 1

3. Fusion de deux sommets jointifs (soit h et k ces deux sommets)

Il faut annuler les monômes en $\bar{h}k$ ou $h\bar{k}$, c'est-à-dire faire $h = k$ dans la fonction attachée f . (Il n'y a donc pas lieu de mettre f sous une forme spéciale.)

4. Fusion de deux sommets non jointifs

Soit h et k les deux sommets à fusionner en un seul, h . Il faut d'abord créer une branche entre h et k et l'on est ramené à fusionner deux sommets jointifs.

La fonction attachée :

$$hkf_3 + h\bar{k}f_2 + \bar{h}kf_1 + \bar{h}\bar{k}f_0$$

devient après création de la branche hk :

$$hkf_3 + hf_2 + kf_1 + \bar{h}\bar{k}f_0$$

puis on fait $k = h$, d'où :

$$h(f_3 + f_2 + f_1) + \bar{h}f_0$$

Opération $\vee$ sur deux graphes connexes disjoints

Nous appellerons ainsi la mise en commun d'un sommet par deux graphes connexes disjoints $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, de fonctions associées G et H .

Nous noterons $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ le graphe obtenu et $G \vee H$ sa fonction booléenne associée.

Le résultat dépend bien sûr du sommet choisi dans chaque graphe pour ne faire plus qu'un sommet du graphe résultant. Nous supposons pour simplifier que ce sommet porte le même nom, l , dans $\mathcal{G}$ et dans $\mathcal{H}$ (fig. 2).

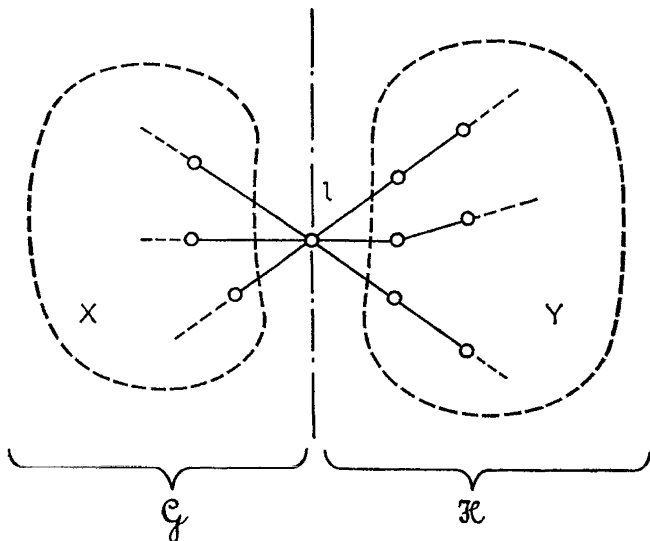


Figure 2

Mettons G et H sous la forme :

$$G = lG_1 + \bar{l}G$$

$$H = lH_1 + \bar{l}H_2$$

Désignons par X et Y les sommes des variables autres que l dans G et H respectivement.

Pour obtenir $G \vee H$, envisageons d'une part, les sous-graphes de $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ qui contiennent l et d'autre part ceux qui ne contiennent pas l .

On obtient :

$$G \vee H = l \cdot G_1 \cdot H_1 + \bar{l}(G_2 \cdot \bar{Y} + H_2 \bar{X})$$

Opération)—(sur deux graphes connexes disjoints

Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux graphes connexes disjoints; $\mathcal{G}$)—($\mathcal{H}$ est le graphe obtenu en établissant une branche entre g , sommet de $\mathcal{G}$, et h , sommet de $\mathcal{H}$ (fig. 3).

Nous noterons G)—(H la fonction associée à $\mathcal{G}$)—($\mathcal{H}$. Mettons G et H sous la forme :

$$G = gG_1 + \bar{g}G_2 \quad \text{et} \quad H = hH_1 + \bar{h}H_2$$

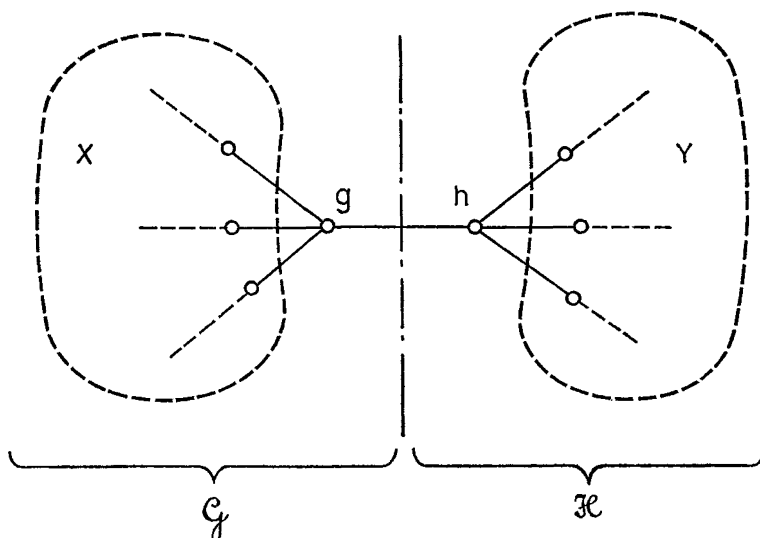


Figure 3

Désignons par X et Y la somme des variables respectivement autres que g dans G , et autres que h dans H .

Pour établir G)—(H , envisageons les sous-graphes de $\mathcal{G}$)—($\mathcal{H}$

- 1) ne contenant ni g ni h
- 2) contenant un et un seul des 2 sommets g et h
- 3) contenant à la fois g et h :

On obtient :

$$(3) \quad \boxed{G(H = \bar{g}\bar{h}(G_2 \cdot \bar{Y} + H_2 \cdot \bar{X}) + g\bar{h}(G_1 \cdot \bar{Y}) + \bar{g}h(H_1 \cdot \bar{X}) + gh(H_1 \cdot G_1))}$$

CAS PARTICULIER D'UN ARBRE

Rappelons deux définitions :

Arbre : graphe connexe sans circuit. Nous dirons au moins provisoirement « n -arbre » pour « arbre à n -sommets ».

Sous-arbre : sous-graphe connexe d'un arbre (ainsi, la partie vide est un sous-arbre).

Treillis des sous-arbres d'un n -arbre

Les sous-arbres d'un n -arbre forment un treillis possédant les propriétés générales du treillis de parties connexes d'un graphe connexe où les sommets de tout cycle forment un graphe complet.

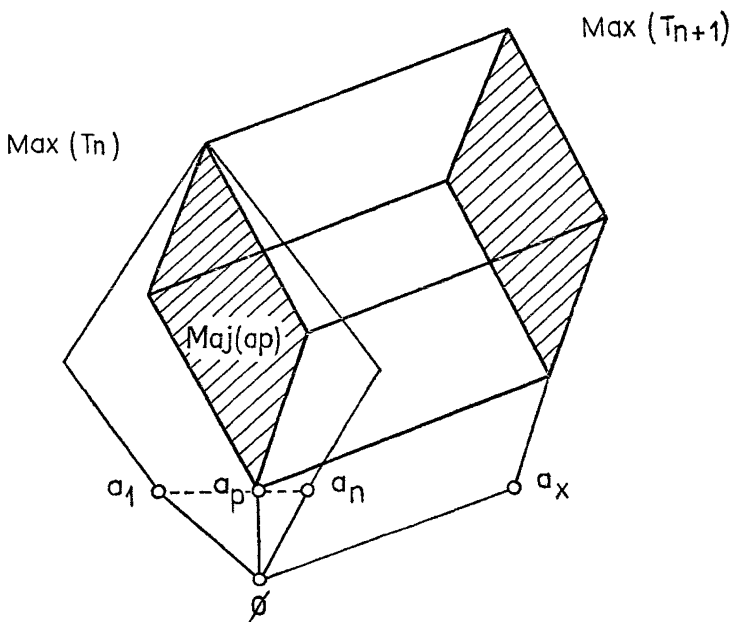


Figure 4

Notons particulièrement que :

Soit $A = \{a_1, \dots, a_p, \dots, a_n\}$ un n -arbre éventuellement réduit à un sommet et T_n le treillis de ses sous-arbres. Ajoutons à A un sommet a_x , a_x étant voisin de a_p , et soit T_{n+1} le treillis des sous-arbres du $(n+1)$ -arbre obtenu. T_{n+1} est

obtenu par une extension de T_n isomorphe à l'ensemble $Maj(a_p)$ des majorants de a_p dans T_n . Pour obtenir T_{n+1} , on ajoute à T_n l'ensemble obtenu par translation d'un rang de $M(a_p)$, ce qu'illustre la figure 4. Notons que $Maj(a_p)$ est un sous-treillis connexe de T_n .

Bornes supérieure et inférieure du nombre $N(n)$ des sous-arbres d'un n -arbre

On montre [3] que la chaîne à n sommets ou « n -chaîne » est le n -arbre ayant le moins de sous-arbres et ils sont au nombre de :

$$\left(1 + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

On montre également (*ibid.*) que, parmi les n -arbres, l'arbre ayant le plus de sous-arbres est celui de la figure 5, dont le nombre des sous-arbres est

$$(2^{n-1} + n).$$

et finalement :

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq N(n) \leq 2^{n-1} + n$$

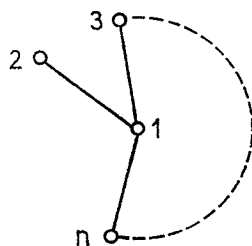


Figure 5

REMARQUE : Quand n croît indéfiniment, $\left(\frac{2^{n-1} + n}{2^n}\right) \downarrow \frac{1}{2}$ et, par suite, l'ensemble repré-

sentatif des sous-arbres du n -arbre à $(n-1)$ feuilles tend à n'occuper que la moitié du n -cube. Cet ensemble représentatif contient le $(n-1)$ cube formé par les sous-arbres contenant le centre de l'arbre.

Remarque sur le centre de l'arbre

On pourrait penser que le centre de l'arbre (au sens de sommet dont le maximum des distances aux autres sommets est minimum) est le sommet appartenant au plus grand nombre de sous-arbres. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple suivant :

Soit l'arbre de la figure 6, dont nous construisons le treillis des sous-arbres (fig. 7).

Le centre est 3, or :

$$|Maj(3)| = 15$$

et :

$$|Maj(4)| = 16 > 15$$

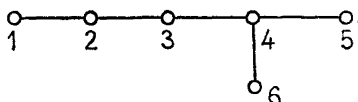


Figure 6

De même qu'il peut y avoir plusieurs centres, il peut y avoir plusieurs sommets tels que le nombre des sous-arbres auxquels ils appartiennent, séparément, soit maximal.

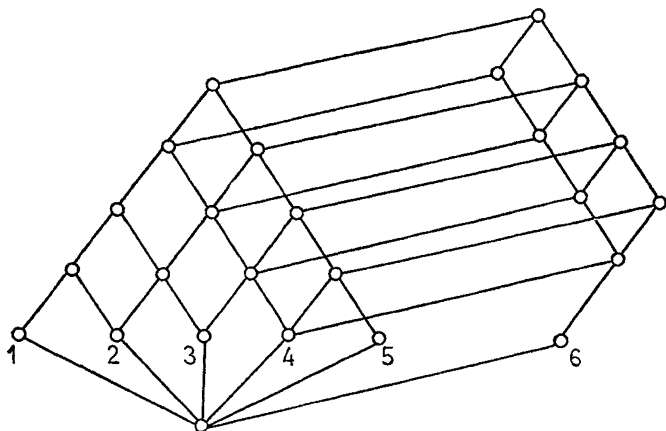


Figure 7

Dans le même ordre d'idée, on peut chercher quels sont les couples de sommets qui appartiennent tous les deux au plus grand nombre de sous-arbres.

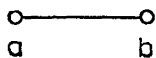


Figure 8

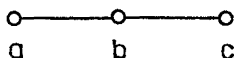


Figure 9

Il est clair déjà que deux tels sommets A et B sont voisins. En effet, s'ils ne l'étaient pas, soit C un sommet intermédiaire. C appartient déjà à tous les p sous-arbres contenant à la fois A et B . Or C et B appartiennent au moins à $(P + 1)$ sous-arbres : les p précédents et la chaîne joignant C et B .

Rechercher ces couples revient donc à chercher les éléments de rang 2 du treillis du n -arbre, dont le nombre des majorants est maximal. Très souvent il y a un seul tel couple.

Plus généralement, les groupes de p sommets appartenant ensemble au nombre maximum des sous-arbres, sont donnés par les éléments de rang p dont le nombre des majorants est maximal.

Relation « entre » dans un n -arbre

Soit A, B et C trois sommets. Si C est entre A et B , C fait partie de tout sous-arbre contenant $\{A, B\}$ d'où :

et

$$\text{Maj}(A, B) = \text{Maj}(A, C)_n \text{Maj}(A, B)$$

$$\text{Maj}(A, B) \subseteq \text{Maj}(AC) \cup \text{Maj}(B, C) \subseteq \text{Maj}(C)$$

(l'inclusion est même stricte).

Inversement, $\text{Maj}(C) \supset \text{Maj}(A, B)$ entraîne que tout sous-arbre contenant $\{A, B\}$ contient aussi C , dans C est en A et B , ce que nous noterons $\mathcal{E}(A, C, B)$ et :

$$\mathcal{E}(A, C, B) \Leftrightarrow \text{Maj}(C) \supset \text{Maj}(A, B)$$

On peut exprimer $\mathcal{E}(A, C, B)$ en termes de jointivité [2] :

$$\mathcal{E}(A, C, B) \Leftrightarrow \exists \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$X_1 = A, X_n = B, X_i = C$$

$$\mathcal{J}(X_1, X_2) \quad \mathcal{J}(X_2, X_3) \dots \mathcal{J}(X_{n-1}, X_n)$$

Fonction booléenne attachée au treillis des sous-arbres d'un n -arbre

Appliquons la formule (1).

Soit $a, b, \dots, w, x, y$ les sommets du n -arbre, où y est le dernier sommet ajouté, voisin de x .

Soit F la fonction attachée au n -arbre et $f = f(a, b, \dots, w)$ la fonction attachée au $(n-1)$ -arbre ne comportant pas y . Désignons par $\bar{V}$ la somme des variables autres que x et y :

$$F_{(a,b,\dots,w,x,y)} = f_{(a,b,\dots,w,x)} \cdot (x + \bar{y}) + \bar{V}$$

La fonction F peut aussi se mettre sous la forme :

$$F = (Y_1 x + \bar{a}\bar{b}\bar{c} \dots \bar{x})y + (Y_1 x + \bar{a}\bar{b} \dots \bar{x} + Y_2 \bar{x})\bar{y}$$

où Y_1 et Y_2 sont des fonctions non nulles indépendantes de x et y , telles que :

$$\forall X, X \neq \text{Max}(T_n), \exists X', \quad X' \succ X \quad Y(X') \geq Y(X)$$

entre autres :

$$Y(1, 1, \dots) = 1$$

Inversement si une fonction peut prendre la forme précédente, on peut sans ambiguïté construire le n -arbre correspondant.

Quelques fonctions particulières

- La chaîne à 2 éléments (fig. 8) a pour fonction attachée $f_{(a,b)} = 1$.
- *Rajoutons un voisin c à b* (fig. 9).

Appliquons la formule :

$$F(a, b, c) = 1 \cdot (b + \bar{c}) + \bar{a} = \bar{a} + b + \bar{c}$$

Rajoutons un voisin d à b : $abcd$

$$\begin{aligned} F(abcd) &= (\bar{a} + b + \bar{c})(c + \bar{d}) + \bar{a}\bar{b} \\ &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{d} + bc + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b} \end{aligned}$$

dont une base première est :

$$F(abcd) = bc + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}$$

Fonction attachée au n -arbre à $(n - 1)$ feuilles

On dit aussi « étoile » à $(n - 1)$ branches.

C'est la fonction $t + m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ où t désigne le centre de l'arbre et où m_i est un produit de $(n - 2)$ lettres accentuées, autres que t . Soient $a, b, c, \dots$ les feuilles. Nous désignerons cette fonction par $\psi(t, abc\dots)$.

Dans B^n cette fonction comprend l'hyper-cube B^{n-1} en t et tous les monômes de rang ≤ 1 .

$$\boxed{\psi(t, abc \dots) = t + \sum_{i=1}^{n-1} m_i} \quad (2)$$

Pour $n = 2$ $\psi(t, a) = 1$

$$n = 3 \quad \psi(t, ab) = t + \bar{a} + \bar{b}$$

$$n = 4 \quad \psi(t, abc) = t + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}$$

$$n = 5 \quad \psi(t, abcd) = t + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{a}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Conséquence d'un homomorphisme à classes connexes [2] sur la fonction attachée à un n -arbre.

Nous remarquons sur les formules (2) et (3) que l'on a passé de la fonction attachée à $\mathcal{G}$ — ($\mathcal{H}$ à la fonction attachée à $\mathcal{G}$) ($\mathcal{H}$ en faisant $h = g$ dans la première.

Ceci montre qu'étant donné la fonction G associée à un n -arbre, on obtient la fonction G^0 associée à un p -arbre ($p \leq n$) homomorphe en réduisant à la même variable, dans G , les variables correspondant à des sommets qui sont dans la même classe. Nous dirons que G^0 est homomorphe à G .

On sait 1 que les G^0 forment un treillis de Boole d'ordre $(n - 1)$.

Recherche de la plus petite classe connexe contenant des sommets distingués $A, B, C \dots$

Notons que dans le cas de 2 sommets A et B , cela revient à trouver des sommets constituant la chaîne liant A et B . Plus généralement, il s'agit de trouver les sommets $L, M, N, \dots$ constituant le plus petit sous-arbre contenant $A, B, C, \dots$ (fig. 8).

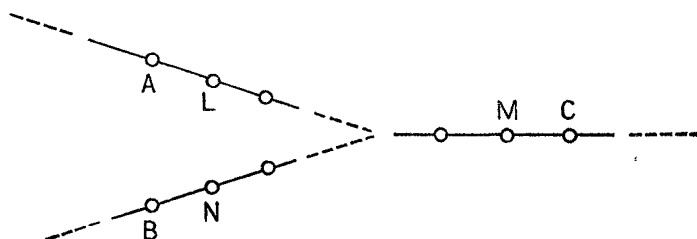


Figure 10

La recherche consiste sur la fonction attachée à l'arbre, à chercher le monôme m_1 , de rang minimal en $A \cdot B \cdot C \dots$. Soit $L, M, N \dots$ les lettres qui apparaissent en direct (lettres autres que $A, B, C \dots$), alors $L, M, N, \dots$ sont entre $A, B, C \dots$ et appartiennent à la plus petite classe d'homomorphismes qui fusionnent $A, B, C \dots$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BOULAYE, *Sous-arbres d'un arbre et homomorphismes à classes connexes*, I.C.C. Rome, juillet 1966.
- [2] J. KUNTZMANN, *Cours de Théorie des Réseaux*, Cours professé à la Faculté des Sciences de Grenoble, 1966-1967.
- G. BOULAYE, *Immersion d'un treillis dans un autre. Codage booleen d'un treillis*.
- [3] Séminaires de logique de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble, 1967.