JOURNAL
de Théorie des Nombres
de BORDEAUX

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Frédéric CHAPOTON et Jiang ZENG

Nombres de q-Bernoulli–Carlitz et fractions continues

Tome 29, n[o] 2 (2017), p. 347-368.

<http://jtnb.cedram.org/item?id=JTNB_2017__29_2_347_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **29** (2017), 347–368

Nombres de q-Bernoulli–Carlitz et fractions continues

par Frédéric CHAPOTON et Jiang ZENG

Résumé. Carlitz a introduit vers 1950 des q-analogues des nombres de Bernoulli. On obtient une représentation de ces q-analogues (ainsi que de variantes décalées) comme moments de certains polynômes orthogonaux. Ceci donne aussi des factorisations des déterminants de Hankel des nombres de q-Bernoulli, ainsi que des fractions continues pour leurs séries génératrices. Certains de ces résultats sont des q-analogues d'énoncés connus pour les nombres de Bernoulli, mais d'autres sont sans version classique.

Abstract. *q-Bernoulli–Carlitz Numbers and continuous fractions.*

Carlitz introduced q-analogues of the Bernoulli numbers around 1950. We obtain a representation of these q-Bernoulli numbers (and some shifted version) as moments of some orthogonal polynomials. This also gives factorisations of Hankel determinants of q-Bernoulli numbers, and continued fractions for their generating series. Some of these results are q-analogues of known results for Bernoulli numbers, but some are specific to the q-Bernoulli setting.

Introduction

Les nombres de Bernoulli ont une longue histoire, et sont utiles dans divers domaines des mathématiques. Leur apparition dans les valeurs prises aux entiers par la fonction ζ de Riemann est sans doute une des principales raisons de leur importance.

Un aspect apparemment assez peu connu est l'existence de plusieurs fractions continues simples pour des séries génératrices faisant intervenir des nombres de Bernoulli ou des polynômes de Bernoulli. On trouve déjà un

Manuscrit reçu le 17 juillet 2015, révisé le 18 février 2016, accepté le 28 février 2016.

Mathematics Subject Classification. 11B68, 30B70.

Mots-clefs. Nombre de Bernoulli, q-analogue, déterminant de Hankel, polynômes orthogonaux, fraction continue.

Les auteurs remercient le NIMS (Daejeon) où cet article a été terminé, pour l'accueil et les agréables conditions de travail. Le premier auteur bénéficie du soutien du contrat ANR CARMA (ANR-12-BS01-0017).

exemple de ce type pour les polynômes de Bernoulli dans les travaux fondateurs de Stieltjes sur les fractions continues [20, §86]. D'autres exemples pour les nombres de Bernoulli sont présentés dans l'appendice par Zagier du livre [3]. Sans aucune exhaustivité, on trouve notamment de telles fractions continues dans les articles [19, §6], [12, §5] et [21, §13 et 14].

Le contexte naturel pour ces fractions continues (du moins pour celles qui font intervenir des séries génératrices ordinaires) est la théorie des polynômes orthogonaux. Les nombres ou polynômes de Bernoulli apparaissent dans ce cadre comme les moments de familles de polynômes orthogonaux en une variable. On peut citer notamment Carlitz [5] pour une interprétation en ces termes des résultats de Stieltjes pour les polynômes de Bernoulli. Ces travaux sont brièvement décrits dans [10, p. 191-192].

Une conséquence de cette réalisation comme moments de polynômes orthogonaux est l'existence de formules closes pour les déterminants de Hankel des nombres de Bernoulli. En particulier, de telles formules sont démontrées dans [1, 17] pour les déterminants de Hankel des nombres de Bernoulli avec indices décalés de $0, 1$ ou 2. Un résultat plus général, qui contient ces trois cas, a également été obtenu par Fulmek et Krattenthaler dans [17].

Notre objectif dans cet article est d'obtenir des résultats similaires (fractions continues pour les séries génératrices, factorisations des déterminants de Hankel, expressions comme moments de polynômes orthogonaux) pour les q-analogues des nombres de Bernoulli et des polynômes de Bernoulli introduits par Carlitz dans [4].

Ces nombres de q-Bernoulli–Carlitz, qui sont des fractions rationnelles en la variable q, semblent assez naturels. Ils sont apparus récemment dans l'étude de certaines séries formelles en arbres [6], ainsi que dans la théorie des q-polynômes d'Ehrhart [8], et sont fortement liés avec un q-analogue de la fonction ζ [7]. Les résultats du présent article sont un autre signe de leur intérêt potentiel.

L'article est organisé comme suit. Après une section d'introduction des notations, on obtient d'abord des expressions des nombres de q-Bernoulli–Carlitz (éventuellement décalés) comme moments de polynômes orthogonaux de type q-Hahn ou q-Legendre. On formule ensuite les récurrences explicites pour ces polynômes orthogonaux. Par la théorie générale, ceci donne des fractions continues de Jacobi pour les séries génératrices des moments et des factorisations de déterminants de Hankel des moments. On transforme ensuite ces fractions continues en fractions continues de Stieltjes. Enfin, on obtient dans la dernière section un résultat plus général, qui est un q-analogue du théorème de Fulmek et Krattenthaler. Ceci fait intervenir les polynômes orthogonaux de type q-Jacobi.

Dans la plupart de nos résultats, on peut faire $q = 1$ et retrouver de manière transparente les résultats classiques. Il y a deux exceptions : les fractions continues pour la série génératrice décalée de deux crans, et la formule pour le déterminant de Hankel décalé de trois crans, qui n'ont pas de limite classique et sont donc des formules complètement nouvelles.

Le lecteur intéressé pourra trouver beaucoup d'informations historiques sur le cas classique dans l'introduction de l'article [16]. Un q-analogue de la série génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli a été étudié sous un angle similaire dans [2].

On présente en appendice un q-analogue simple de la formule classique de Faulhaber qui exprime les sommes de puissances d'entiers consécutifs en termes de polynômes de Bernoulli.

1. Notations

Les nombres de q-Bernoulli–Carlitz, notés β_n pour $n \geq 0$, sont définis par les relations

$$q(q\beta+1)^n - \beta^n = \begin{cases} q-1 & \text{si } n=0, \\ 1 & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si } n>1, \end{cases} \tag{1.1}$$

où on convient de transformer les exposants de β en indices après avoir développé le binôme.

Ce sont des fractions rationnelles en la variable q, dont les valeurs en $q = 1$ sont les nombres de Bernoulli usuels. Pour illustration, voici les premières fractions :

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = \frac{-1}{q+1}, \quad \beta_2 = \frac{q}{(q+1)\cdot(q^2+q+1)}, \\
&\beta_3 = \frac{-q\cdot(q-1)}{(q+1)\cdot(q^2+q+1)\cdot(q^2+1)}, \\
&\beta_4 = \frac{q\cdot(q^4-q^3-2q^2-q+1)}{(q+1)\cdot(q^2+q+1)\cdot(q^2+1)\cdot(q^4+q^3+q^2+q+1)}.
\end{aligned}$$

Leur série génératrice exponentielle est notée

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} \beta_n \frac{x^n}{n!}. \tag{1.2}$$

Des relations (1.1), on déduit qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle

$$qe^x B(qx) - B(x) = q - 1 + x. \tag{1.3}$$

Leur série génératrice ordinaire est notée

$$\widehat{B}(x) = \sum_{n\geq 0} \beta_n x^n. \tag{1.4}$$

On déduit des relations (1.1) l'équation fonctionnelle

$$\frac{q}{1-x}\widehat{B}\left(\frac{qx}{1-x}\right) - \widehat{B}(x) = q - 1 + x. \tag{1.5}$$

On considère aussi les séries génératrices ordinaires décalées de un ou deux crans définies par

$$\widehat{B}_1(x) = \frac{1}{\beta_1}\sum_{n\geq 0}\beta_{n+1}x^n \quad \text{et} \quad \widehat{B}_2(x) = \frac{1}{\beta_2}\sum_{n\geq 0}\beta_{n+2}x^n. \tag{1.6}$$

On note Ψ la forme linéaire sur les polynômes en une variable x à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$ définie par

$$\Psi(x^n) = \beta_n \tag{1.7}$$

pour $n \geq 0$.

Les polynômes de q-Bernoulli–Carlitz sont les polynômes en une variable z à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$ définis pour $n \geq 0$ par

$$\beta_n(z) = \Psi((z + (z(q-1)+1)x)^n), \tag{1.8}$$

et leur valeur en $z = 0$ est le nombre de q-Bernoulli–Carlitz β_n. Ce sont des q-analogues des polynômes de Bernoulli usuels. Les trois premiers sont

$$1,\ \frac{2z-1}{q+1},\ \frac{3(q+1)z^2 - 2(2q+1)z + q}{(q+1)(q^2+q+1)}.$$

Ces polynômes de q-Bernoulli–Carlitz sont reliés aux polynômes introduits initialement par Carlitz dans [4] par un changement de variable simple. Plus précisément, si on note $\widetilde{\beta}_n$ les polynômes originaux de Carlitz, il résulte de la comparaison entre la formule (5.5) de cette référence et (1.8) que

$$\beta_n\left((q^y - 1)/(q-1)\right) = \widetilde{\beta}_n(y). \tag{1.9}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $[n]_q$ le q-entier $(q^n - 1)/(q-1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $[n]!_q$ la q-factorielle $[1]_q[2]_q \ldots [n]_q$. Pour $0 \leq m \leq n$ dans $\mathbb{N}$, on note $\left[{n \atop m}\right]_q$ le q-analogue habituel des coefficients binomiaux, défini par

$$\frac{[n]!}{[m]!_q[n-m]!_q}. \tag{1.10}$$

Pour des entiers positifs ou nuls i, d, on pose

$$\left[{i, x \atop d}\right]_q = \frac{1}{[d]!_q}\prod_{j=i-d+1}^{i}([j]_q + q^j x). \tag{1.11}$$

C'est un q-analogue du polynôme binomial $\binom{i+x}{d}$.

On a alors les évaluations suivantes (voir [8, Prop. 3.3 et 3.5]).

Lemme 1.1. *Pour des entiers $0 \le i \le d$, on a*

$$\Psi\left(\left[{i,x \atop d}\right]_q\right) = \frac{(-1)^{d-i} q^{-\binom{d-i}{2}}}{[d+1]_q \left[{d \atop i}\right]_q}. \tag{1.12}$$

Lemme 1.2. *Pour des entiers $0 \le i \le d$ et $0 \le j \le e$, on a*

$$\Psi\left(\left[{i,x \atop d}\right]_q \left[{j,x \atop e}\right]_q\right) = \frac{(-1)^{d-i+e-j} q^{-\binom{d-i}{2}+(d-i)(e-j)-\binom{e-j}{2}}}{[d+e+1]_q \left[{d+e \atop d-i+j}\right]_q}. \tag{1.13}$$

On utilise le q-symbole de Pochhammer défini par

$$(a;q)_k = (1-a)(1-qa)\dots(1-q^{k-1}a), \tag{1.14}$$

ainsi que la notation abrégée $(a, b, \dots; q)_k$ pour le produit de plusieurs tels symboles.

On introduit les notations

$$\mathrm{Asc}(x,0) = 1, \quad \mathrm{Asc}(x,a) = \prod_{i=1}^{a} ([i]_q + q^i x) \tag{1.15}$$

et

$$\mathrm{Desc}(x,-1) = -1/x, \quad \mathrm{Desc}(x,0) = 1, \quad \mathrm{Desc}(x,a) = \prod_{i=1}^{a} ([i]_q - x). \tag{1.16}$$

Remarque. Pour n entier positif, $[-n]_q + q^{-n}x = -q^{-n}([n]_q - x)$.

On peut exprimer Asc et Desc en fonction des q-symboles de Pochhammer :

$$\begin{aligned} \mathrm{Asc}(x,a) &= (1-q)^{-a}(q(1+(q-1)x);q)_a, \\ \mathrm{Desc}(x,a) &= (1-q)^{-a}(1+(q-1)x)^a (q/(1+(q-1)x);q)_a. \end{aligned}$$

L'introduction des notations Asc et Desc permettra d'écrire des formules plus concises.

On a besoin du lemme suivant (voir [10, p. 25]).

Lemme 1.3. *Soit $(q_n(x))_{n\ge 0}$ une famille de polynômes orthogonaux définis par*

$$q_{n+1}(x) = (a_n + x)q_n(x) - b_n q_{n-1}(x), \tag{1.17}$$

avec les conditions initiales $q_{-1}(x) = 0$ et $q_0(x) = 1$. Soit $(p_n(x))_{n\ge 0}$ les polynômes définis par le changement de variables $p_n(x) = q_n(Ax+B)/A^n$ ($A \ne 0$). Alors les p_n sont une famille de polynômes orthogonaux vérifiant la récurrence

$$p_n(x) = ((a_n + B)/A + x)p_n(x) - b_n/A^2 p_{n-1}(x). \tag{1.18}$$

Si on note ν_n les moments de la famille q_n, alors les moments de la famille p_n sont

$$\mu_n = A^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-B)^{n-k} \nu_k. \tag{1.19}$$

2. Polynômes orthogonaux et moments

2.1. Polynômes orthogonaux de type q-Hahn. On considère les polynômes en x définis par la formule

$$P_n^{\mathcal{H}}(x) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{c+d+n+1}, q(1+(q-1)x) \\ q^{c+1}, q^{d+1} \end{matrix} ; q, q \right) \tag{2.1}$$

où ${}_3\phi_2$ est la fonction hypergéométrique basique usuelle [14, 15]. Les paramètres c et d sont des entiers positifs ou nuls.

Ces polynômes sont l'évaluation en $q(1+(q-1)x)$ de polynômes $Q_n^{\mathcal{H}}$ de type q-Hahn, qui forment une famille classique de polynômes orthogonaux. Ce sont encore des polynômes orthogonaux (voir le lemme 1.3).

Théorème 2.1. *Les nombres de q-Bernoulli–Carlitz $(\beta_n)_{n\geq 0}$ sont les moments des polynômes orthogonaux $P_n^{\mathcal{H}}$ de paramètres $c = d = 0$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que Ψ s'annule sur les polynômes $P_n^{\mathcal{H}}$ pour ces paramètres lorsque $n \geq 1$ et vaut $\beta_0 = 1$ lorsque $n = 0$. Ceci caractérise l'application moment pour cette famille de polynômes, voir par exemple la preuve du théorème de Favard dans [10, p. 21-22].

L'expression hypergéometrique (2.1) donne la formule explicite

$$P_n^{\mathcal{H}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+1}; q)_k (q(1+(q-1)x); q)_k q^k}{(q, q, q; q)_k} \tag{2.2}$$

en termes de q-symboles de Pochhammer.

Le symbole $(q(1+(q-1)x); q)_k$ vaut

$$(1-q)^k (1+qx)([2]_q + q^2 x)([3]_q + q^3 x) \dots ([k]_q + q^k x), \tag{2.3}$$

ce qu'on peut encore écrire, avec la notation introduite dans (1.11),

$$(1-q)^k [k]!_q \begin{bmatrix} k, x \\ k \end{bmatrix}_q = (q;q)_k \begin{bmatrix} k, x \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.4}$$

Un cas particulier du lemme 1.1 donne que

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} k, x \\ k \end{bmatrix}_q\right) = \frac{1}{[k+1]_q}. \tag{2.5}$$

Par conséquent,

$$\Psi(P_n^{\mathcal{H}}(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+1}; q)_k q^k}{(q, q; q)_k [k+1]_q} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+1}; q)_k q^k}{(q, q^2; q)_k}. \tag{2.6}$$

On reconnaît ${}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} q^{-n}, q^{n+1} \\ q^2 \end{smallmatrix}; q, q\right)$, qui est nul par la formule de q-Vandermonde lorsque $n \geq 1$. $\square$

Remarque. Par le lemme 1.3, en modifiant ces polynômes orthogonaux par le changement de variables affine $X = z + (z(q-1)+1)x$, on obtient une famille de polynômes orthogonaux en X dont les moments sont les polynômes de q-Bernoulli–Carlitz définis par (1.8).

Théorème 2.2. *Les fractions $(\beta_n/\beta_1)_{n\geq 1}$ sont les moments des polynômes orthogonaux $P_n^{\mathcal{H}}$ de paramètres $c = 0$ et $d = 1$.*

Démonstration. Il suffit à nouveau de montrer que la forme linéaire $f \mapsto \Psi(xf)$ s'annule sur les polynômes $P_n^{\mathcal{H}}$ pour ces paramètres lorsque $n \geq 1$ et vaut β_1 lorsque $n = 0$.

L'expression hypergéometrique (2.1) donne la formule explicite

$$P_n^{\mathcal{H}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+2}; q)_k (q(1+(q-1)x); q)_k q^k}{(q, q, q^2; q)_k}. \tag{2.7}$$

L'expression $x(q(1+(q-1)x); q)_k$ vaut $[k+1]_q (q;q)_k \left[\begin{smallmatrix} k, x \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]_q$.

Un cas particulier du lemme 1.1 donne que

$$\Psi(\left[\begin{smallmatrix} k, x \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]_q) = \frac{-1}{[k+1]_q [k+2]_q}. \tag{2.8}$$

On en déduit alors que

$$\Psi(xP_n^{\mathcal{H}}(x)) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+2}; q)_k q^k}{(q, q^2; q)_k [k+2]_q} = -\frac{1}{[2]_q} \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+2}; q)_k q^k}{(q, q^3; q)_k}.$$

On reconnaît la somme comme ${}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} q^{-n}, q^{n+2} \\ q^3 \end{smallmatrix}; q, q\right)$, qui est nul par la formule de q-Vandermonde lorsque $n \geq 1$. $\square$

Théorème 2.3. *Les fractions $(\beta_n/\beta_2)_{n\geq 2}$ sont les moments des polynômes orthogonaux $P_n^{\mathcal{H}}$ de paramètres $c = 1$ et $d = 1$.*

Démonstration. Il suffit à nouveau de montrer que la forme linéaire $f \mapsto \Psi(x^2 f)$ s'annule sur les polynômes $P_n^{\mathcal{H}}$ pour ces paramètres lorsque $n \geq 1$ et vaut β_2 lorsque $n = 0$.

L'expression hypergéometrique (2.1) donne la formule explicite

$$P_n^{\mathcal{H}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+3}; q)_k (q(1+(q-1)x); q)_k q^k}{(q, q^2, q^2; q)_k}. \tag{2.9}$$

L'expression $x^2(q(1+(q-1)x); q)_k$ vaut $[k+1]_q (q;q)_k \left[\begin{smallmatrix} 0, x \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q \left[\begin{smallmatrix} k, x \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]_q$. Un cas particulier du lemme 1.2 donne que

$$\Psi(\left[\begin{smallmatrix} 0, x \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_q \left[\begin{smallmatrix} k, x \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]_q) = \frac{q}{[k+2]_q [k+3]_q}. \tag{2.10}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\Psi(x^2P_n^{\mathcal{H}}(x)) &= q\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+3};q)_k[k+1]_q q^k}{(q^2,q^2;q)_k[k+2]_q[k+3]_q}\\ &= \frac{q}{[2]_q[3]_q}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+3};q)_k q^k}{(q,q^4;q)_k}.\end{aligned}$$

On reconnaît la somme comme ${}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} q^{-n},q^{n+3} \\ q^4\end{smallmatrix};q,q\right)$, qui est nul par la formule de q-Vandermonde lorsque $n \geq 1$. $\square$

2.2. Polynômes orthogonaux de type q-Legendre. On introduit une autre famille de polynômes en x définis par la formule

$$P_n^{\mathcal{L}}(x) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},q^{n+1},q(1+(q-1)x) \\ q,q(1+(q-1)z)\end{matrix};q,q\right), \tag{2.11}$$

où le paramètre z est une variable.

Ces polynômes sont l'évaluation en $q(1+(q-1)x)$ de polynômes $Q_n^{\mathcal{L}}$ de type "grand q-Legendre", qui forment une famille classique de polynômes orthogonaux (voir [15, §14.5.1]).

Lorsque $z=0$, on retrouve le cas $c=d=0$ de type q-Hahn considéré précédemment.

On va calculer leurs moments en termes de polynômes en z obtenus par intégration des polynômes de q-Bernoulli–Carlitz définis par (1.8).

Pour simplifier les notations, on pose $c = 1+(q-1)z$ dans cette section.

On rappelle que la q-intégrale de Jackson est définie par

$$\int_a^b f(t)d_qt = b(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}f(bq^k)q^k - a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}f(aq^k)q^k. \tag{2.12}$$

Lemme 2.4. *Les moments des polynômes $P_n^{\mathcal{L}}$ sont donnés par*

$$\mu_n = \frac{1}{(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{[k+1]_c}{[k+1]_q}. \tag{2.13}$$

Démonstration. On sait (voir [15]) que les polynômes de type "grand q-Legendre" $Q_n^{\mathcal{L}}$ de paramètre c sont orthogonaux pour les moments

$$\nu_n = \frac{1}{\int_{cq}^{q}x^0d_qx}\int_{cq}^{q}x^nd_qx = \frac{q^n(1-c^{n+1})(1-q)}{(1-c)(1-q^{n+1})} = q^n\frac{[n+1]_c}{[n+1]_q}. \tag{2.14}$$

Cette égalité résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_{cq}^{q} x^n d_q x &= q(1-q)\sum_{k\geq 0}(q^{k+1})^n q^k - cq(1-q)\sum_{k\geq 0}(cq^{k+1})^n q^k \\ &= q^{n+1}(1-q)\left(\sum_{k\geq 0}(q^{n+1})^k - c^{n+1}\sum_{k\geq 0}(q^{n+1})^k\right) \\ &= q^{n+1}(1-q)\frac{1-c^{n+1}}{1-q^{n+1}}.\end{aligned}$$

Par le lemme 1.3, les moments des polynômes $P_n^{\mathcal{L}}$ sont donc

$$\mu_n = q^{-n}(q-1)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q)^{n-k}\nu_k,$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Lemme 2.5. *Soit $c = 1 + (q-1)z$, alors*

$$\frac{1}{z}\int_0^z \beta_n(y)dy = \frac{1}{(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{[k+1]_c}{[k+1]_q}. \tag{2.15}$$

Démonstration. On note que $1 - c = (1-q)z$ et que

$$\frac{d}{dz}\left(1 - c^{k+1}\right) = (1-q)(k+1)c^k. \tag{2.16}$$

En multipliant (2.15) par z, puis en dérivant par rapport à z, on obtient

$$\beta_n(z) = \frac{1}{(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{(k+1)}{[k+1]_q}(1+(q-1)z)^k. \tag{2.17}$$

Cette équation est exactement la formule (5.3) de [4], modulo le changement de variables (1.9). Il reste à vérifier que (2.15) est vraie en $z = 0$, ce qui résulte aussi de (2.17) en $z = 0$. □

Théorème 2.6. *Les polynômes $(\frac{1}{z}\int_0^z \beta_n(y)dy)_{n\geq 0}$ sont les moments des polynômes orthogonaux $P_n^{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. Ceci résulte des deux lemmes précédents. Il n'est pas nécessaire de normaliser les moments, car $\beta_0(z) = 1$. □

On introduit la série génératrice des moments

$$\widehat{B}_z(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\int_0^z \beta_n(y)dy\right)x^n. \tag{2.18}$$

3. Récurrences

Chaque famille de polynômes orthogonaux (supposés unitaires) vérifie une récurrence à trois termes, de la forme

$$p_{n+1} = (a_n + x)p_n - b_n p_{n-1}, \tag{3.1}$$

pour deux suites de coefficients a_n et b_n. On va calculer ces récurrences pour les familles de polynômes considérées, en partant de la récurrence générale connue pour les polynômes de type q-Hahn et de type "grand q-Legendre".

3.1. Récurrences pour le type q-Hahn. Selon [15, §14.6], la version unitaire q_n des polynômes $Q_n^{\mathcal{H}}$ définis par la formule (2.1) (avec x au lieu de $q(1+(q-1)x)$) vérifie la récurrence

$$q_{n+1} = (A_n + C_n - 1 + x)q_n - A_{n-1}C_n q_{n-1}, \tag{3.2}$$

où

$$A_n = \frac{(1-q^{n+d+1})(1-q^{n+c+1})(1-q^{n+c+d+1})}{(1-q^{2n+c+d+1})(1-q^{2n+c+d+2})} \tag{3.3}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+c+d+1}(1-q^n)(1-q^{n+c})(1-q^{n+d})}{(1-q^{2n+c+d})(1-q^{2n+c+d+1})}. \tag{3.4}$$

On utilise ensuite le lemme 1.3 pour le changement de variables $x \mapsto q(1+(q-1)x)$. On obtient la récurrence

$$p_{n+1} = ((A_n + C_n - 1 + q)/(q(q-1)) + x)\, p_n - A_{n-1}C_n/(q(q-1))^2 p_{n-1},$$

pour les versions unitaires p_n des polynômes $P_n^{\mathcal{H}}$ définis par (2.1).

Considérons les trois cas particuliers qui nous intéressent.

• Pour $(c,d) = (0,0)$, on obtient

$$A_n = \frac{(1-q^{n+1})^3}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n+2})} \tag{3.5}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+1}(1-q^n)^3}{(1-q^{2n})(1-q^{2n+1})}. \tag{3.6}$$

La récurrence est donc donnée par

$$p_{n+1} = \left(\frac{[2n+1]_q + [n+1]_q - 3[n]_q}{(1+q^n)(1+q^{n+1})} + x\right) p_n + \frac{q^{n-1}[n]_q^6}{[2n-1]_q[2n]_q^2[2n+1]_q} p_{n-1}.$$

• Pour $(c,d) = (0,1)$, on obtient

$$A_n = \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})^2}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+3})} \tag{3.7}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+2}(1-q^n)^2(1-q^{n+1})}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n+2})}. \tag{3.8}$$

La récurrence est donc donnée par

$$p_{n+1} = (a_n + x)\, p_n + \frac{q^n [n]_q^3 [n+1]_q^3}{[2n]_q [2n+1]_q^2 [2n+2]_q} p_{n-1}, \tag{3.9}$$

où le coefficient $a_n = (A_n + C_n - 1 + q)/(q(q-1))$ ne se simplifie pas spécialement.

• Pour $(c, d) = (1, 1)$, on obtient

$$A_n = \frac{(1-q^{n+2})^2(1-q^{n+3})}{(1-q^{2n+3})(1-q^{2n+4})} \tag{3.10}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+3}(1-q^n)(1-q^{n+1})^2}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+3})}. \tag{3.11}$$

La récurrence est donc donnée par

$$p_{n+1} = \left(\frac{(q-1)[n+1]_q[n+2]_q}{(1+q^{n+1})(1+q^{n+2})} + x\right) p_n + \frac{q^{n+1}[n]_q[n+1]_q^4[n+2]_q}{[2n+1]_q[2n+2]_q^2[2n+3]_q} p_{n-1}.$$

3.2. Récurrence pour le type grand q-Legendre. Selon le §14.5.1 de [15], la version unitaire q_n des polynômes $Q_n^{\mathcal{L}}$ définis par la formule (2.11) (avec x au lieu de $q(1+(q-1)x)$) vérifie la récurrence

$$q_{n+1} = (A_n + C_n - 1 + x) q_n - A_{n-1} C_n q_{n-1}, \tag{3.12}$$

où

$$A_n = \frac{(1-q^{n+1})^2(1-(1+(q-1)z)q^{n+1})}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n+2})} \tag{3.13}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+1}(1-q^n)^2(1-q^n+(q-1)z)}{(1-q^{2n})(1-q^{2n+1})}. \tag{3.14}$$

On utilise ensuite comme précédemment le lemme 1.3 pour le changement de variables $x \mapsto q(1+(q-1)x)$.

La récurrence pour la version unitaire p_n des $P_n^{\mathcal{L}}$ définis par (2.11) est donc donnée par

$$\begin{aligned} p_{n+1} = {}& \left(\frac{[2n+1]_q + [n+1]_q - 3[n]_q - 2q^n z}{(1+q^n)(1+q^{n+1})} + x\right) p_n \\ & + \frac{q^{n-1}[n]_q^4([n]_q - z)([n]_q + q^n z)}{[2n-1]_q [2n]_q^2 [2n+1]_q} p_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

4. Déterminant de Hankel et fractions continues

La théorie générale des polynômes orthogonaux donne des informations précises sur les déterminants de Hankel des moments, et sur certaines fractions continues pour la série génératrice ordinaire des moments. Les résultats dont nous aurons besoin se trouvent dans [17, §2.7] et [18, §5.4], où le lecteur peut trouver d'autres références. On les rassemble dans le théorème-omnibus suivant.

Théorème 4.1. *Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une famille de polynômes orthogonaux unitaires vérifiant la récurrence*

$$p_{n+1} = (a_n + x)p_n - b_n p_{n-1}, \tag{4.1}$$

avec les conditions initiales $p_{-1} = 0$ et $p_0 = 1$. Soient μ_n les moments de cette famille, qu'on normalise en supposant $\mu_0 = 1$. Alors on a un développement en fraction continue

$$\sum_{k\geq 0} \mu_k x^k = \cfrac{1}{1 + a_0 x - \cfrac{b_1 x^2}{1 + a_1 x - \cfrac{b_2 x^2}{1 + a_2 x - \dots}}} \tag{4.2}$$

et une factorisation du déterminant de Hankel

$$d_n^{(0)} := \det\left(\mu_{i+j}\right)_{0\leq i,j\leq n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{n-k}. \tag{4.3}$$

Si $(q_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par la récurrence

$$q_0 = 1, \quad q_1 = -a_0 \quad \text{et} \quad q_{n+1} = -a_n q_n - b_n q_{n-1}, \tag{4.4}$$

alors on a aussi une factorisation du déterminant de Hankel décalé

$$d_n^{(1)} := \det\left(\mu_{i+j+1}\right)_{0\leq i,j\leq n-1} = q_n \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{n-k}. \tag{4.5}$$

Démonstration. On renvoie aux références citées pour la preuve des principaux résultats énoncés. On se contente ici d'une esquisse de preuve de (4.5).

En comparant (4.4) et (4.1), on voit que $q_n = (-1)^n p_n(0)$. Par ailleurs, il existe une formule déterminantale pour $p_n(x)$ en fonction des moments :

$$p_n(x) = \frac{1}{d_n^{(0)}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

En posant $x = 0$ dans (4.6), on obtient $p_n(0) = (-1)^n d_n^{(1)}/d_n^{(0)}$, ce qui équivaut à (4.5). $\square$

On obtient ainsi des fractions continues pour $\widehat{B}(x)$, $\widehat{B}_1(x)$, $\widehat{B}_2(x)$ et $\widehat{B}_z(x)$, de la forme donnée par (4.2) dans le théorème 4.1, ayant pour coefficients ceux des récurrences (3.1), (3.9), (3.1) et (3.15).

On obtient aussi les formules suivantes de factorisation des déterminants de Hankel.

Théorème 4.2. *On a, pour les matrices d'indices* $0 \le i, j \le n-1$,

$$\det\left(\beta_{i+j}\right)_{i,j} = (-1)^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n}{3}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[i]!_q^6}{[2i]!_q [2i+1]!_q}, \tag{4.7}$$

$$\det\left(\beta_{i+j+1}\right)_{i,j} = \frac{(-1)^{\binom{n+1}{2}}}{[2]_q} q^{\binom{n+1}{3}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[i]!_q^3 [i+1]!_q^3}{[2i+1]!_q [2i+2]!_q}, \tag{4.8}$$

$$\det\left(\beta_{i+j+2}\right)_{i,j} = \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{[2]_q [3]_q} q^{\binom{n+2}{3}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[i]!_q [i+1]!_q^4 [i+2]!_q}{[2i+2]!_q [2i+3]!_q}, \tag{4.9}$$

$$\det\left(\beta_{i+j+3}\right)_{i,j} = \frac{(-1)^{\binom{n+1}{2}}}{[3]_q^2 [4]_q} q^{\binom{n+2}{3}} \left(q^{\binom{n+2}{2}} + (-1)^n\right) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[i+1]!_q^3 [i+2]!_q^3}{[2i+3]!_q [2i+4]!_q} \tag{4.10}$$

et

$$\det\left(\frac{1}{z}\int_0^z \beta_{i+j}(y)dy\right)_{i,j} = (-1)^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n}{3}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{[i]!_q^4 \operatorname{Asc}(z,i) \operatorname{Desc}(z,i)}{[2i]!_q [2i+1]!_q}, \tag{4.11}$$

avec les notations (1.15) *et* (1.16).

Démonstration. Les formules (4.7), (4.8), (4.9) et (4.11) s'obtiennent directement en appliquant (4.3) aux quatre récurrences obtenues dans la section 3. Il faut tenir compte de la normalisation des moments pour (4.8) et (4.9).

On pose

$$d_n(k) = \det\left(\beta_{i+j+k}\right)_{0 \le i,j \le n-1}.$$

On utilise (4.5) pour montrer successivement les trois implications suivantes.

(4.7) $\Rightarrow$ (4.8) : Les polynômes orthogonaux unitaires associés aux $(\beta_n)_{n\ge 0}$ sont

$$p_n(x) = \frac{(q;q)_n^2}{(q^{n+1};q)_n} \frac{1}{q^n(q-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+1}; q)_k (q(1+(q-1)x); q)_k q^k}{(q,q,q;q)_k}.$$

Par conséquent, à l'aide de l'identité de q-Vandermonde,

$$p_n(0) = \frac{(q;q)_n^2}{(q^{n+1};q)_n}\frac{q^{\binom{n}{2}}}{(1-q)^n} = q^{\binom{n}{2}}\frac{[n]!_q^3}{[2n]!_q}.$$

Il en résulte que $d_n(1) = d_n(0)(-1)^n p_n(0)$, ce qui donne une autre preuve de (4.8).

(4.8) $\Rightarrow$ (4.9) : Les polynômes orthogonaux unitaires associés aux moments $(\beta_{n+1}/\beta_1)_{n\geq 0}$ sont

$$p_n(x) = \frac{(q,q^2;q)_n}{(q^{n+2};q)_n}\frac{1}{q^n(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+2};q)_k(q(1+(q-1)x);q)_k q^k}{(q,q,q^2;q)_k}.$$

Par conséquent, via q-Vandermonde,

$$p_n(0) = \frac{(q;q)_n^2}{(q^{n+2};q)_n}\frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(1-q)^n} = q^{\binom{n+1}{2}}\frac{[n]!_q^2[n+1]!_q}{[2n+1]!_q}.$$

Donc $d_n(2) = d_n(1)(-1)^n p_n(0)$, ce qui donne une autre preuve de (4.9).

(4.9) $\Rightarrow$ (4.10) : Les polynômes orthogonaux unitaires associés aux moments $(\beta_{n+2}/\beta_2)_{n\geq 0}$ sont

$$p_n(x) = \frac{(q^2,q^2;q)_n}{(q^{n+3};q)_n}\frac{1}{q^n(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+3};q)_k(q(1+(q-1)x);q)_k q^k}{(q,q^2,q^2;q)_k}.$$

dont la valeur en $x=0$ est

$$p_n(0) = \frac{(q^2,q^2;q)_n}{(q^{n+3};q)_n}\frac{1}{q^n(q-1)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+3};q)_k q^k}{(q^2,q^2;q)_k}. \tag{4.12}$$

La somme qui intervient peut se simplifier comme suit (par q-Vandermonde) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n},q^{n+3};q)_k q^k}{(q^2,q^2;q)_k}& \\
&= \frac{(1-q)^2q^{-1}}{(1-q^{-n-1})(1-q^{n+2})}\left(-1+{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{-n-1},q^{n+2}\\ q\end{matrix};q,q\right)\right)\\
&= (-1)^n\frac{q^n(1-q)^2}{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}\left[(-1)^n+q^{\binom{n+2}{2}}\right].
\end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité

$$\begin{aligned}
p_n(0) &= \frac{(q^2,q^2;q)_n}{(q^{n+1};q)_{n+2}}\frac{1}{(1-q)^{n-2}}\left[(-1)^n+q^{\binom{n+2}{2}}\right]\\
&= \frac{[n]!_q[n+1]!_q^2}{[2n+2]!_q}\left[(-1)^n+q^{\binom{n+2}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $d_n(3) = d_n(2)(-1)^n p_n(0)$, ce qui donne (4.10). $\square$

L'expression (4.10) est à rapprocher de la fraction continue simple pour la série $\widehat{B}_2$ obtenue dans la section 5, qui fait intervenir des facteurs similaires.

Pour les décalages $k \geq 4$, le nombre β_k lui-même a des racines en dehors du cercle unité, donc il est impossible que les déterminants de Hankel $d_n(k)$ soient encore des produits de polynômes cyclotomiques.

5. Autres fractions continues

On obtient dans cette section d'autres fractions continues pour les mêmes séries génératrices. Les fractions continues du type donné par (4.2) sont traditionnellement nommées des J-fractions continues ou fractions continues de Jacobi. On les transforme ici en des fractions continues de Stieltjes ou S-fractions continues.

On a besoin du lemme de transformation suivant (voir [19, Lemma I], [9, Lemme 5.3] et [11]), qui permet de relier S-fractions continues et J-fractions continues.

Lemme 5.1. *On a l'égalité entre les deux développements en fractions continues*

$$\frac{1}{1+}\,\frac{c_1x}{1+}\,\frac{c_2x}{1+}\,\frac{c_3x}{1+}\cdots = \frac{1}{1+c_1x-}\,\frac{c_1c_2x^2}{1+(c_2+c_3)x-}\,\frac{c_3c_4x^2}{1+(c_4+c_5)x-}\cdots$$

Théorème 5.2. *On a le développement en fraction continue*

$$\widehat{B}(x) = \cfrac{1}{[1]_q + \cfrac{x}{\frac{q+1}{[1]_q} - \cfrac{x}{[3]_q + \cfrac{q[2]_q x}{\frac{q^2+1}{[2]_q} - \cfrac{[2]_q x}{[5]_q + \cfrac{q^2[3]_q x}{\frac{q^3+1}{[3]_q} - \cfrac{[3]_q x}{\ddots}}}}}}} \tag{5.1}$$

Démonstration. En termes du lemme 5.1, ce développement revient à montrer que

$$c_{2n-1} = \frac{q^{n-1}[n]_q^2}{(q^n+1)[2n-1]_q}, \quad \text{et} \quad c_{2n} = -\frac{[n]_q^2}{(q^n+1)[2n+1]_q}, \tag{5.2}$$

pour $n \geq 1$. Il reste donc à vérifier par un simple calcul que

$$a_0 = c_1, \quad a_n = c_{2n} + c_{2n+1}, \quad b_n = c_{2n-1}c_{2n}, \tag{5.3}$$

pour les coefficients a_n et b_n de la récurrence (3.1). □

Théorème 5.3. *On a le développement en fraction continue*

$$\widehat{B}_1(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{q}{[3]_q}x}{1 - \cfrac{\frac{[2]_q^2}{[3]_q[4]_q}x}{1 + \cfrac{\frac{q^2[2]_q^2[3]_q}{[4]_q[5]_q}x}{\ddots}}}} \tag{5.4}$$

dont les coefficients alternent entre $\frac{q^n[n]_q^2[n+1]_q}{[2n]_q[2n+1]_q}$ *et* $\frac{-[n]_q[n+1]_q^2}{[2n+1]_q[2n+2]_q}$.

Démonstration. En termes du lemme 5.1, ce développement revient à montrer que

$$c_{2n-1} = \frac{q^n[n]_q^2[n+1]_q}{[2n]_q[2n+1]_q}, \quad \text{et} \quad c_{2n} = -\frac{[n]_q[n+1]_q^2}{[2n+1]_q[2n+2]_q}, \tag{5.5}$$

pour $n \geq 1$. Il reste donc à vérifier par un simple calcul que

$$a_0 = c_1, \quad a_n = c_{2n} + c_{2n+1}, \quad b_n = c_{2n-1}c_{2n}, \tag{5.6}$$

pour les coefficients a_n et b_n de la récurrence (3.9). □

On peut en déduire facilement un développement du même type pour la fonction $1/\widehat{B}$, en utilisant la relation $\widehat{B} = 1 + \beta_1\widehat{B}_1$.

Une formule de ce type existe aussi pour la série $\widehat{B}_2$ avec un décalage de deux crans.

Théorème 5.4. *On a le développement en fraction continue*

$$\widehat{B}_2(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{c_1x}{1 + \cfrac{c_2x}{1 + \cfrac{c_3x}{\ddots}}}} \tag{5.7}$$

dont les coefficients alternent entre

$$c_{2n-1} = \frac{[n]_q[n+1]_q^2}{[2n+1]_q[2n+2]_q}\frac{(q^{\binom{n+2}{2}} + (-1)^{n+2})}{(q^{\binom{n+1}{2}} + (-1)^{n+1})} \tag{5.8}$$

et

$$c_{2n} = \frac{-q^{n+1}[n+1]_q^2[n+2]_q}{[2n+2]_q[2n+3]_q}\frac{(q^{\binom{n+1}{2}} + (-1)^{n+1})}{(q^{\binom{n+2}{2}} + (-1)^{n+2})}, \tag{5.9}$$

pour $n \geq 1$.

Démonstration. Il suffit de vérifier par un simple calcul que

$$a_0 = c_1 = \frac{q-1}{q^2+1}, \quad a_n = c_{2n} + c_{2n+1}, \quad b_n = c_{2n-1}c_{2n}, \tag{5.10}$$

pour les coefficients a_n et b_n de la récurrence (3.1). □

On observe qu'il apparaît des facteurs cyclotomiques d'ordre $n(n+1)$ ou $n(n+1)/2$. Cette expression est à rapprocher du comportement des déterminants de Hankel pour le décalage de 3, voir section 4. Par ailleurs, les coefficients ont des pôles en $q=1$, de sorte que ce développement n'a pas de version classique.

Théorème 5.5. *On a le développement en fraction continue*

$$\widehat{B}_z(x) = \cfrac{1}{[1]_q + \cfrac{([1]_q - z)x}{\frac{q+1}{[1]_q} - \cfrac{([1]+qz)x}{[3]_q + \cfrac{q([2]_q - z)x}{\frac{q^2+1}{[2]_q} - \cfrac{([2]_q + q^2 z)x}{[5]_q + \cfrac{q^2([3]_q - z)x}{\frac{q^3+1}{[3]_q} - \cfrac{([3]_q + q^3 z)x}{\ddots}}}}}}} \tag{5.11}$$

Démonstration. En termes du lemme 5.1, ce développement revient à montrer que

$$c_{2n-1} = \frac{q^{n-1}[n]_q([n]_q - z)}{(q^n+1)[2n-1]_q}, \quad \text{et} \quad c_{2n} = -\frac{[n]_q([n_q + q^n z)}{(q^n+1)[2n+1]_q}, \tag{5.12}$$

pour $n \geq 1$. Il reste donc à vérifier par un simple calcul que

$$a_0 = c_1, \quad a_n = c_{2n} + c_{2n+1}, \quad b_n = c_{2n-1}c_{2n}, \tag{5.13}$$

pour les coefficients a_n et b_n de la récurrence (3.15). □

6. Théorème général de type Fulmek-Krattenthaler

On considère les polynômes en x définis par la formule

$$P_n^{\mathcal{J}}(x) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n+a+b+c+d-1}, q^a(1+(q-1)x) \\ q^{a+c}, q^{a+d} \end{matrix}; q, q\right) \tag{6.1}$$

où ${}_3\phi_2$ est la fonction hypergéométrique basique usuelle. Les paramètres c et d sont des entiers positifs ou nuls. Les paramètres a et b sont des entiers strictement positifs.

On retrouve les polynômes de type q-Hahn considérés précédemment lorsque $a=b=1$.

Ces polynômes sont l'évaluation en $q^a(1+(q-1)x)$ de polynômes $Q_n^{\mathcal{J}}$ de type “grand q-Jacobi” pour les paramètres $(q^{a+c-1}, q^{b+d-1}, q^{a+d-1})$. Ce sont encore des polynômes orthogonaux (voir le lemme 1.3).

On pose

$$C_{a,b,c,d} = \Psi\left(x^2 \operatorname{Asc}(x,a-1)\operatorname{Asc}(x,b-1)\operatorname{Desc}(x,c-1)\operatorname{Desc}(x,d-1)\right).$$

Théorème 6.1. *Les nombres*

$$\Psi\left(x^{n+2} \operatorname{Asc}(x,a-1)\operatorname{Asc}(x,b-1)\operatorname{Desc}(x,c-1)\operatorname{Desc}(x,d-1)\right)/C_{a,b,c,d}$$

sont les moments des polynômes orthogonaux $P_n^{\mathcal{J}}$ de paramètres a,b,c,d.

On peut noter la remarquable symétrie par échange de a et b ou de c et d, qui n'est pas immédiatement visible dans (6.1). Ce résultat est un q-analogue du théorème 23 de [13], dont la preuve utilise des expressions intégrales des nombres de Bernoulli et des moments de polynômes de Hahn continus.

Démonstration. Il suffit à nouveau de montrer que la forme linéaire

$$f \mapsto \Psi\left(x^2 \operatorname{Asc}(x,a-1)\operatorname{Asc}(x,b-1)\operatorname{Desc}(x,c-1)\operatorname{Desc}(x,d-1)f\right)$$

s'annule sur les polynômes $P_n^{\mathcal{J}}$ lorsque $n \geq 1$.

L'expression hypergéometrique (6.1) donne la formule explicite

$$P_n^{\mathcal{J}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+a+b+c+d-1}; q)_k (q^a(1+(q-1)x); q)_k q^k}{(q, q^{a+c}, q^{a+d}; q)_k}. \tag{6.2}$$

En considérant l'expression

$$x^2 \operatorname{Asc}(x,a-1)\operatorname{Asc}(x,b-1) \operatorname{Desc}(x,c-1)\operatorname{Desc}(x,d-1)(q^a(1+(q-1)x);q)_k, \tag{6.3}$$

on observe qu'on peut associer ensemble les facteurs pour former d'une part

$$\operatorname{Desc}(x,c-1)x\operatorname{Asc}(x,a-1)(q^a(1+(q-1)x);q)_k = (1-q)^k(-1)^{c-1}q^{\binom{c}{2}}[a+k-1+c]!_q \begin{bmatrix} a+k-1, x \\ a+k-1+c \end{bmatrix}_q \tag{6.4}$$

et d'autre part

$$\operatorname{Desc}(x,d-1)x\operatorname{Asc}(x,b-1) = (-1)^{d-1}q^{\binom{d}{2}}[b+d-1]!_q \begin{bmatrix} b-1, x \\ b+d-1 \end{bmatrix}_q. \tag{6.5}$$

Au complet, l'expression (6.3) vaut donc

$$(q-1)^k(-1)^{c+d}q^{\binom{c}{2}+\binom{d}{2}}[a+k-1+c]!_q[b+d-1]!_q \begin{bmatrix} a+k-1, x \\ a+k-1+c \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} b-1, x \\ b+d-1 \end{bmatrix}_q. \tag{6.6}$$

Le lemme 1.2 donne que

$$\Psi\left(\left[{a+k-1,\, x \atop a+k-1+c}\right]_q \left[{b-1,\, x \atop b+d-1}\right]_q\right) = \frac{(-1)^{c+d} q^{-\binom{c}{2}+cd-\binom{d}{2}}}{[a+b+c+d+k-1]_q \left[{a+b+c+d+k-2 \atop b+c-1}\right]_q}. \tag{6.7}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
&\Psi(x^2 \operatorname{Asc}(x, a-1) \operatorname{Asc}(x, b-1) \operatorname{Desc}(x, c-1) \operatorname{Desc}(x, d-1) P_n^{\mathcal{J}}(x)) \\
&\quad = q^{cd} [b+d-1]!_q [b+c-1]!_q \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+a+b+c+d-1}; q)_k q^k (1-q)^k [a+c+k-1]!_q [a+d+k-1]!_q}{(q, q^{a+c}, q^{a+d}; q)_k [a+b+c+d+k-1]!_q} \\
&\quad = q^{cd} \frac{[b+d-1]!_q [b+c-1]!_q [a+c-1]!_q [a+d-1]!_q}{[a+b+c+d-1]!_q} \\
&\qquad \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}, q^{n+a+b+c+d-1}; q)_k q^k (q^{a+c}; q)_k (q^{a+d}; q)_k}{(q, q^{a+c}, q^{a+d}; q)_k (q^{a+b+c+d}; q)_k}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme comme ${}_2\phi_1\left({q^{-n}, q^{n+a+b+c+d-1} \atop q^{a+b+c+d}}; q, q\right)$, qui est nul par la formule de q-Vandermonde lorsque $n \geq 1$. □

Comme sous-produit de cette preuve, on obtient une expression pour la constante de normalisation $C_{a,b,c,d}$:

$$C_{a,b,c,d} = q^{cd} \frac{[b+d-1]!_q [b+c-1]!_q [a+c-1]!_q [a+d-1]!_q}{[a+b+c+d-1]!_q}. \tag{6.8}$$

On peut alors en déduire un énoncé sur la factorisation des déterminants de Hankel.

Selon [15, §14.5], la version unitaire q_n des polynômes $Q_n^{\mathcal{J}}$ définis par la formule (6.1) (avec x à la place de $q^a(1 + (q-1)x)$) vérifie la récurrence

$$q_{n+1} = (A_n + C_n - 1 + x) q_n - A_{n-1} C_n q_{n-1}, \tag{6.9}$$

où

$$A_n = \frac{(1-q^{n+a+d})(1-q^{n+a+c})(1-q^{n+a+b+c+d-1})}{(1-q^{2n+a+b+c+d-1})(1-q^{2n+a+b+c+d})} \tag{6.10}$$

et

$$C_n = -\frac{q^{n+2a+c+d-1}(1-q^n)(1-q^{n+b+d-1})(1-q^{n+b+c-1})}{(1-q^{2n+a+b+c+d-2})(1-q^{2n+a+b+c+d-1})}. \tag{6.11}$$

On utilise ensuite le lemme 1.3 pour le changement de variables $x \mapsto q^a(1 + (q-1)x)$. Dans la récurrence obtenue pour les versions unitaires p_n

des polynômes $P_n^{\mathcal{J}}$ définis par (6.1), les coefficients b_n sont donc

$$(6.12)\quad -q^{n+c+d-1}[a+b+c+d+n-2]_q \times \frac{[n]_q[a+c+n-1]_q[b+c+n-1]_q[a+d+n-1]_q[b+d+n-1]_q}{[a+b+c+d+2n-3]_q[a+b+c+d+2n-2]_q^2[a+b+c+d+2n-1]_q}.$$

Soit $M(n)$ la matrice de terme général

$$(6.13)\quad \Psi(x^{i+j+2}\operatorname{Asc}(x,a-1)\operatorname{Asc}(x,b-1)\operatorname{Desc}(x,c-1)\operatorname{Desc}(x,d-1))$$

pour $0 \leq i,j \leq n-1$.

On déduit donc du théorème 4.1 le résultat suivant.

Théorème 6.2. *Le déterminant de $M(n)$ est*

$$(6.14)\qquad (-q^{c+d})^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n}{3}} C^n_{a,b,c,d} \prod_{i=1}^{n-1} K_i^{n-i}.$$

où K_i est l'expression

$$[a+b+c+d+i-2]_q \times \frac{[i]_q[a+c+i-1]_q[b+c+i-1]_q[a+d+i-1]_q[b+d+i-1]_q}{[a+b+c+d+2i-3]_q[a+b+c+d+2i-2]_q^2[a+b+c+d+2i-1]_q}.$$

On retrouve les déterminants de Hankel décalés des β_n pour $a=b=1$ et $(c,d)=(0,0),(0,1),(1,1)$ (formules (4.7), (4.8) et (4.9)).

Annexe A. Un q-analogue de la formule de Faulhaber

On présente ici un q-analogue de la formule classique de sommation des puissances des entiers consécutifs à l'aide des polynômes de Bernoulli.

Proposition A.1. *Pour N entier positif ou nul, on a*

$$\sum_{k=0}^{N} q^k [k]_q^n = \int_0^{[N+1]_q} \beta_n(z)dz.$$

Démonstration. En posant $z=[N+1]_q$ dans le lemme 2.5, on a

$$c = 1-(1-q)[N+1]_q = q^{N+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{[N+1]_q} \beta_n(z)dz &= \frac{[N+1]_q}{(q-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1-q}{1-q^{k+1}} \cdot \frac{1-q^{(N+1)(k+1)}}{1-q^{N+1}} \\ &= \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{\ell=0}^{N} q^{\ell(k+1)} \\ &= \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{\ell=0}^{N} q^{\ell} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} q^{\ell k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} q^{\ell} [\ell]_q^n. \end{aligned}$$

□

On peut aussi facilement déduire du cas particulier $N = 0$ de la proposition ci-dessus la formule suivante

$$\Psi\left(e^{tx}\frac{e^{(1+(q-1)x)t}-1}{(1+(q-1)x)t}\right) = 1, \tag{A.1}$$

qui redonne en $q = 1$ la formule usuelle $\Psi\left(e^{tx}\right) = t/(e^t - 1)$ pour la série génératrice des nombres de Bernoulli.

Bibliographie

[1] W. A. Al-Salam & L. Carlitz, « Some determinants of Bernoulli, Euler and related numbers », *Portugal. Math.* **18** (1959), p. 91-99.

[2] G. Andrews & J. Wimp, « Some q-orthogonal polynomials and related Hankel determinants », *Rocky Mountain J. Math.* **32** (2002), n° 2, p. 429-442, Conference on Special Functions (Tempe, AZ, 2000).

[3] T. Arakawa, T. Ibukiyama & M. Kaneko, *Bernoulli numbers and zeta functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2014, With an appendix by Don Zagier, xii+274 pages.

[4] L. Carlitz, « q-Bernoulli numbers and polynomials », *Duke Math. J.* **15** (1948), p. 987-1000.

[5] ———, « Bernoulli and Euler numbers and orthogonal polynomials », *Duke Math. J* **26** (1959), p. 1-15.

[6] F. Chapoton, « A rooted-trees q-series lifting a one-parameter family of Lie idempotents », *Algebra Number Theory* **3** (2009), n° 6, p. 611-636.

[7] ———, « Fractions de Bernoulli-Carlitz et opérateurs q-zeta », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **22** (2010), n° 3, p. 575-581.

[8] F. Chapoton & D. Essouabri, « q-Ehrhart polynomials of Gorenstein polytopes, Bernoulli umbra and related Dirichlet series », *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory* **5** (2015), n° 4, `http://arxiv.org/abs/1408.1329`.

[9] K.-W. Chen, « A summation on Bernoulli numbers », *J. Number Theory* **111** (2005), n° 2, p. 372-391.

[10] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978, Mathematics and its Applications, Vol. 13, xii+249 pages.

[11] D. Dumont, « Further triangles of Seidel-Arnold type and continued fractions related to Euler and Springer numbers », *Adv. in Appl. Math.* **16** (1995), n° 3, p. 275-296.

[12] J. S. Frame, « The Hankel power sum matrix inverse and the Bernoulli continued fraction », *Math. Comp.* **33** (1979), n° 146, p. 815-826.

[13] M. FULMEK & C. KRATTENTHALER, « The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis. II », *European J. Combin.* **21** (2000), n° 5, p. 601-640.
[14] G. GASPER & M. RAHMAN, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, With a foreword by Richard Askey, xx+287 pages.
[15] R. KOEKOEK, P. A. LESKY & R. F. SWARTTOUW, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010, With a foreword by Tom H. Koornwinder, xx+578 pages.
[16] H. T. KOELINK, « On Jacobi and continuous Hahn polynomials », *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), n° 3, p. 887-898, preprint arxiv :math/9409230.
[17] C. KRATTENTHALER, « Advanced determinant calculus », *Sém. Lothar. Combin.* **42** (1999), p. Art. B42q, 67 pp. (electronic), The Andrews Festschrift (Maratea, 1998).
[18] ———, « Advanced determinant calculus : a complement », *Linear Algebra Appl.* **411** (2005), p. 68-166.
[19] L. J. ROGERS, « On the Representation of Certain Asymptotic Series as Convergent Continued Fractions », *Proc. London Math. Soc.* **S2-4** (1905), n° 1, p. 72.
[20] T.-J. STIELTJES, « Recherches sur les fractions continues [Suite et fin] », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* **9** (1895), n° 1, p. A5-A47.
[21] J. TOUCHARD, « Nombres exponentiels et nombres de Bernoulli », *Canad. J. Math.* **8** (1956), p. 305-320.

Frédéric CHAPOTON
Institut de Recherche Mathématique Avancé
CNRS UMR 7501, Université de Strasbourg
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg, France
E-mail: chapoton@unistra.fr

Jiang ZENG
Institut Camille Jordan, CNRS UMR 5208
Université Claude Bernard Lyon 1
F-69622 Villeurbanne cedex, France
E-mail: zeng@math.univ-lyon1.fr