JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

ALEXANDER ALVAREZ
PABLO OLIVARES

Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance

Journal de la société française de statistique, tome 146, nº 4 (2005), p. 23-54
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2005__146_4_23_0>

© Société française de statistique, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉTHODES D'ESTIMATION POUR DES LOIS STABLES AVEC DES APPLICATIONS EN FINANCE

Alexander ALVAREZ * et Pablo OLIVARES **

RÉSUMÉ

Cet article est une revue des méthodes d'estimation des paramètres de lois stables. On considère des méthodes de queue, quantiles, moments, maximum de vraisemblance et de fonction caractéristique. On discute l'implémentation numérique de ces méthodes et les résultats obtenus sur des échantillons simulés et sur des données financières réelles, telles des indices ou des taux de change.

ABSTRACT

This paper is a review of estimation methods for the parameters of the stable laws. We consider queue methods, quantils method, moments methods, maximum likelihood method and characteristic function methods. We discuss the numeric implementation of these methods and the results obtained for simulated data and real financial data as indexes and exchange rates.

1. Introduction

La loi normale échoue à décrire l'évidence empirique dans les marchés financiers. Une alternative possible est d'introduire les lois stables (*cf.* Lévy [23]), ce que Mandelbrot [25] et Fama [5] ont proposé dans les années 60. D'une part elles peuvent rendre compte des queues lourdes et du comportement asymétrique, d'autre part, dépendant de quatre paramètres, les lois stables sont plus flexibles que les lois normales pour ajuster des données empiriques dans les processus d'estimation et de test de modèle. Une autre bonne propriété est que ces lois ont un domaine d'attraction, c'est-à-dire qu'elles sont des limites de sommes de variables aléatoires. Les lois stables ont été généralisées aussi au cas multivarié où elles peuvent être utiles pour exprimer des dépendances très complexes. Plusieurs méthodes pour la simulation de variables aléatoires stables et pour l'estimation de leurs paramètres sont disponibles.

* Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana. San Lázaro y L, CP 10400. Cuba. E-mail : alex@matcom.uh.cu

** Department of Mathematics and Statistics, York University. N520 Ross Building, 4700 Keele Street, Toronto, Ontario, Canada. Email : olivares@rogers.com

Lévy-Véhel et Walter [24] mettent en évidence les avantages des lois stables pour la modélisation financière et fournissent des méthodes de simulation de variables aléatoires stables et d'estimation de leurs paramètres.

Dans ce travail, nous nous proposons de faire un relevé des diverses méthodes d'estimation considérées dans ce domaine et nous en présentons les principales propriétés. Nous appliquons ces méthodes à des données financières qui présentent de l'asymétrie et des queues lourdes.

Il existe des études comparatives des méthodes d'estimation pour des lois stables mais, à notre connaissance, il s'agit d'études concentrées sur quelque classe d'estimateurs : Mittnik et Rachev [31] comparent les méthodes FFT et la méthode de calcul direct de la densité des lois stables; Kogon et Williams [19] se concentrent sur les méthodes de fonction caractéristique; Weron [43] n'inclut pas la méthode de maximum de vraisemblance dans son étude, etc.

Dans ce travail nous commençons par introduire les variables aléatoires stables. Puis nous présentons les différentes méthodes d'estimation pour ce type de variable aléatoire et commentons leurs propriétés. Puis on fait une étude par simulation pour tester et comparer les méthodes présentées et finalement on étudie la loi de répartition marginale de différentes séries financières réelles.

2. Définition, propriétés et paramétrisations des variables aléatoires stables

Les conditions suivantes sont des définitions équivalentes d'une variable aléatoire stable X :

a) Soient a, b deux nombres réels positifs et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Il existe $c \in R^+$ et $d \in R$ qui satisfont :

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \text{ en distribution}$$

b) Soit n un entier positif, $n \geqslant 2$, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n copies indépendantes de X. Alors il existe $c_n \in R^+$ et $d_n \in R$ tels que

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = c_n X + d_n \text{ en distribution}$$

c) X a un domaine d'attraction, i.e., il existe une suite de variables aléatoires i.i.d. $\{Y_i\}_{i \in N}$, une suite de nombres réels positifs $\{a_i\}_{i \in N}$ et une suite de nombres réels $\{b_i\}_{i \in N}$ tels que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - b_n \to X \text{ en distribution}$$

d) La fonction caractéristique (FC) de X admet la forme suivante :

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta sgn(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma|t|(1 + i\beta \frac{2}{\pi} sgn(t) \log|t|) + i\mu t) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{1}$$

où les paramètres satisfont les restrictions suivantes : $\alpha \in (0, 2]$,$\sigma \in R_0^+$, $\beta \in [-1, 1]$,$\mu \in R$.

Une variable aléatoire qui a cette expression pour sa FC est notée $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Mais cette représentation de la FC, qui s'appelle paramétrisation standard, a le désavantage de ne pas être continue en ses paramètres. En fait, il y a discontinuité en les points où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. Par ailleurs il existe d'autres paramétrisations de la FC plus adaptées aux différents problèmes.

Ici, on fait référence à deux paramétrisations proposées par Zolotarev [46]

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta sgn(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} (|\sigma t|^{1-\alpha} - 1)] + i\mu_0 t) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma|t|[1 + i\beta \frac{2}{\pi} sgn(t)(\log|t| + \log\sigma)] + i\mu_0 t) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Cette représentation S^0 se note $X \sim S_\alpha^0(\sigma, \beta, \mu_0)$. Les paramètres α, β et σ de la paramétrisation S^0 sont les mêmes que ceux de la paramétrisation standard, mais μ et μ_0 sont reliés par :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 - \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \mu_0 - \beta \frac{2}{\pi} \sigma \log\sigma & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Cette paramétrisation est très importante parce que la fonction caractéristique, la densité et la fonction cumulative de répartition sont continues par rapport aux quatre paramètres. Donc, elle est bien conditionnée numériquement pour le calcul.

Une autre paramétrisation S^1 est donnée par :

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp(-\sigma_2^\alpha |t|^\alpha \exp[-i\beta_2 sgn(t) \frac{\pi}{2} K(\alpha)] + i\mu t) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \exp(-\sigma_2 |t|(\frac{\pi}{2} + i\beta_2 sgn(t) \log|t|) + i\mu t) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{4}$$

où

$$K(\alpha) = \alpha - 1 + sgn(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{pour } \alpha < 1 \\ \alpha - 2 & \text{pour } \alpha > 1 \end{cases}$$

Les paramètres α et μ sont les mêmes que pour la paramétrisation standard; les autres paramètres satisfont les relations suivantes :

$$\sigma_2 = \sigma(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$\tan(\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2}) = \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}$$

pour $\alpha \neq 1$ et,

$$\sigma_2 = \frac{2}{\pi}\sigma \text{ et } \beta_2 = \beta$$

pour $\alpha = 1$.

THÉORÈME 2.1. — *Les variables aléatoires stables ont les propriétés suivantes :*

i) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires stables et indépendantes, avec $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, pour $i = 1, 2$, alors $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ où

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

ii) Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et $a \in R$, alors : $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$,

iii) Si $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et $a \in R$.
alors :

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma, (sgn(a)\beta, a\mu) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ S_1(|a|\sigma, sgn(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\log|a|)\sigma\beta) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{5}$$

iv) Si $\alpha \in (0, 2)$ et $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ alors $-X \sim S_\alpha(-\sigma, \beta, 0)$.

v) Si $\alpha \in (0, 2)$ et $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ alors

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X > x) = C_\alpha(1 + \beta)\sigma^\alpha \tag{6}$$

où C_α est une constante qui dépend de α.

vi) Pour $\alpha \in (0, 2)$ et $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $E|X|^p$ existe pour $0 < p < \alpha$ et $E|X|^p = \infty$ pour $p \geqslant \alpha$.

Noter que les propriétés ii)-v) nous donnent une interprétation de α comme paramètre associé aux queues, β comme un paramètre d'asymétrie, σ comme un paramètre d'échelle et μ comme un paramètre de tendance centrale. Les propriétés v) and vi) expriment le comportement des queues lourdes. Enfin nous pouvons noter que la loi normale est dans la famille des lois stables. Une référence très importante sur les propriétés des lois stables est le livre de Samorodnitsky et Taqqu [40].

3. Presentation de différentes méthodes d'estimation

Dans cette section, on suppose que l'on dispose d'un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aléatoires stables, indépendantes et identiquement distribuées, avec $X_i \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

3.1. Méthodes basées sur l'estimation du paramètre α

Les deux méthodes suivantes sont des méthodes de l'estimation du paramètre α basées sur l'information donnée par la queue de la fonction cumulative de la loi empirique. La principale difficulté consiste en le choix du point où commence la queue.

3.1.1. Méthode de Régression de Queue

Cet estimateur se fonde sur le résultat connu suivant : les queues des lois stables se comportent en puissance α (voir l'expression 6). Pour x assez grand, on prend les logarithmes de chaque membre de cette expression et on obtient :

$$\log P(X > x) \sim \log[C_\alpha(1+\beta)\sigma^\alpha] - \alpha \log x$$

Alors, on considère une régression linéaire à partir de cette dernière expression pour différentes valeurs de la variable x. La pente de la droite obtenue sera un estimateur de $-\alpha$.

Procédure concrète de l'algorithme

- Choisir les points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans la queue de la fonction cumulative de distribution empirique.
- Calculer la fréquence relative des données sur les points choisis, i.e.

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} 1_{[X_j > x_i]}}{n} \approx P(X > x_i)$$

- Ajuster la régression linéaire :

$$\log y_i = k - \alpha \log x_i.$$

On arrive à l'expression de l'estimateur

$$\hat{\alpha} = -\frac{\sum_{i=1}^{k}(\log y_i - \overline{\log y_i})}{\sum_{i=1}^{k}(\log x_i - \overline{\log x_i})} \tag{7}$$

Caractéristiques de la méthode

Le méthode est très facile à implémenter. La complexité de la méthode est d'ordre $O(n)$.

3.1.2. Estimateur de Hill

Une alternative à l'estimateur de régression est l'estimateur de Hill [13] basé sur les différences entre les logarithmes des statistiques d'ordre. L'expression de l'estimateur de Hill est :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \log X_{[n+1-j]} - \log X_{[n-k]}} \tag{8}$$

où $X_{[j]}$ est la j-ième statistique d'ordre. Son écart-type est :

$$\widehat{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{k\hat{\alpha}}{(k-1)(k-2)^{1/2}} \text{pour } k > 2 \tag{9}$$

Caractéristiques de la méthode

On l'a déjà vu, le choix de k, taille de la queue, n'est pas facile. Excepté ce problème, la méthode est facile à implémenter.

Mason [27] a démontré la convergence de cet estimateur, pris comme un cas particulier dans un cadre plus général, tandis que Goldie et Smith [11] ont démontré la normalité asymptotique, i.e. $(\hat{\alpha}_{Hill}^{-1} - \alpha^{-1})k^{\frac{1}{2}} \sim N(0, \alpha^{-2})$ pour certain choix de $k(n)$.

3.2. Méthodes de quantiles et moments

3.2.1. Méthode de McCulloch

Fama et Roll dans [6] ont proposé une méthode basée sur les quantiles empiriques pour l'estimation des paramètres α et σ des lois symétriques stables, lorsque $1 < \alpha \leqslant 2$. La méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle a le désavantage que les estimateurs obtenus sont asymptotiquement biaisés; de plus, les conditions imposées aux paramètres sont très restrictives.

McCulloch [28] a généralisé cette méthode en utilisant les quantiles empiriques. Il a obtenu des estimateurs pour les quatre paramètres pour une région très grande de l'espace paramétrique.

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire stable $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, et soit x_p le quantile d'ordre p, c'est-à-dire, $F(x_p) = p$, et $\hat{x}_p$ le quantile empirique correspondant. Pour éviter une fausse asymétrie des petits échantillons, une correction est nécessaire : si les x_i sont ordonnées de façon croissante cette correction se fait en posant $\hat{x}_{q(i)} = x_i$ où $q(i) = \frac{2i-1}{2n}$.

Puis, on effectue une interpolation linéaire pour obtenir $\hat{x}_p$ à partir de $\hat{x}_{q(i)}$ et $\hat{x}_{q(i+1)}$ où $q(i) \leqslant p \leqslant q(i+1)$. L'estimateur obtenu $\hat{x}_p$ est un estimateur convergent de x_p.

McCulloch définit :

$$\nu_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

$$\nu_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

et montre que ces indices ne dépendent pas de σ ni de μ. De plus ils sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de α et β. Cette relation peut s'inverser, donc les paramètres α et β peuvent être vus comme des fonctions de ν_α et ν_β, soit :

$$\alpha = \phi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta), \beta = \phi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta)$$

McCulloch construit ensuite deux nouveaux indices :

$$\nu_\sigma = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\sigma}$$

et

$$\nu_\zeta = \frac{\zeta - x_{0.5}}{\sigma}$$

où

$$\zeta = \begin{cases} \mu + \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \mu & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

Nous pouvons voir que ν_σ et ν_ζ dépendent seulement de α et β c'est-à-dire :

$$\nu_\sigma = \phi_3(\alpha, \beta) \text{ et } \nu_\zeta = \phi_4(\alpha, \beta).$$

Si les fonctions ϕ_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, sont connues, alors l'algorithme d'estimation des quatre paramètres peut être défini comme ci-dessous.

Procédure concrète de l'algorithme

- Ordonner l'échantillon.
- Calculer les quantiles empiriques $\hat{x}_{0.05}$, $\hat{x}_{0.25}$, $\hat{x}_{0.5}$, $\hat{x}_{0.75}$ et $\hat{x}_{0.95}$.
- Estimer les indices ν_α et ν_β :

$$\hat{\nu}_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}$$

$$\hat{\nu}_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.5}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}$$

- Estimer α et β :

$$\hat{\alpha} = \phi_1(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta), \hat{\beta} = \phi_2(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta)$$

- Estimer σ

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

- Estimer ζ

$$\hat{\zeta} = \hat{x}_{0.5} + \hat{\sigma}\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

- Estimer μ

$$\hat{\mu} = \hat{\zeta} - \hat{\beta}\hat{\sigma}\tan\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}$$

Caractéristiques de la méthode

Comme $\hat{x}_p$ est un estimateur convergent et asymptotiquement de loi normale de x_p, et que les fonctions ϕ_i sont continues, alors les estimateurs des paramètres sont convergents et asymptotiquement de loi normale. Dans [10] s'analyse l'efficacité de cette méthode.

Le point clé de la méthode est le calcul des fonctions ϕ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. On peut construire des tables pour un réseau de points et interpoler bilinéairement, en principe les tables de DuMouchel [3] peuvent être utilisées. Sans considérer le travail préliminaire de génération de ces tables, la méthode est facile à implémenter. La complexité de la méthode est de l'ordre de $O(n \log n)$.

3.2.2. Méthode des L-Moments

Les L-moments sont des statistiques pour des lois ou pour des échantillons. Les moments pondérés, définis par Greenwood *et al.* ([12]) sont précurseurs des L-moments, qui sont exactement des combinaisons linéaires des moments pondérés, qui ont, comme les moments ordinaires, une interprétation comme mesures de position, dispersion, asymétrie, kurtosis et des autres aspects sur la forme des lois de distribution ou des échantillons.

Les L-moments ont plusieurs avantages sur les moments ordinaires comme :

- Les L-moments d'une loi de distribution ont un sens dès que le moment d'ordre 1 existe, sans avoir besoin de l'existence des autres moments (voir [16]).
- L'approximation asymptotique des distributions empiriques est meilleure pour les L-moments que pour les moments ordinaires (voir [16]).
- Les L-moments sont moins sensibles aux données aberrantes (voir [39] et [41]).

Les moments pondérés pour une variable aléatoire X de fonction de répartition F se définissent par :

$$M_{p,r,s} = E\{X^p[F(X)]^r[1 - F(X)]^s\}$$

et en particulier on va considérer $p = 1$ et $s = 0$, c'est-à-dire $\beta_r = M_{1,r,0}$:

$$\beta_r = \int xF(x)^r dF(x)$$

Alors les L-moments sont définis par :

$$\lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

où les coefficients sont ceux des polynômes de Legendre décalés. (Voir [15] pour les détails).

Les moments empiriques pondérés pour un échantillon $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ordonné en ordre croissant sont :

$$b_0 = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$$b_r = n^{-1} \sum_{j=r+1}^{n} \frac{(j-1)(j-2)\ldots(j-r)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)} X_j.$$

Les premiers L-moments d'un échantillon sont définis comme pour une variable aléatoire :

$$l_1 = b_0$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0$$

Remarquons que b_r est un estimateur sans biais de β_r, donc l_r est un estimateur sans biais de λ_r.

En statistique, la méthode classique des moments consiste à égaler les moments empiriques et les moments théoriques. Ce que nous proposons est d'égaler les L-moments empiriques pour un échantillon de variables aléatoires stables aux L-moments théoriques, pour obtenir des estimateurs des paramètres. C'est-à-dire : les L-moments théoriques sont fonction des paramètres des lois stables, $\lambda_r = \lambda_r(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$. Comme les variables aléatoires stables ont quatre paramètres, on va considérer le système d'équations : $\lambda_r(\alpha, \sigma, \beta, \mu) = l_r$ pour $r = 1, 2, 3, 4$. La résolution de ce système permet d'obtenir les estimateurs.

Caractéristiques de la méthode

Cette méthode est une méthode d'estimation très générale qui a les avantages de la méthode classique des moments comme : convergence, normalité asymptotique, mais elle est aussi plus robuste et moins exigeante et, dans certains cas, on obtient des estimateurs plus efficaces que les estimateurs de maximum de vraisemblance (pour les détails voir [16]).

Dans le cas de variables aléatoires stables elle s'applique au cas où $\alpha > 1$, mais ceci n'est pas très restrictif quand on s'intéresse aux données financières

qui semblent avoir un coefficient de stabilité beaucoup plus grand que 1 (voir [26]).

La principale difficulté de la méthode est qu'il n'existe pas d'expressions fermées pour les L-moments théoriques donc résoudre le système d'équations peut être très complexe et aussi conduire à des erreurs d'approximation. Actuellement on ne connaît pas de méthode efficace pour résoudre le système.

3.3. Maximum de vraisemblance

La méthode de maximum de vraisemblance peut s'appliquer aussi au cas de variables aléatoires stables. Ceci a été étudié depuis longtemps (*cf.* [4]).

Le point clé pour appliquer la méthode est le calcul de la densité d'une variable aléatoire stable parce qu'il n'existe pas de formule exacte pour la densité de ces lois. Holt et Crow (1973, [14]) ont fourni des tables de valeurs de la densité pour différentes valeurs de α et β; Worsdale (1975, [44]) et Panton (1992, [34]) ont fourni des tables des fonctions de répartition des lois stables symétriques; Brothers, DuMouchel et Paulson (1983, [1]) et Paulson et Delahanty (1993, [35]) en ont donné pour les quantiles des lois stables dans le cas général; McCulloch et Panton (1998, [30]) ont donné des tables des densités et des quantiles pour des lois stables totalement asymétriques. Pour les lois stables symétriques McCulloch (1996, [29]) a développé des algorithmes efficaces pour approcher la densité et la fonction de répartition pour $\alpha > 0.85$. D'autres auteurs suggèrent d'approcher la densité en inversant l'expression de la fonction caractéristique avec la transformée rapide de Fourier, mais survient le problème de troncature pour calculer une intégrale impropre. Une autre méthode proposée par Nolan, [32], consiste à exprimer la densité pour des cas intermédiaires ($-1 < \beta < 1$) comme convolution de deux variables aléatoires stables totalement asymétriques. Cette dernière méthode approche assez bien la densité en valeurs centrales mais moins bien dans la queue de la distribution.

Zolotarev dans [46] a obtenu des représentations intégrales pour des fonctions de densité et répartition de variables aléatoires stables, mais son implémentation n'est pas efficace à cause de problèmes numériques. Nolan [33] obtient des formules similaires pour la paramétrisation S^0 qui permettent de calculer de façon précise les fonctions de densité, répartition et quantiles dans tout l'espace paramétrique.

Représentation intégrale de Nolan-Zolotarev

Pour écrire la représentation intégrale des fonctions de densité et répartition on définit :

$$\zeta = \zeta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$\theta_0 = \theta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{11}$$

$$c_1(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) & \text{pour } \alpha < 1 \\ 0 & \text{pour } \alpha = 1 \\ 1 & \text{pour } \alpha > 1 \end{cases} \tag{12}$$

$$V(\theta;\alpha,\beta) = \begin{cases} (\cos\alpha\theta_0)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha(\theta_0+\theta)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\theta)}{\cos\theta} \\ \qquad\qquad \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\beta\theta}{\cos\theta}\right) \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\theta\right)\tan\theta\right) \\ \qquad\qquad \text{pour } \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

La représentation intégrale de Nolan-Zolotarev s'obtient à partir du résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si $X \sim S_\alpha^0(1,\beta,0)$ alors les fonctions de densité et de répartition de X sont données par :*

(a) Quand $\alpha \neq 1$ et $x > \zeta$,

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha(x-\zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi|\alpha-1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta;\alpha,\beta) \exp\left(-(x-\zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta;\alpha,\beta)\right) d\theta$$

et

$$F(x;\alpha,\beta) = c_1(\alpha,\beta) + \frac{sgn(1-\alpha)}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-(x-\zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta;\alpha,\beta)\right) d\theta$$

(b) Quand $\alpha \neq 1$ et $x = \zeta$,

$$f(\zeta;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\cos(\theta_0)}{\pi(1+\zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}}$$

et

$$F(\zeta;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$$

(c) Quand $\alpha \neq 1$ et $x < \zeta$,

$$f(x;\alpha,\beta) = f(-x;\alpha,-\beta)$$

et

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - F(-x;\alpha,-\beta)$$

(d) Quand $\alpha = 1$,

$$f(x;1,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta;1,\beta)\exp\left(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}}V(\theta;1,\beta)\right)d\theta & \textit{pour } \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \textit{pour } \beta = 0 \end{cases}$$

et

$$F(x;1,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}}V(\theta;1,\beta)\right)d\theta & \textit{pour } \beta > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x & \textit{pour } \beta = 0 \\ 1 - F(x;\alpha,-\beta) & \textit{pour } \beta < 0 \end{cases}$$

La démonstration du théorème peut se voir en [33].

Caractéristiques de la méthode

Les propriétés (convergence, normalité asymptotique et optimalité au sens de la variance) des estimateurs de maximum de vraisemblance sont bien connues dans des cas très généraux. Pour le cas de variables aléatoires stables DuMouchel [4] a démontré ces propriétés. Le problème principal pour appliquer cette méthode à une suite de variables aléatoires stables est qu'il est très coûteux d'évaluer la fonction de vraisemblance de l'échantillon :

$$l(\alpha,\sigma,\beta,\mu) = \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i,\alpha,\sigma,\beta,\mu). \tag{14}$$

De plus, nous avons la difficulté de trouver le maximum de l sur l'espace paramétrique pour lequel on a besoin d'utiliser des méthodes itératives d'optimisation. Comme la fonction objectif est très complexe on utilise la méthode de Davidon-Fletcher-Powell (notée DFP dans les tables 3 à 5) qui est une méthode itérative de type quasi-Newton, mais aussi le recuit simulé qui est une méthode de type Monte Carlo-chaîne de Markov. On discute ensuite ces différents points de vue pour maximiser l.

3.4. Méthodes basées sur la fonction caractéristique

L'expression de la fonction caractéristique empirique est

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\{itX_j\}$$

Comme $|\hat{\phi}(t)|$ est bornée par 1, alors tous les moments de $\hat{\phi}(t)$ sont finis. A partir de la loi des grands nombres, $\hat{\phi}(t)$ est un estimateur convergent de $\phi(t)$, la fonction caractéristique théorique. Les méthodes d'estimation dans cette section sont des méthodes basées sur cette expression. Chacune des méthodes essaye d'obtenir la fonction caractéristique d'une variable aléatoire stable plus

«proche» de la fonction caractéristique empirique en un certain sens. Ces méthodes sont justifiées par la correspondance biunivoque qui existe entre les fonctions de répartition et leurs transformées de Fourier-Stieltjes.

Le premier qui a exposé cette idée a été Press [38], mais ensuite, plusieurs modifications ont été proposées : voir Paulson, Holcomb et Leitch [36], Feuerverger et McDunnough, [8] et [9], Koutrouvelis, [20] et [21], et plus récemment Kogon et Williams [19]. Un autre avantage de ces méthodes est qu'elles peuvent être étendues à des cas qui ne sont pas i.i.d., en particulier des modèles dynamiques hétéroscédastiques : on peut considérer des fonctions caractéristiques multivariées ou conditionnelles. Les propriétés asymptotiques (convergence et normalité) sont préservées ([7] et [18]).

3.4.1. Méthodes de minimum de distance

Ces méthodes calculent

$$\hat{\theta} = argmin_{\theta \in \Theta} \parallel \phi(t) - \hat{\phi}(t) \parallel$$

où $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ est un point de l'espace paramétrique Θ et $\parallel \ . \ \parallel$ est une norme. Habituellement, on considère la norme L^∞ ou une norme pondérée L^r, le premier cas posant le problème de la non-différentiabilité de $g(\theta) = \sup_t |\phi(t) - \hat{\phi}(t)|$, ce qui rend la minimisation de g très complexe. C'est pourquoi on considère plutôt les normes pondérées L^r :

$$h(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t) - \hat{\phi}(t)|^r W(t) dt \tag{15}$$

où $W(t)$ est une fonction de poids garantissant la convergence de l'intégrale.

Les estimateurs de minimum de distance minimisent g ou h. Press [38] a montré que ces estimateurs sont convergents, mais il n'analyse pas leur efficacité.

Leitch et Paulson [22], et Paulson *et al.* [36] ont été les premiers à obtenir pratiquement des estimateurs basés sur la seconde méthode (utilisant h). Ils ont pris $r = 2$ et $W(t) = \exp(-t^2)$ pour bénéficier des facilités de calcul associées à la quadrature de Hermite. Pour les détails de calcul voir [36].

3.4.2. Méthode des moments

Press ([37] et [38]) a proposé une autre méthode basée sur une transformation de la fonction caractéristique.

Pour tout α,

$$|\phi(t)| = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)$$

alors, $-\log|\phi(t)| = \sigma^\alpha |t|^\alpha$.

Il y a deux cas à considérer, $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$. Dans le premier cas, on prend deux valeurs non nulles de t, $t_1 \neq t_2$, alors

$$-\log|\phi(t_k)| = \sigma^\alpha |t_k|^\alpha$$

pour $k = 1, 2$. On résout le système d'équations en α et σ, et l'on remplace $\phi(t)$ par $\hat{\phi}(t)$; on arrive à :

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \dfrac{\log |\hat{\phi}(t_1)|}{\log |\hat{\phi}(t_2)|}}{\log \dfrac{|t_1|}{|t_2|}} \tag{16}$$

et

$$\log \hat{\sigma} = \frac{\log(-\log |\hat{\phi}(t_2)|) \log |t_1| - \log(-\log |\hat{\phi}(t_1)|) \log |t_2|}{\log \dfrac{\log \hat{\phi}(t_1)}{\log \hat{\phi}(t_2)}} \tag{17}$$

Pour l'estimation de β et μ on considère $u(t) = Im(\log \phi(t))$. Alors,

$$u(t) = \mu t + \sigma^\alpha |t|^\alpha \beta sgn(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}.$$

On prend deux valeurs non nulles de t, $t_3 \neq t_4$ il vient

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \mu + \left[\sigma^\alpha |t_k|^{\alpha-1} \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right] \beta$$

pour $k = 3, 4$. Comme

$$\hat{\phi}(t) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(tx_i)\right) + i\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin(tx_i)\right),$$

Alors,

$$\tan \hat{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \cos(tx_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sin(tx_i)}$$

À partir de cette expression on arrive à

$$\hat{\beta} = \frac{\dfrac{\hat{u}(t_4)}{t_4} - \dfrac{\hat{u}(t_3)}{t_3}}{[|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}]\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \dfrac{\hat{\alpha}\pi}{2}} \tag{18}$$

et

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \dfrac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \dfrac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{[|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}]} \tag{19}$$

Le cas $\alpha = 1$ est plus simple, en suivant le même raisonnement, on arrive aux résultats suivants :

$$\hat{\sigma} = -\frac{\log|\hat{\phi}(t_1)|}{|t_1|} \tag{20}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2}{\pi}\hat{\sigma}\log|\frac{t_4}{t_3}|} \tag{21}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\log|t_4|\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \log|t_3|\frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\log|\frac{t_4}{t_3}|} \tag{22}$$

Caractéristiques de la méthode

La méthode des moments est très facile à implémenter et elle est très efficace en temps de calcul mais très imprécise si l'échantillon n'est pas normalisé.

3.4.3. Méthode de régression

Koutrouvelis [20] présente une méthode de type régression qui construit une expression linéaire à partir de certaines fonctions de la fonction caractéristique et des paramètres α et σ. On utilise la fonction caractéristique empirique pour estimer α, qui est précisément la pente de la droite, puis on estime σ.

Une autre expression linéaire des paramètres β et μ s'obtient à partir de la fonction caractéristique, avec des relations non linéaires en α et σ, donc, une fois ces derniers paramètres estimés, il est possible d'estimer β et μ à l'aide d'une autre régression linéaire.

La première expression s'obtient à partir de l'expression générale (1) de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire stable :

$$\log(-\log|\phi(t)|^2) = \log(2\sigma^\alpha) + \alpha\log|t|.$$

Alors, on peut ajuster une régression linéaire $y_k = m + \alpha w_k + e_k$ avec $y_k = \log(-\log|\hat{\phi}(t_k)|^2)$, $t_k = \frac{\pi k}{25}, k = 1, 2, \ldots, K$ et K entre 9 et 134, selon la proposition de Koutrovelis. Ici $m = \log(2\sigma)^\alpha$ et $w_k = \log|t_k|$.

Une fois $\hat{\alpha}$ et $\hat{\sigma}$ obtenus, les estimateurs de β et μ peuvent s'obtenir à partir de :

$$\arctan\left(\frac{Im(\phi)(t)}{Re(\phi)(t)}\right) = \mu t + \beta\sigma^\alpha \tan\frac{\pi\alpha}{2} sgn(t)|t|^\alpha$$

Cette expression se déduit de (1) sans considération sur la valeur principale de la fonction arctan.

Si on prend $g_n(t) = \arctan\left(\frac{Im(\hat{\phi})(t)}{Re(\hat{\phi})(t)}\right)$ et $z = g_n(u) + \pi k_n(u)$ (l'entier $k_n(u)$ permet de considérer les autres valeurs de la fonction arctan), l'algorithme peut se décliner de la façon suivante :

- Fixer un K approprié et, pour les points $t_k = \frac{\pi k}{25}, k = 1, 2, \ldots, K$ calculer la fonction caractéristique empirique $\hat{\phi}(t_k)$,
- Calculer $y_k = \log(-\log|\phi(\hat{t}_k)|^2)$,
- Ajuster la régression linéaire $y_i = m + \alpha w_k + e_k$, pour obtenir des estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{m}$,
- Obtenir l'estimateur $\hat{\sigma}$ à partir de $m = \log(2\hat{\sigma})^{\hat{\alpha}}$,
- Calculer, pour un L approprié, $z(u_i)$ pour $u_i = \frac{\pi i}{50}$ et $i = 1, 2, \ldots, L$
- Ajuster la régression

$$z_i = \mu u_i + \beta\hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan\frac{\pi\hat{\alpha}}{2} sgn(u_i)|u_i|^{\hat{\alpha}} + \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, L.$$

pour obtenir les estimateurs de μ et β.

Caractéristiques de la méthode

La méthode de régression est facile à implémenter et elle est très efficace en temps calcul. Les propriétés asymptotiques (convergence et normalité) des estimateurs de moindres carrés dans une régression linéaire sont bien connues. Le principal inconvénient de cette méthode est que les résultats sont insatisfaisants quand l'échantillon n'est pas normalisé (voir [43]). Pour résoudre ce problème Koutrovelis dans [21] a proposé la variante suivante de la méthode dont les résultats sont bien meilleurs pour une plus grande région de l'espace paramétrique.

3.4.4. Méthode de Régression Itérative

Au pas k de l'algorithme on utilise les estimateurs $\hat{\sigma}_{k-1}$ et $\hat{\mu}_{k-1}$ pour normaliser l'échantillon selon ces valeurs, c'est-à-dire, pour chaque X de l'échantillon on fait la transformation $(X - \hat{\mu}_{k-1})/\hat{\sigma}_{k-1}$. Le nouvel échantillon est presque normalisé et l'on estime ses paramètres par la méthode de régression. Si les estimateurs obtenus pour l'échantillon normalisé sont $(\hat{\alpha}_k, \hat{\sigma}_k^*, \hat{\beta}_k, \hat{\mu}_k^*)$, alors on actualise les paramètres d'échelle et de position de l'échantillon original de la façon suivante :

$$\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_{k-1}\hat{\sigma}_k^*$$

et

$$\hat{\mu}_k = \hat{\sigma}_{k-1}\hat{\mu}_k^* + \hat{\mu}_{k-1}$$

Les valeurs $\hat{\sigma}_0$ et $\hat{\mu}_0$ pour initialiser l'algorithme doivent être des estimateurs proches des valeurs réelles des paramètres. Dans nos simulations on utilise l'estimateur de McCulloch pour les obtenir.

4. Application à des simulations et des données réelles

Pour tester les méthodes d'estimation et élaborer des scenarii, on a besoin d'un générateur efficace de nombres pseudo-aléatoires suivant une loi stable. La principale difficulté est qu'il n'existe pas de fonction de densité explicite, sauf dans quelques cas particuliers, donc les méthodes classiques, comme la méthode de la transformation inverse, ne peuvent pas s'appliquer.

4.1. Méthode de génération de Weron

Une première solution au problème de la génération de variables aléatoires stables a été trouvée par Kanter. Dans [17] il a développé une méthode directe pour la génération de variables de loi $S_\alpha(1,1,0)$ pour $\alpha < 1$. Puis cette méthode a été étendue au cas général. Chambers *et al.* ([2]) ont été les premiers à obtenir cette formule en se basant sur la représentation intégrale de la densité de [45].

Plus récemment, dans [42], Weron a développé une technique exacte à partir d'une transformation non-linéaire d'une paire de variables indépendantes. Dans la paramétrisation S^1, la méthode de génération est basée sur le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. (Weron(1996)). — *Soit U une variable aléatoire uniforme sur $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et E une variable aléatoire exponentielle de moyenne 1, indépendante de U, et*

$$U_0 = -\frac{\pi}{2}\beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha}$$

alors la variable aléatoire :

$$X = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha(U-U_0)}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\dfrac{\cos\left(U-\alpha(U-U_0)\right)}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \left(\dfrac{\pi}{2}+\beta_2 U\right)\tan U - \beta_2 \log\left(\dfrac{E\cos U}{\frac{\pi}{2}+\beta_2 U}\right) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases} \tag{23}$$

est de loi $S^1_\alpha(1,\beta_2,0)$.

Rappelons que $K(\alpha)$ et β_2 sont définis dans la section 2.

Ce dernier théorème permet d'établir un algorithme pour calculer la variable aléatoire Y de loi $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ de la façon suivante :

- Simuler $U_1 \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ et $U_2 \sim U(0,1)$.
- $E = -\log U_2$ (par la méthode de la transformation inverse, $E \sim \exp(1)$).
- Si $\alpha \neq 1$ calculer :

$$B(\alpha,\beta) = \left(\frac{\arctan\left(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha}\right)$$

$$S(\alpha,\beta) = (1+\beta^2\tan^2\frac{\pi\alpha}{2})^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$X = S(\alpha,\beta)\frac{\sin\alpha(U+B(\alpha,\beta))}{(\cos U)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\cos\left(U-\alpha(U+B(\alpha,\beta)\right)}{E}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

– Si $\alpha = 1$ calculer :

$$X = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\beta U)\tan U - \beta\log\frac{\frac{\pi}{2}E\cos U}{\frac{\pi}{2}+\beta U}$$

– Calculer Y par les relations :

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\log\sigma + \mu & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

L'algorithme est facile à implémenter. Les tableaux ci-dessous montrent les résultats du test de Kolmogorov-Smirnov pour les données simulées. La fraction de données rejetées est proche du niveau de signification nominal du test.

TABLEAU 1. — Test de Kolmogorov-Smirnov pour 100000 échantillons simulées de taille 500. Niveau de signification : 0.05

Paramètres	Fraction rejetée
$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$	0.05049
$\alpha = 1.5$, $\beta = 0$, $\sigma = 10$, $\mu = 0$	0.05179

TABLEAU 2. — Test de Kolmogorov-Smirnov pour 100000 échantillons simulées de taille 1000. Niveau de signification : 0.01

Paramètres	Fraction rejetée
$\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, σ=1, $\mu = 0$	0.0158
$\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$	0.0133

4.2. Étude de simulation

Pour tester les méthodes d'estimation on a fait une étude de simulation. Dans cette étude on travaille avec plusieurs jeux de paramètres et différentes tailles d'échantillon pour observer le comportement des estimateurs sur tout l'espace paramétrique, estimer la complexité de chaque méthode et, enfin, vérifier les propriétés asymptotiques des estimateurs.

Pour chaque jeux de paramètres, on simule 25 échantillons de même taille et indépendants les uns les autres, et contenant les réalisations de variables aléatoires stables et indépendantes. Pour chaque échantillon on estime les paramètres avec toutes les méthodes implémentées et on calcule la moyenne empirique et l'écart-type des estimations. Comme nous connaissons les valeurs réelles des paramètres on peut calculer la moyenne des biais des estimations. Si l'on suppose la normalité asymptotique, on peut aussi construire des intervalles de confiance. Bien que l'on ait estimé les paramètres par toutes les méthodes, on n'exposera pas ici les résultats obtenus par les méthodes de queue, parce que les résultats ne sont pas bons. Par ailleurs, l'information donnée par le paramètre α est insuffisante pour des calculs tels celui de la VaR (de l'anglais Value at Risk). On n'exposera pas non plus les résultats obtenus par la méthode de régression parce qu'ils ne sont pas pas bons comparés à ceux obtenus par la méthode modifiée de régression itérative, incluse dans notre travail.

Les particularités de chaque méthode ont été analysées dans la section 3. Dans cette section on fait une analyse comparative des méthodes sur les résultats obtenus dans l'étude des simulations, qui se trouvent dans les tableaux 4, 5 (*cf.* Annexe) et 3 ci-dessous. Dans ces tableaux on peut trouver la moyenne des estimations et l'écart-type (entre parenthèse) des estimations. Les aspects à comparer sont la précision de l'estimation et la complexité.

Après l'analyse des résultats de l'étude des simulations, on arrive à la conclusion que le meilleur compromis entre précision de l'estimation et vitesse est soit la méthode de McCulloch soit la méthode de régression itérative, avec préférence pour la première. La méthode de McCulloch estime assez bien dans une très grande région de l'espace paramétrique, elle n'est imprécise que lorsque α est proche de 2 ou lorsque $\alpha < 0.5$ ou lorsque les données présentent des asymétries. Dans l'analyse des données financières réelles, la valeur de α semble souvent proche de 1.5, donc l'utilisation de cette méthode est totalement justifiée.

Dans les simulations on a vu que la méthode de McCulloch estime assez bien dans le cas de petits échantillons et qu'elle est performante en temps : elle estime les paramètres d'un échantillon de taille 1000 en moins d'une seconde avec un logiciel de C++ et un ordinateur Pentium 3 à 1.5 GHz.

Par ailleurs, la méthode de régression itérative est semblable à la méthode de McCulloch en temps de calcul et en précision, mais elle nécessite un point initial qui ne doit pas être loin du vecteur des paramètres réels. Dans le programme développé pour nous, le point initial est la solution de McCulloch. C'est cette dépendance du point initial qui nous fait préférer McCulloch bien que, dans certains cas, les estimateurs soient meilleurs avec la méthode de régression itérative.

La méthode du maximum de vraisemblance, pour ses bonnes propriétés asymptotiques, est toujours une méthode à considérer. Dans notre problème, l'implémentation de cette méthode a plusieurs inconvénients. La difficulté principale est dans le calcul de la vraisemblance, qui doit se faire de façon approchée avec des méthodes numériques. Ceci implique que le coût de calcul

TABLEAU 3. — Étude de simulation pour $\alpha = 1.5$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$

Méthode		$N = 250$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 10000$
McCulloch	$\hat{\alpha}$	1.5148 (0.1381)	1.5102 (0.0718)	1.5098 (0.0812)	1.5172 (0.0199)
	$\hat{\beta}$	-0.0556 (0.2836)	-0.0292 (0.1766)	-0.0548 (0.1317)	0.0000 (0.0387)
	$\hat{\sigma}$	0.9610 (0.0696)	0.9990 (0.0566)	0.9974 (0.0334)	1.0010 (0.0130)
	$\hat{\mu}$	-0.0891 (0.2536)	-0.0578 (0.1394)	-0.0482 (0.1075)	-0.0123 (0.0272)
DFP	$\hat{\alpha}$	1.4854 (0.1507)	1.3814 (0.0827)	1.4865 (0.0995)	1.3708 (0.0161)
	$\hat{\beta}$	-0.0410 (0.2493)	-0.0169 (0.1441)	-0.0534 (0.1323)	0.0006 (0.0348)
	$\hat{\sigma}$	1.0227 (0.1364)	1.0244 (0.0557)	1.0201 (0.0532)	1.0252 (0.0182)
	$\hat{\mu}$	-0.0745 (0.2451)	-0.0463 (0.1520)	-0.0421 (0.1034)	-0.0002 (0.0439)
Moments	$\hat{\alpha}$	1.5241 (0.1281)	1.5084 (0.0927)	1.4964 (0.0594)	1.5001 (0.0182)
	$\hat{\beta}$	0.8860 (57.046)	-19.143 (41.335)	-8.6283 (45.617)	7.9698 (44.680)
	$\hat{\sigma}$	0.9765 (0.1083)	1.0212 (0.0925)	0.9970 (0.0477)	1.0029 (0.0164)
	$\hat{\mu}$	-4.5581 (29.929)	-14.538 (27.016)	-6.1292 (29.620)	4.6585 (29.747)
Régression Itérative	$\hat{\alpha}$	1.5236 (0.1234)	1.5111 (0.0599)	1.4960 (0.0563)	1.5001 (0.0143)
	$\hat{\beta}$	-0.1062 (0.2664)	-0.0048 (0.1640)	-0.0283 (0.1150)	0.0119 (0.0358)
	$\hat{\sigma}$	0.9828 (0.0664)	1.0110 (0.0507)	1.0002 (0.0268)	1.0024 (0.0099)
	$\hat{\mu}$	-0.0975 (0.2033)	-0.0300 (0.1324)	-0.0252 (0.0892)	0.0072 (0.0254)
Recuit Simulé	$\hat{\alpha}$	1.4730 (0.1128)	1.5649 (0.0745)	1.4729 (0.0701)	1.5542 (0.0181)
	$\hat{\beta}$	0.0916 (0.1410)	-0.0540 (0.1755)	0.0786 (0.1378)	-0.0092 (0.0354)
	$\hat{\sigma}$	1.2956 (0.5255)	0.9925 (0.0423)	1.2960 (0.3503)	0.9967 (0.0089)
	$\hat{\mu}$	0.0469 (0.2075)	-0.0214 (0.1237)	-0.0178 (0.1577)	-0.0015 (0.0233)

est significatif, sans compter l'erreur d'approximation induite par la formule intégrale.

Comme il n'existe pas d'expression pour l'estimateur de maximum de vraisemblance, on doit le calculer moyennant des méthodes numériques d'optimisation. Les deux solutions que nous donnons pour ce problème, sont très coûteuses en temps de calcul.

Une autre difficulté que nous avons détectée dans l'étude des simulations est, apparemment, la convergence de la méthode de quasi-Newton vers le maximum local très proche du point initial, c'est-à-dire, dans la majorité des cas, l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu par la méthode de quasi-Newton est tellement proche de l'estimateur de McCulloch que, pratiquement, elle n'offre pas d'avantage.

C'est pourquoi on décide d'utiliser le recuit simulé qui garantit la convergence vers le maximum global. Il est connu que cette méthode est très coûteuse en

temps de calcul, mais les estimateurs qu'elle permet d'obtenir dans notre étude sont les plus efficaces statistiquement, au sens où ils présentent l'écart-type le plus petit.

Les autres méthodes de fonction caractéristique, c'est-à-dire la méthode de régression et la méthode des moments sont très rapides, mais aussi très imprécises sur une très grande région de l'espace paramétrique. Pour cette raison, leur intérêt est très limité. En fait, pour les données financières analysées, le paramètre d'échelle est normalement très petit ($\sigma < 0.01$) comparé avec les valeurs où cette méthode est acceptable (environ $\sigma = 1$).

Cette analyse nous donne une méthodologie pour estimer les paramètres des lois stables. Nous suggérons d'utiliser en première instance (pour leur vitesse) la méthode de McCulloch et la méthode de régression itérative. La qualité de l'ajustement peut se vérifier avec une méthode visuelle, par exemple, la modification de la droite de Henry pour des lois stables.

4.3. Analyse des données financières réelles

L'analyse de données financières réelles comme la valeur d'une action, d'un taux de change, ou d'indices financiers, est très complexe à cause de l'influence de plusieurs facteurs. Beaucoup de ces séries ne présentent pas clairement une tendance, semblent hétéroscédastiques, elles ne sont pas stationnaires, etc.

Si on a une série (X_i), $i = 1, \ldots, n$, alors on définit la série des rendements par $R_i = \log X_{i+1} - \log X_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. On peut voir que :

$$R_i \approx \frac{X_{i+1} - X_i}{X_i},$$

c'est-à-dire représente une approximation de l'accroissement par rapport à l'instant précédent. La série des rendements parait stationnaire, comme on peut le voir sur les graphiques 1-3 et 10-11.

Le modèle classique de Black et Scholes suppose l'indépendance et la normalité des rendements mais des études empiriques ont montré qu'ils ne sont ni indépendants ni gaussiens. La dépendance entre les rendements est non linéaire, donc l'hypothèse d'indépendance est un peu difficile à supprimer pour l'analyse. Dans notre travail on change l'hypothèse de normalité en celle plus faible que les rendements suivent une loi stable qui peut expliquer des asymétries et des queues lourdes que la loi gaussienne ne peut pas expliquer.

4.3.1. Taux de change

On analyse les taux de change du dollar canadien, du yen, et de la livre sterling contre le dollar américain, de novembre 1996 à septembre 2000. La taille des échantillons est de 1000 environ pour chaque monnaie.

Nous calculons la série des rendements. Comme nous l'avons dit, nous supposons que la loi de distribution de ces rendements est une loi stable dont nous estimons les paramètres par la méthode de McCulloch. On obtient les

résultats suivants :

Monnaie	α	β	σ	μ
Dollar Canadien	1.7660	0.0100	0.0021	-0.0001
Livre Sterling	1.6490	0.1600	0.0029	-0.0000
Yen Japonais	1.6490	0.2200	0.0047	0.0003

L'avantage de l'ajustement avec la loi stable sur l'ajustement donné par la loi gaussienne est évident à partir des graphiques 4-6. Pour vérifier la qualité de ces ajustements, on a aussi utilisé une autre méthode visuelle comme la droite de Henry et son équivalent pour des lois stables. Il peut se confirmer à partir des graphiques 7-9 que l'ajustement stable est assez bon cependant que la loi normale ajuste mal la queue de la distribution.

Calcul de la VaR

La VaR est une mesure de risque définie comme quantile dans les queues, c'est-à-dire à 1%, 5% et jusqu'à 10% dans des cas pratiques. On l'applique aux régulations bancaires sur les réserves. Un des objectifs de ce travail est de comparer l'estimation de la VaR obtenue avec la loi normale et celle obtenue avec la loi stable. On trouve des résultats théoriques à ce sujet dans [24]. Les tableaux suivants donnent la VaR empirique et les VaR obtenues avec la loi normale et stable pour chaque monnaie et à différents niveaux.

Dollar Canadien	1%	5%	10%
VaR Empirique	-0.00765	-0.00540	-0.00400
VaR Stable	-0.00876	-0.00530	-0.00400
VaR Normal	-0.00784	-0.00557	-0.00436

Livre Sterling	1%	5%	10%
VaR Empirique	-0.01287	-0.00788	-0.00613
VaR Stable	-0.01392	-0.00770	-0.00573
VaR Normal	-0.01158	-0.00822	-0.00642

Yen Japonais	1%	5%	10%
VaR Empiriquel	-0.01883	-0.01221	-0.00926
VaR Stable	-0.02133	-0.01192	-0.00885
VaR Normal	-0.02033	-0.01433	-0.01113

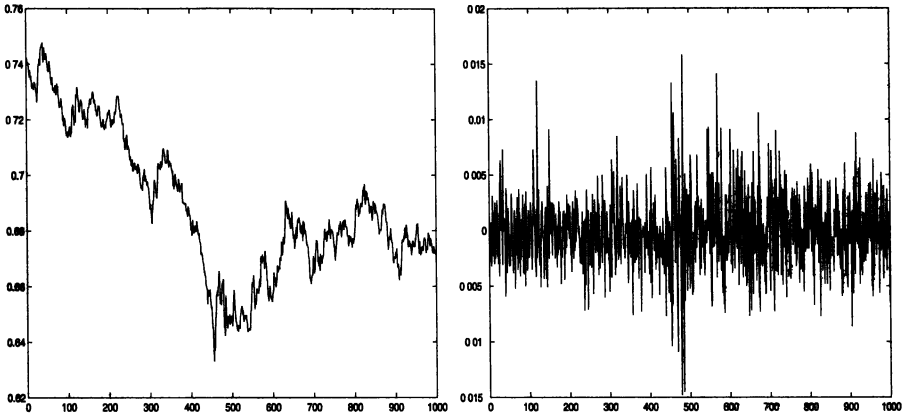

FIG 1. — Taux de change du CAD contre le USD (à gauche) et ses rendements (à droite), en abscisse le temps en jours.

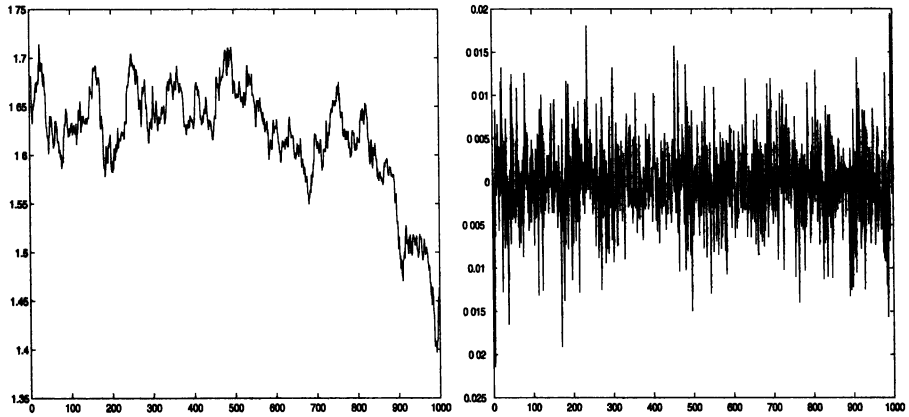

FIG 2. — Taux de change de la GBP contre le USD (à gauche) et ses rendements (à droite), en abscisse, le temps en jours.

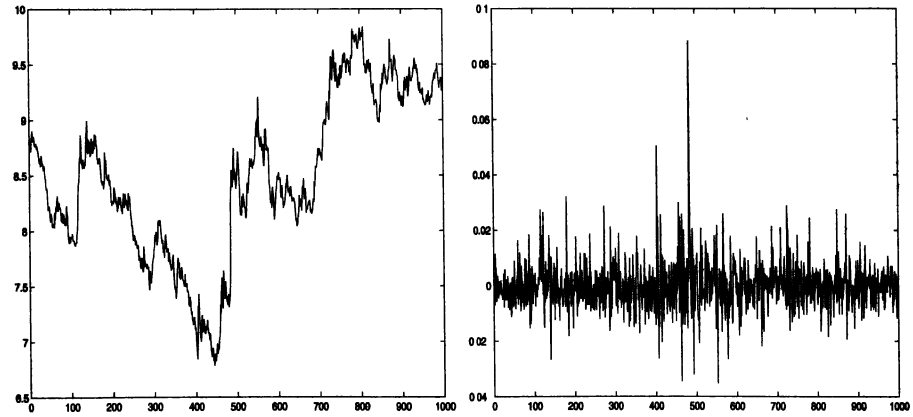

FIG 3. — Taux de change du yen contre le USD (à gauche) et ses rendements (à droite), en abscisse le temps en jours.

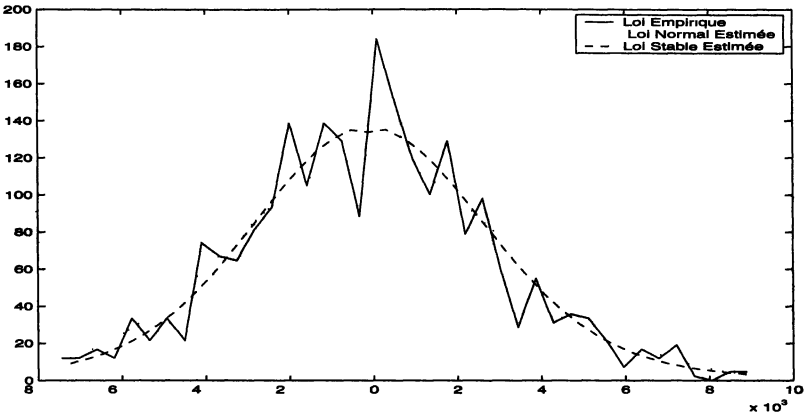

FIG 4. — Comparaison des ajustements stable (McCulloch) et normal pour le Dollar Canadien

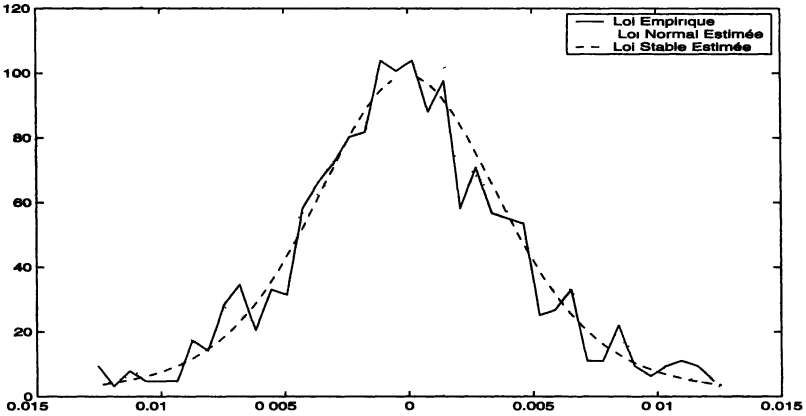

FIG 5. — Comparaison des ajustements stable (McCulloch) et normal pour la Livre Sterling

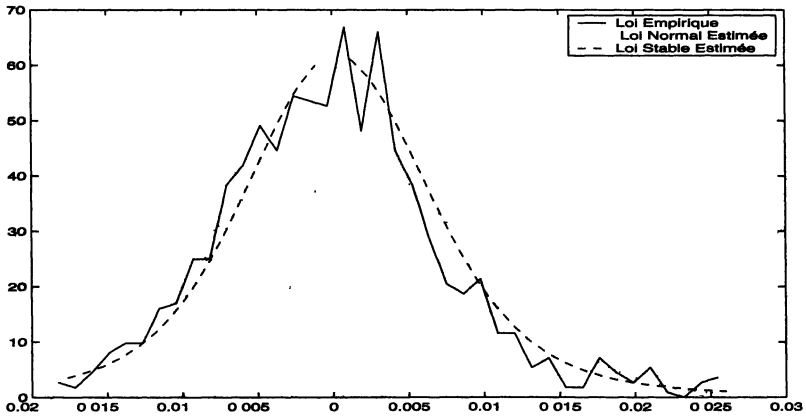

FIG 6. — Comparaison des ajustements stable (McCulloch) et normal pour le Yen

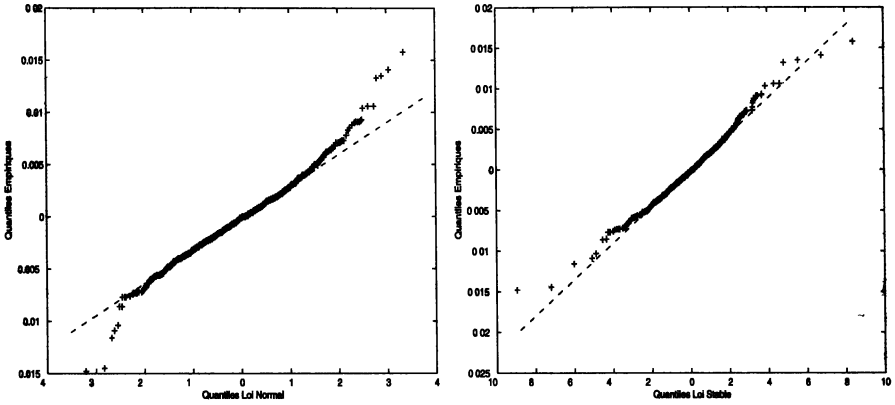

FIG 7. — Droites de Henry Normal (à gauche) et Stable (à droite) pour les rendements du Dollar Canadien

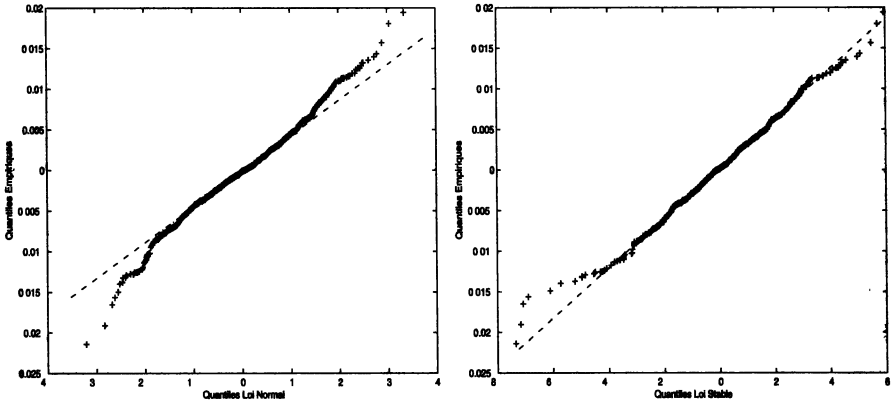

FIG 8. — Droites de Henry Normal (à gauche) et Stable (à droite) pour les rendements de la Livre Sterling

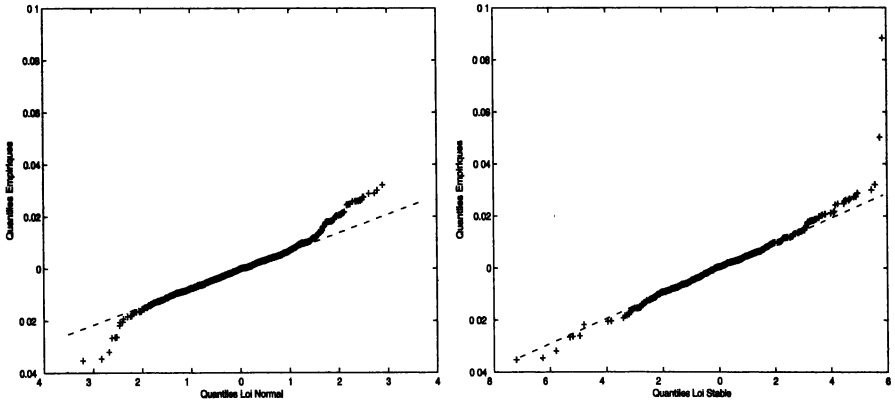

FIG 9. — Droites de Henry Normal (à gauche) et Stable (à droite) pour les rendements du Yen

Dans ces différents cas, on peut voir que, aux niveaux 5% et 10%, la VaR estimée avec la loi stable est plus proche de la VaR empirique que celle estimée avec la loi normale. Comme cela est attendu à cause du phénomène de queue lourde, la loi normale surestime les quantiles. Au 1%, la VaR de la loi normale est meilleure que la VaR de la loi stable, mais la différence n'est pas très grande.

4.3.2. Indices

Les indices sont des indicateurs des marchés financiers. Dans notre travail on analyse deux indices, les plus connus, le NASDAQ et le DOW JONES.

Les estimations par la méthode de McCulloch sont :

Index	α	β	σ	μ
NASDAQ	1.4443	-0.2300	0.0047	0.0000
DOW JONES	1.5808	0.1100	0.0041	0.0002

Comme pour les taux de change, en observant les graphiques 12 et 13, il est évident que l'ajustement stable est meilleur que l'ajustement normal. Ainsi, les droites de Henry correspondantes (graphiques 14 et 15) nous montrent les insuffisances en terme de queue de distribution de la modélisation gaussienne, cependant que la modélisation stable explique assez bien tout le comportement de ces rendements.

Calcul de la VaR

Pour les indices aussi on fait la comparaison entre la VaR empirique et la VaR estimée à partir des lois stable et gaussienne. Les résultats sont dans les tableaux suivants :

NASDAQ	1%	5%	10%
VaR Empirique	-0.03292	-0.01613	-0.01032
VaR Stable	-0.04084	-0.01564	-0.00977
VaR Normal	-0.02494	-0.01748	-0.01350

DOW JONES	1%	5%	10%
VaR Empirique	-0.02022	-0.01139	-0.00820
VaR Stable	-0.02220	-0.01106	-0.00793
VaR Normal	-0.01818	-0.01279	-0.00991

Comme pour les taux de change, les quantiles aux niveaux 5% et 10% sont mieux estimés avec la loi stable qu'avec la loi normale. A 1% on ne voit pas d'avantage d'une méthode sur l'autre.

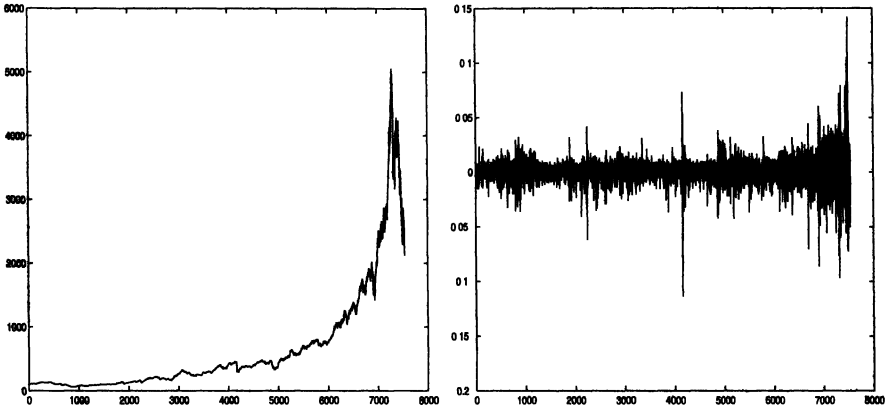

FIG 10. — Série du NASDAQ (à gauche) et ses rendements (à droite), en abscisse le temps en jours

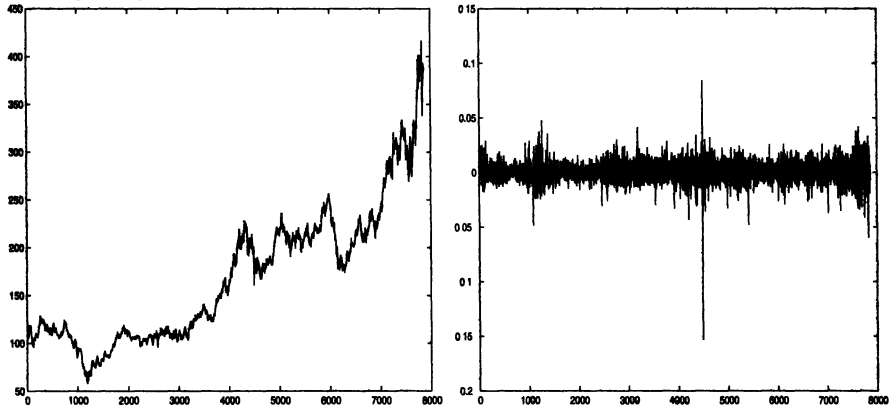

FIG 11. — Série du DOW JONES (à gauche) et ses rendements (à droite), en abscisse le temps en jours

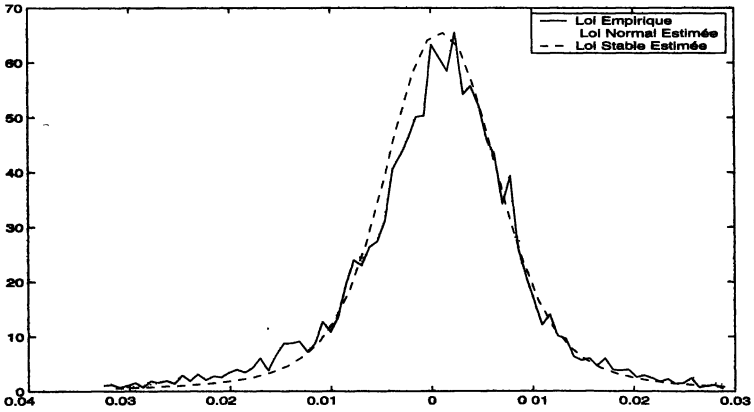

FIG 12. — Comparaison des ajustements stable (McCulloch) et normal pour le NASDAQ

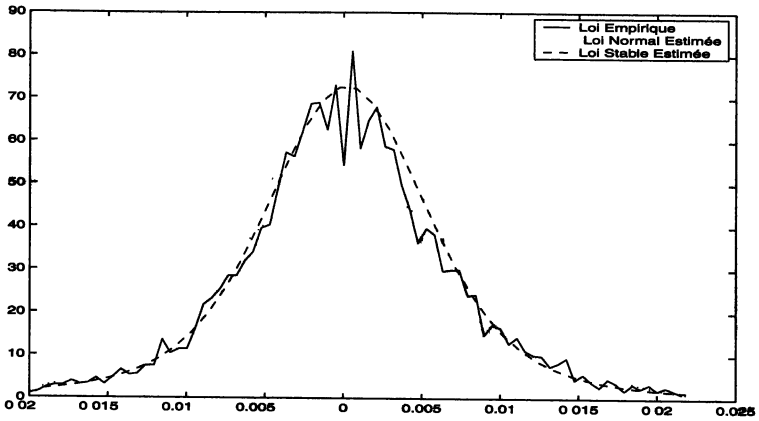

FIG 13. — Comparaison des ajustements stable (McCulloch) et normal pour le Dow Jones

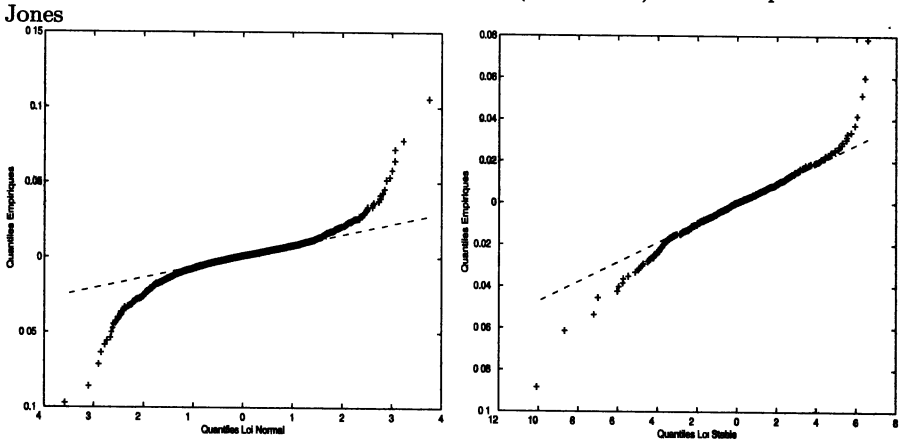

FIG 14. — Droites de Henry Normal (à gauche) et Stable (à droite) pour les rendements du Nasdaq

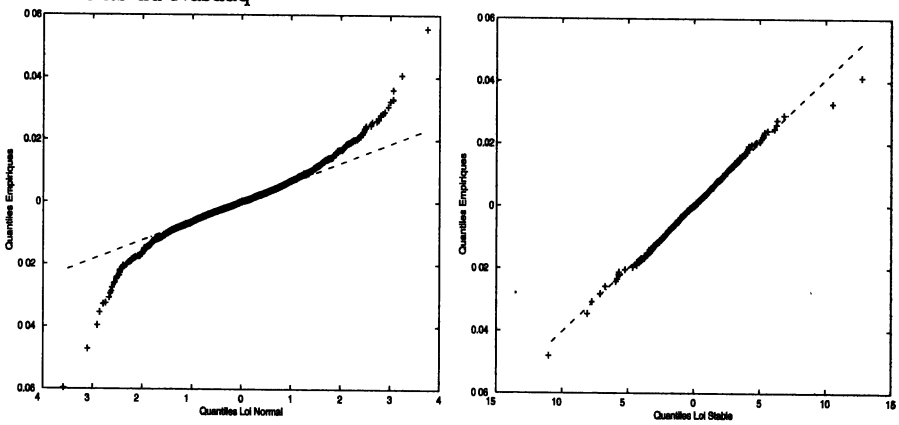

FIG 15. — Droites de Henry Normal (à gauche) et Stable (à droite) pour les rendements du Dow Jones

Les auteurs sont très reconnaissants à Monique Pontier pour l'aide apportée à la redaction du texte ainsi qu'aux rapporteurs anonymes pour leurs précieux commentaires.

Annexe

TABLEAU 4. — Étude de simulation pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$

Méthode		$N = 250$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 10000$
McCulloch	$\hat{\alpha}$	0.4802 (0.0490)	0.5075 (0.0313)	0.5059 (0.0218)	0.5082 (0.0084)
	$\hat{\beta}$	0.0764 (0.2364)	-0.0096 (0.1677)	-0.0056 (0.1421)	0.0348 (0.1152)
	$\hat{\sigma}$	0.8607 (0.2748)	0.9266 (0.2023)	0.9594 (0.1266)	0.9866 (0.0422)
	$\hat{\mu}$	-0.0050 (0.1818)	-0.0172 (0.1752)	0.0070 (0.1438)	-0.0438 (0.1227)
DFP	$\hat{\alpha}$	0.4956 (0.0388)	0.5143 (0.0337)	0.5061 (0.0221)	0.5048 (0.0093)
	$\hat{\beta}$	0.0559 (0.2025)	-0.0178 (0.1541)	-0.019 (0.1446)	0.0366 (0.1151)
	$\hat{\sigma}$	0.8903 (0.2543)	0.9310 (0.1959)	0.9646 (0.1222)	0.9872 (0.0409)
	$\hat{\mu}$	-0.0213 (0.1276)	-0.0090 (0.1394)	0.0002 (0.1337)	-0.0384 (0.1058)
Moments	$\hat{\alpha}$	0.4993 (0.1082)	0.4989 (0.0543)	0.4921 (0.0531)	0.5038 (0.0182)
	$\hat{\beta}$	2.4370 (10.308)	-2.4798 (9.3537)	0.6128 (10.117)	0.6706 (9.2544)
	$\hat{\sigma}$	1.0077 (0.1629)	0.9947 (0.0889)	0.9853 (0.0873)	1.0045 (0.0184)
	$\hat{\mu}$	-2.0189 (18.828)	4.5085 (15.122)	0.5091 (17.442)	-0.3397 (14.527)
Régression Itérative	$\hat{\alpha}$	0.4546 (0.0444)	0.4840 (0.0448)	0.4889 (0.0263)	0.5035 (0.0163)
	$\hat{\beta}$	0.0129 (0.1838)	0.0238 (0.1481)	0.0235 (0.0919)	0.0068 (0.0330)
	$\hat{\sigma}$	1.0644 (0.2077)	1.0004 (0.1388)	1.0084 (0.0975)	0.9965 (0.0364)
	$\hat{\mu}$	-0.2276 (0.7411)	-0.0057 (0.1089)	-0.0102 (0.0658)	-0.0057 (0.0223)
Recuit Simulé	$\hat{\alpha}$	0.5245 (0.0281)	0.5248 (0.0214)	0.5272 (0.0138)	0.5278 (0.0067)
	$\hat{\beta}$	-0.0156 (0.1129)	0.0206 (0.0639)	0.0100 (0.0491)	0.0050 (0.0139)
	$\hat{\sigma}$	0.9368 (0.1557)	0.9442 (0.0849)	0.9436 (0.0730)	0.9702 (0.0297)
	$\hat{\mu}$	0.0049 (0.1055)	-0.0194 (0.0547)	-0.0112 (0.0442)	-0.0022 (0.0145)

TABLEAU 5. — Étude de simulation pour $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$

Méthode		$N = 250$	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 10000$
McCulloch	$\hat{\alpha}$	1.0137 (0.1184)	1.0133 (0.0819)	1.0246 (0.0554)	1.0281 (0.0186)
	$\hat{\beta}$	-0.712 (0.1881)	-0.0616 (0.1308)	0.0052 (0.1070)	-0.0036 (0.0364)
	$\hat{\sigma}$	0.9828 (0.1096)	0.9938 (0.0807)	1.0022 (0.0526)	1.0031 (0.0219)
	$\hat{\mu}$	-1.0044 (3.4073)	-1.1719 (8.0932)	0.5206 (6.2753)	-0.1735 (1.0096)
DFP	$\hat{\alpha}$	0.9984 (0.1488)	1.0147 (0.0795)	1.0312 (0.0628)	1.0543 (0.0331)
	$\hat{\beta}$	0.0022 (0.3003)	-0.0549 (0.1340)	0.0098 (0.1186)	-0.0097 (0.0625)
	$\hat{\sigma}$	1.0658 (0.2027)	1.0026 (0.0905)	1.0058 (0.0540)	1.0235 (0.0760)
	$\hat{\mu}$	-0.9662 (3.3721)	-1.1733 (8.0931)	0.5206 (6.2751)	-0.1877 (1.0015)
Moments	$\hat{\alpha}$	1.0267 (0.1197)	0.9783 (0.0983)	0.9977 (0.0476)	0.9980 (0.0206)
	$\hat{\beta}$	-3.2610 (15.973)	-9.0255 (15.393)	1.6313 (19.054)	-7.4420 (14.999)
	$\hat{\sigma}$	1.0305 (0.0936)	0.9858 (0.0759)	0.9971 (0.0633)	0.9941 (0.0249)
	$\hat{\mu}$	290.47 (937.05)	-284.77 (1518.6)	-121.59 (1293.5)	167.11 (2591.5)
Régression Itérative	$\hat{\alpha}$	0.7207 (0.2674)	0.6973 (0.2267)	0.8156 (0.2129)	0.8374 (0.1441)
	$\hat{\beta}$	-0.0487 (0.1725)	0.0956 (0.5922)	-0.1496 (0.7770)	0.1255 (0.7434)
	$\hat{\sigma}$	1.1069 (0.1424)	1.1128 (0.1045)	1.0734 (0.0976)	1.07153 (0.0792)
	$\hat{\mu}$	4.8272 (41.644)	-23.645 (151.71)	20.132 (439.15)	292.00 (1473.9)
Recuit Simulé	$\hat{\alpha}$	1.0464 (0.0868)	0.9475 (0.2948)	1.0454 (0.0747)	1.0871 (0.0208)
	$\hat{\beta}$	-0.0222 (0.1592)	-0.0404 (0.1540)	-0.0130 (0.1289)	-0.0190 (0.0845)
	$\hat{\sigma}$	0.9929 (0.1382)	0.9800 (0.3070)	1.0669 (0.0807)	1.1578 (0.0575)
	$\hat{\mu}$	0.6779 (2.5955)	-1.9380 (6.7853)	0.2436 (2.7496)	0.1150 (1.6680)

Références

[1] BROTHERS K. M., DUMOUCHEL W. H. and PAULSON A. S. (1983). Fractiles of the stable laws. *Technical report*, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.

[2] CHAMBERS J.M., MALLOWS C.L. and STUCK B.W. (1976). A Method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 340-344.

[3] DUMOUCHEL W.H. (1971). Stable Distributions in Statistical Inference. *PhD. thesis*, Dept. of Statistics, Yale University.

[4] DUMOUCHEL W.H. (1973). On the Asymptotic Normality of the Maximum Likelihood Estimate when Sampling from a Stable Distribution. *Annals of Statistics*, **1**, 948-957.

[5] FAMA E. (1965). The behavior of stock prices. *J. of Business*, **38**, 34-105.

[6] FAMA E. and ROLL R. (1971). Parameters Estimates for Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **66**, 331-339.

[7] FEUERVERGER A. (1990). An efficient result for the empirical characteristic function in stationary time-series models. *The Canadian Journal of Statistics*, **18**, 155-161.

[8] FEUERVERGER A. and MCDONNOUGH P. (1981). On the efficiency of empirical characteristic function procedures. *J. Roy. Stat. Soc, Ser B*, **43**, 20-27.

[9] FEUERVERGER A. and MCDONNOUGH P. (1981). On efficient inference in symmetric stable laws and processes. In M. Csorgo, Dawson, D.A., Rao, N.J.K. and Saleh, A..K. (Editors) *Statistics and Related topics*, 109-122.

[10] GARCIA R., RENAULT E. and VEREDAS D. (2004). Estimation of Stable Distributions by Indirect Inference. CORE Mimeo.

[11] GOLDIE C.M. and SMITH R.L. (1987). Slow variation with remainder : Theory and applications, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford, Second Ser, **38**, 45-71.

[12] GREENWOOD J.A., LANDWEHR J. M., MATALAS N.C. and WALLIS J.R. (1979). Probability weighted moments : definition and relation to parameters of several distributions expressable in inverse form. *Water Resources Research*, **15**, 1049-1054.

[13] HILL B. (1975). A simple approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics*, **3**, 1163-1174.

[14] HOLT D. and CROW E. (1973). Tables and graphs of the stable probability functions, *J. Res. Nat. Bureau Standars, B. Math. Sci.*, **77b**, 143-198.

[15] HOSKING J.R.M. and WALLIS J.R. (1997). *Regional Frequency Analysis : an approach based on L-moments*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

[16] HOSKING J.R.M. (1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *J.R. Statist. Soc. B*, **52**, 105-124.

[17] KANTER M. (1975). Stable densities under change of scale and total variations inequalities. *Annals of Probability* **3**, 697-707.

[18] KNIGHT J.L., YU J. (2002). Empirical Characteristic Function in Time Series Estimation. *Econometric Theory*, **18**, 691-721.

[19] KOGON S.M. and WILLIAMS D.B. (1998). Characteristic function based estimation of stable parameters. In Adler, R., Feldman, R. and Taqqu, M. (eds.) *A Practical Guide to Heavy Tailed Data*, Birkhauser, Boston, MA, 311-335.

[20] KOUTROUVELIS I.A. (1980). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 918-928.

[21] KOUTROUVELIS I.A. (1981). An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws, *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, **10**, 17-28.

[22] LEITCH R.A. and PAULSON A.S. (1975). Estimation of stable law parameters : stock price behavior application. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 690-697.

[23] LÉVY P. (1924). Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Societé Mathématique de France*, **52**, 49-85.

[24] LÉVY-VÉHEL J. et WALTER C. (2002). Les marchés fractals, *PUF, Paris.*

[25] MANDELBROT B.B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, **26**, 394-419.

[26] MARINELLI C., RACHEV S.T., ROLL R. (2001). Subordinated exchange rate models : evidence for heavy tailed distributions and long-range dependence. Stable non-Gaussian models in finance and econometrics. *Math. Comp. Modelling*, **34**, no. 9-11, 955-1001.

[27] MASON D.M. (1982). Laws of large numbers for sums of extreme values. *The Annals of Probability*, **10**, 754-764.

[28] MCCULLOCH J.H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics. Simulation and Computation*, **15**, 1109-1136.

[29] MCCULLOCH J.H. (1997). Measuring tail thickness in order to estimate the stable index α : a critique. *Bussiness and Economic Statistics*, **15**, 74-81.

[30] MCCULLOCH J. H. and PANTON D.(1998). Tables of the maximally-skewed stable distributions. In R. Adler, R. Feldman, and M. Taqqu (Eds.), *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, 501-508.

[31] MITTNIK S., RACHEV S. (2001). Stable non-Gaussian models in finance and econometrics, *Math. Comp. Modelling* **34** no. 9-11.

[32] NOLAN J. (1996). An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parametrization. *Preprint* American University Washington.

[33] NOLAN J. (1996.) Numerical approximation of stable densities and distribution functions. *Preprint* American University Washington.

[34] PANTON D. (1992). Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. *Statist. Simula.* **21**, 458-492.

[35] PAULSON A. S. and DELEHANTY T. A. (1993). Tables of the fractiles of the stable law. *Technical Report*, Renesselaer Polytechnic Institute, Troy, NY.

[36] PAULSON A.S., HOLCOMB E.W. and lEITCH R. (1975). The estimation of the parameters of the stable laws. *Biometrika*, **62**, 163-170.

[37] PRESS S.J. (1972). Applied Multivariate Analysis. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

[38] PRESS S.J. (1972). Estimation in univariate and multivariate stable distributions.*J. Amer. Stat. Assoc.*, **67**, 842-846.

[39] ROYSTON P. (1992). Which measures of skewness and kurtosis are best? *Statistics in Medicine*, **11**, 333-343.

[40] SAMORODNITSKY G., TAQQU M.S. (1994). Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance *Chapman & Hall.*

[41] VOGEL R.M. and FENNESSEY N.M. (1993). L-moment diagrams should replace product-moment diagrams. *Water Resources Research*, **29**, 1745-1752.

[42] WERON R. (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics and Probability Letters*, **28**, 165-171.

[43] WERON R. (2001). Performance of the estimators of Stable Laws. *Working Paper.*

[44] WORSDALE G. (1975). Tables of cumulative distribution function for symmetric stable distributions. *Appl. Statistics*, **24**, 123-131.

[45] ZOLOTAREV V.M. (1966). On representation of stable laws by integrals. *Selected Translation in Mathematical Statistics and Probability*, **6**, 84-88.

[46] ZOLOTAREV V.M. (1986). One-dimensional stable distributions, *Trans. of Math. Monographs, AMS* Vol. 65.