

HERVÉ ALEXANDRE

**Le chaos en finance. Deux mesures de l'exposant de
Lyapunov comme signal de chaos à la bourse de Paris**

Journal de la société statistique de Paris, tome 135, n° 3 (1994),
p. 45-71

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1994__135_3_45_0

© Société de statistique de Paris, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE CHAOS EN FINANCE

Depuis le crack boursier de 1987, les spécialistes de finance se demandent si les variations boursières ne suivraient pas des processus « chaotiques » (empruntés à la physique). Le JSSP est heureux de publier deux articles à objectif « pédagogique » sur ce thème tout à fait nouveau et qui est, peut-être, voué à un grand avenir.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV COMME SIGNAL DE CHAOS À LA BOURSE DE PARIS

par Hervé ALEXANDRE*

L'hypothèse d'hétérogénéité des comportements (Black, 1986 et Kyle, 1985) sur les marchés financiers s'accompagne d'un renouvellement des outils de formalisation des cours boursiers. On assiste notamment à l'utilisation de plus en plus importante des modèles non linéaires stochastiques (processus ARCH) ou déterministes (chaos). Ils permettent la modélisation du comportement rationnel mais mal informés des bruiteurs (Alexandre, 1994). La non linéarité rend possible, en effet, la mise à jour de distorsions qu'introduisent leur manque d'information tout en conservant la propriété d'évolution imprévisible des cours liée à leur caractère rationnel ce que ne permet pas la modélisation linéaire. L'idée d'une formalisation théorique des marchés financiers à l'aide du chaos déterministe, décrite par Brock et Malliaris (1989), semble donc pertinente.

Plusieurs articles récents confortent empiriquement l'intérêt du développement de ce sujet en finance. LeBaron (1989), Peters (1991), Hsieh (1991) et Girerd-Potin et Taramasco (1994) testent l'hypothèse de chaos sur les marchés d'actions ainsi que Blank (1991), Decoster, Labys et Mitchell (1992) et Brorsen et Yang (1993) sur les marchés à terme. Les conclusions en faveur de la présence de non linéarités dans les processus de cours ou de rentabilité sont unanimes à l'issue du test BDS en particulier. En revanche, l'hypothèse de chaos déterministe sur les marchés financiers est plus souvent rejetée. L'absence du calcul du plus grand exposant de Lyapunov ou l'utilisation pour ce calcul d'un algorithme peu fiable rendent ce rejet du chaos peu concluant.

* Je tiens à remercier vivement les Professeurs G. Gallais-Hamonno, P. Fontaine, G. Charreaux et M.-C. Pichery pour leur aide et leurs très précieux commentaires. J'ai également bénéficié de remarques très constructives du Professeur H.K. Van Dijk (Tinbergen Institute) ainsi que d'un rapporteur anonyme du J.S.P.P. Cependant toutes les erreurs restantes me sont intégralement imputables.

Pour tenter de répondre à cela, nous proposons l'emploi d'une nouvelle méthode de calcul de cet exposant basée sur l'utilisation des réseaux de neurones. Cet algorithme décrit par Kaashoek et Van Dijk en 1991 est plus fiable que l'algorithme de Wolf dont nous présentons les résultats dans un but comparatif. Nous avons choisi cette alternative à l'algorithme de Wolf car le recours aux réseaux de neurones permet l'apprentissage du système étudié alors que l'algorithme de Wolf travaille directement sur les dérivées. Nous envisageons d'abord (section 1) le test BDS qui permet de détecter la présence de non linéarités dans une série temporelle. Nous pourrions alors présenter plus précisément ce qu'est le plus grand exposant de Lyapunov et ce qu'il mesure exactement (section 2) avant de décrire les deux algorithmes de calcul (Wolf, 1985 et Kaashoek et Van Dijk, 1991) dans une section 3. Enfin la section 4 donnera les résultats d'une étude empirique effectuée sur cinq actions du marché français des actions.

Section 1. Test BDS (Brock, Dechert et Scheinkman, 1987)

L'intérêt croissant des chercheurs pour la non linéarité a provoqué de nombreux travaux. Un des articles les plus importants semble être celui de Brock, Dechert et Scheinkman (1987) qui ont élaboré une statistique permettant de tester l'hypothèse nulle de processus indépendamment et identiquement distribué (iid) contre l'hypothèse alternative de processus non iid. Hsieh (1989, 1991) montre par simulation que le test BDS est robuste contre les hypothèses alternatives de non linéarité qu'elle soit déterministe ou stochastique, de non stationnarité et de dépendance linéaire. Le test, appliqué à une série temporelle x_t définie pour $t = 1$ à T , est fondé sur la corrélation intégrale qui représente la part de couples de points de la série qui sont éloignés au plus de r :

$$C(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t < s}^T H(r - |x_t - x_s|) \quad (1)$$

où H est la fonction de Heaviside qui vaut :

$$\begin{aligned} &1 \text{ quand } |x_t - x_s| < r \\ &0 \text{ quand } |x_t - x_s| > r \end{aligned}$$

Sur la base de cette série x_t d'observations, on forme des sous-échantillons de taille N (ou « N -historiques ») noté x_t^N . Ces N -historiques sont composés d'éléments de dimension N formés de la manière suivante :

$$x_t^N = (x_{t-N+1}, x_{t-N+2}, \dots, x_t).$$

La corrélation intégrale empirique pour une dimension de plongement égale à N est :

$$C_N(r, T) = \frac{2}{(T_N(T_N-1))} \sum_{t < s} H(r - |x_t^N - x_s^N|) \quad (2)$$

où $T_N = T - N + 1$.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

L'hypothèse nulle selon laquelle les x_t sont iid implique que¹ :

$$C_N(r) = C_1(r)^N.$$

Empiriquement il découle :

$$C_N(r, T) \rightarrow C_1(r)^N \text{ quand } T \rightarrow \infty.$$

La corrélation intégrale est une estimation de la probabilité que la distance entre deux points quelconques de l'échantillon soit inférieure à r . Sous l'hypothèse nulle, et quelle que soit la dimension de l'espace dans lequel sont plongés ces points leur caractère iid demeure. Ainsi cette probabilité est de même nature sauf qu'il faut tenir compte de la dimension N de l'espace dans lequel cette série est plongée. Ainsi, plus la dimension de l'espace augmente, plus la probabilité est faible. Lorsque l'échantillon est représenté en deux dimensions, cette probabilité est le carré de ce qu'elle est en une dimension (et le cube lorsque la série est représentée dans un espace à trois dimensions...).

Brock, Dechert et Scheinkman (1987) démontrent que sous l'hypothèse nulle H_0 :

$$\sqrt{T} (C_N(r, T) - C_1(r)^N) \sim N(0, \sigma_N^2(r)) \quad (3)$$

$$\text{avec : } \sigma_N^2(r) = 4 \left[K^N + 2 \sum_{j=1}^{N-1} K^{N-j} C^{2j} + (N-1)^2 C^{2N} - N^2 K C^{2N-2} \right] \quad (4)$$

La variance empirique estime la vraie variance en estimant $C(r)$ par $C(r, T)$ et $K(r)$ par $K(r, T)$

$$K(r, T) = \frac{6}{[T_N(T_N-1)(T_N-2)]} \sum_{t < s < r} H(1 - |x_t^N - x_s^N|) H(1 - |x_s^N - x_r^N|) \quad (5)$$

On peut alors calculer la statistique BDS qui, sous l'hypothèse nulle, est :

$$w_N(r, T) = \sqrt{T} (C_N(r, T) - C_1(r)^N) / \sigma_N(r, T) \xrightarrow{\text{loi}} N(0,1) \quad (6)$$

Cette propriété de normalité asymptotique de la statistique a été confirmée par Hsieh (1991) pour des échantillons de taille finie, à l'aide de simulations de Monte-Carlo.

La valeur du test BDS dépend énormément des paramètres N et r . Lors d'études empiriques, il est nécessaire d'effectuer plusieurs calculs pour des valeurs différentes de ces deux paramètres. Afin d'obtenir une normalisation des différentes études utilisant le test BDS, r est défini en fonction de l'écart type de la série sur laquelle porte le test. Ainsi, dans la plupart des études r prend plusieurs valeurs qui vont de $0,5\sigma$ à $1,5\sigma$. La valeur maximale possible de N (dimension de plongement) dépend énormément de la taille de l'échantillon. Il n'existe pas de règle précise, mais, en général, N ne dépasse pas 10 dans les études empiriques pour des grands échantillons. Enfin, Hsieh et LeBaron (1988) montrent par simulation que la loi normale est une bonne approximation de la distribution de la statistique lorsque la taille de l'échan-

1. La réciproque n'est pas toujours vraie (Dechert, 1988).

tillon est supérieure à 500. Cependant sur des échantillons de taille réduite, il est conseillé de limiter N à 4 ou 5. Le test BDS est robuste, entre autres, contre l'hypothèse alternative de non linéarité qui nous intéresse particulièrement ici ; il est donc nécessaire d'effectuer ensuite d'autres tests qui vont permettre de déterminer quel type de non linéarité cause le rejet de l'hypothèse nulle par le test BDS.

Signalons également que la statistique BDS est très sensible à la linéarité. Il serait dommage de ne l'utiliser que pour déceler des dépendances linéaires ; il existe pour cela d'autres outils. Brock (1986) préconise le filtrage de la série testée afin d'enlever préalablement tout effet linéaire. Il explique que les propriétés (chaotiques déterministes) d'une série ont les mêmes sur les données originales et sur les résultats du filtrage linéaire qui est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qui à une série $\{x_t\}$ associe la série filtrée $\{e_t\}$. Dans cette étude nous travaillons sur des séries non corrélées et nous nous intéressons à l'hypothèse de chaos déterministe.

Section 2. Le plus grand exposant de Lyapunov

Les travaux sur la stabilité ou l'instabilité d'un système dynamique ont entraîné la création d'outils capables de rendre compte du comportement de la trajectoire d'un système dynamique. Poincaré (1890), le premier, analyse la stabilité d'un système, non au voisinage d'un point pour des conditions particulières, mais pour un ensemble de trajectoires. En effet, jusqu'alors il n'était étudié que la stabilité d'un système pour une solution particulière. Il était possible de définir pour un même système, différentes stabilités mais en un nombre fini de solutions (excepté bien entendu pour les systèmes linéaires simples). L'analyse des systèmes déterministes non linéaires telle qu'elle a été initiée par Poincaré va alors s'effectuer en termes d'attracteur. Un attracteur est un ensemble compact de volume nul dans l'espace des phases¹ mais possédant un « bassin » d'attraction de volume fini vers lequel va tendre le processus². Précisons que l'attracteur doit être de volume nul car si les trajectoires du système possèdent un attracteur (limite asymptotique des solutions, quelles que soient les conditions initiales) c'est qu'il y a perte d'information (d'où une contraction de l'aire d'information dans l'espace des phases) dans au moins une dimension. La dimension de l'attracteur ne peut donc pas être la même que celle de l'espace dans lequel il se situe.

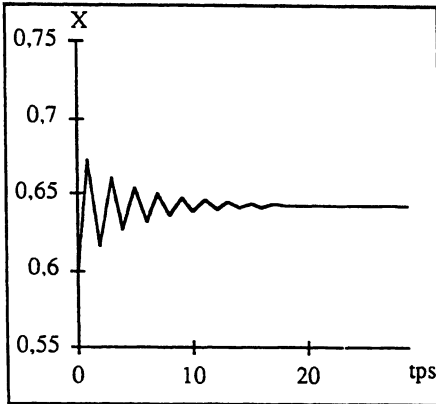
Dans les graphiques 1a et 1b, nous avons représenté une série quelconque possédant un point fixe comme attracteur. Le graphique 1a nous renseigne sur l'évolution dans le temps d'une des variables composant le système. Le graphique 1b nous montre l'évolution de la série dans un espace des phases de dimension 2 dont « Axe 1 » et « Axe 2 » sont les coordonnées. Dans l'espace des phases, il est possible de voir que l'attracteur de la série est bien un point fixe symbolisé ici par un point au centre du repère.

1. C'est l'espace où sont représentées les trajectoires du processus avec comme axe les variables suffisantes à décrire le système de façon exhaustive (par exemple position-vitesse dans le cas d'un pendule).

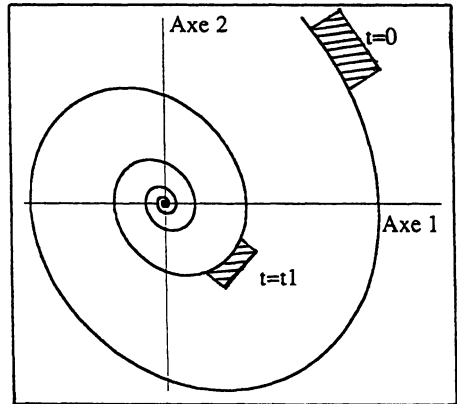
2. Une description plus précise et complète se trouve dans l'ouvrage de Bergé, Pomeau et Vidal (1988).

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Graphique 1a
Évolution dans le temps



Graphique 1b
Représentation dans l'espace des phases

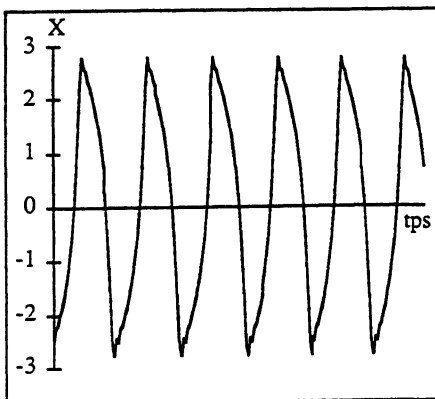


De la même manière, nous avons représenté un système à deux dimensions dans les graphiques 2a et 2b. Nous avons choisi le système de Van der Pol de la forme suivante :

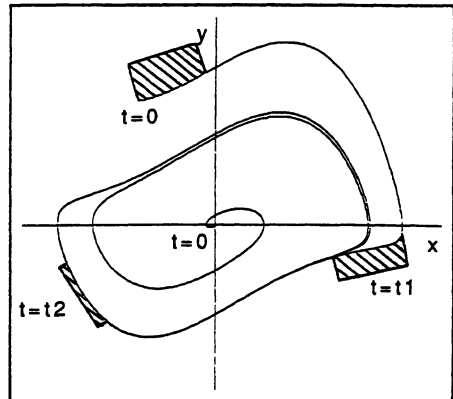
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2)y - x\end{aligned}\quad (7)$$

Le graphique 2a représente l'évolution de la variable x dans le temps alors que le graphique 2b représente l'évolution du système dans un espace des phases de dimension 2 dont les axes sont x et y ; La périodicité de l'évolution de x dans le temps traduit l'existence d'un attracteur « cycle limite ». On voit dans le graphique 2b que d'où partent les trajectoires (deux conditions initiales $t = 0$ possibles) elles finissent par être attirées par le cycle limite qui est bien l'attracteur du système.

Graphique 2a
Évolution dans le temps



Graphique 2b
Représentation dans l'espace des phases



DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Dans les deux représentations de trajectoire dans l'espace des phases (graphique 1b et 2b) nous avons symbolisé l'information par un rectangle hachuré. Dans les deux cas le rectangle en $t = 0$ correspond à l'information liée aux conditions initiales. L'effet de l'attracteur va dans le cas d'un point fixe, réduire la dimension de l'information dans les deux sens (longueur et largeur). L'information initiale est ainsi détruite lorsque la trajectoire atteint l'attracteur. En revanche, le graphique 2b montre un rétrécissement de l'ensemble d'information dans un seul sens et une conservation dans l'autre sens (passage de $t = 0$ à $t = t_1$ puis $t = t_2$). Une seule dimension de l'information est détruite dans le cas où la trajectoire est attirée par un cycle limite.

Les exposants de Lyapunov d'un système (il y a autant d'exposants que le système a de dimensions) sont une mesure de ce gain ou de cette perte d'information. Ces exposants mesurent l'entropie d'information de Kolmogorov. Plus précisément, ils mesurent le taux moyen de séparation de deux trajectoires initialement proches. Dans des systèmes instables, ces deux trajectoires divergent exponentiellement. L'exposant de cette exponentielle dépend directement de l'entropie du système. Exprimé autrement cela signifie qu'une différence entre deux trajectoires va croître au fil du temps comme e^{λ} . Cette valeur λ n'est rien d'autre que l'exposant de Lyapunov. Il y en aura autant que de dimensions du système ; chacun mesure la force de contraction ou d'étirement qui est exercée par une dimension sur le système. Le signe du plus grand exposant de Lyapunov donne une indication sur l'attracteur du système. Par exemple, dans le cas d'un point fixe comme attracteur d'un système évoluant dans un espace de phases à N dimensions, les N exposants de Lyapunov seront tous négatifs. Dans le cas du graphique 1b il y aura rétrécissement de la surface d'information dans les deux sens. Cela reflète le resserrement que subissent deux trajectoires voisines dans le bassin d'attraction pour les N dimensions. Pour un cycle limite (graphique 2b), le plus grand exposant de Lyapunov est nul car un décalage le long de la trajectoire n'est ni amplifié ni réduit au cours du temps (l'information n'est détruite que dans un sens).

Les attracteurs présentés ici ont des propriétés topologiques simples et connues. Depuis les travaux de Ruelle et Takens (1971) et de Mandelbrot (1975), il est envisagé d'autres attracteurs aux propriétés plus complexes. Ils sont dénommés *attracteurs étranges* par Ruelle et Takens et possèdent, entre autres propriétés, une dimension non entière et la Sensibilité aux Conditions Initiales (SCI) qui amène deux trajectoires proches à l'origine à diverger de manière exponentielle ; de plus, rappelons que l'existence d'un attracteur, aussi étrange soit-il, entraîne le resserrement de deux trajectoires distinctes afin qu'elles demeurent dans l'espace borné occupé par l'attracteur. Ces dynamiques particulières – convergence et divergence simultanée de deux trajectoires distinctes – sont regroupées sous le nom de dynamiques hyperboliques. L'hyperbolicité, vérifiable par l'existence dans le système de la SCI, est liée au fait qu'à chaque instant t , le système crée de l'information supplémentaire. L'ensemble d'information initiale augmente dans au moins une dimension lorsque la trajectoire parcourt l'attracteur car le système crée de l'information à chaque étape. Le plus grand exposant de Lyapunov dans le cas d'un système chaotique est positif traduisant cette création d'information (entropie) dans au moins une dimension. Un

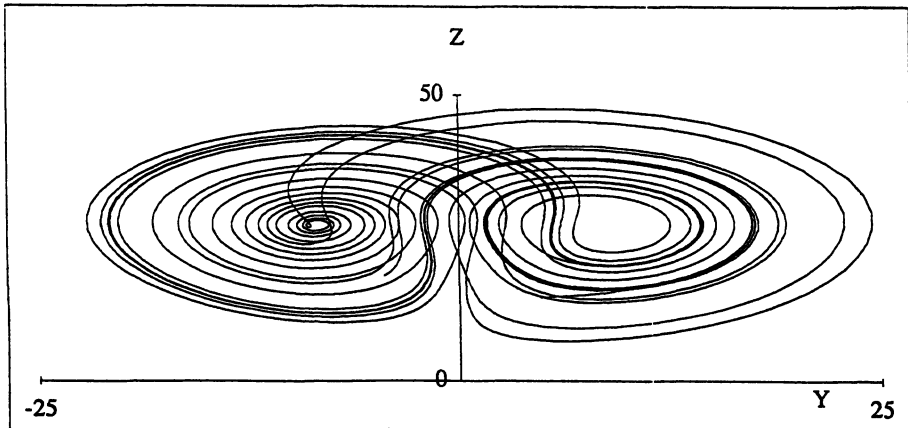
DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

des exemples les plus connus de système chaotique vérifiant cette hyperbolicité est le système de Lorenz (1963). Il a été découvert par hasard lors de simulations météorologiques et se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= -xy + bx - y \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}\quad (8)$$

L'attracteur correspondant à ce système possède une dimension comprise entre deux et trois (2,16 exactement). Le graphique 3 permet de deviner la structure très complexe de cet attracteur : il possède la forme d'un papillon, et le nombre de passage de la trajectoire sur une des ailes est infini.

Graphique 3
Attracteur de Lorenz (projection sur le plan (y, z))



De nombreux systèmes chaotiques sont caractérisés par un attracteur étrange qui entraîne une apparence aléatoire du système alors qu'il est généré par un système déterministe. Le calcul du plus grand exposant de Lyapunov d'un système est alors la seule manière de différencier un système aléatoire d'un système déterministe à entropie positive.

Le problème, maintenant va être d'introduire une méthode de calcul de cet exposant pour des trajectoires dont la forme structurale du système sous-jacent est inconnue. Pour cela, supposons $x_{t+1} = F(x_t)$ un système de dimension N . Posons x_0 comme condition initiale. Nous allons étudier le comportement de la trajectoire pour une condition initiale y_0 proche de x_0 . Afin d'exprimer l'évolution comparée des deux trajectoires, il suffit d'exprimer le développement de Taylor d'ordre 1 au voisinage de x_t :

$$F(y_t) = F(x_t) + D_x F(x_t) (y_t - x_t) + \text{reste} \quad (9)$$

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

où $D_x F(x_t)$ est la matrice carrée d'ordre N des dérivées premières à l'instant t .

L'approximation linéaire, nous permet d'écrire :

$$F(y_t) - F(x_t) = D_x F(x_t)(y_t - x_t) \quad (10)$$

En posant $y_t - x_t = u_t$ et donc $F(y_t) - F(x_t) = u_{t+1}$, l'équation (10) s'écrit :

$$u_{t+1} = D_x F(x_t) u_t \quad (11)$$

Dans le cas où la matrice des dérivées premières ne dépend pas du temps, les propriétés de stabilité du système vont se déduire des valeurs propres de cette matrice. Mais ici la matrice est fonction du temps, il faut donc travailler avec des valeurs moyennes afin de pouvoir tirer des conclusions. En effet, si cette matrice dépend du temps, ses valeurs propres ne sont pas constantes (fonction du temps) et les procédures classiques d'estimation des gradients ne sont plus opérationnelles (Bergé, Pomeau et Vidal, 1988 ; Chua et Parker, 1989). En normant l'équation (11), il vient :

$$\|u_{t+1}\| = \|D_x F(x_t) u_t\| \quad (12)$$

Il est possible, en modifiant l'écriture, de faire apparaître le taux local d'expansion. Il suffit pour cela de poser :

$$\|u_{t+1}\| = \frac{\|D_x F(x_t) u_t\|}{\|u_t\|} \|u_t\| = L(t) \|u_t\| \quad (13)$$

$L(t)$ est le taux local d'expansion ; il mesure le taux d'expansion le long de la trajectoire au temps t , dans la direction u_t . Cette grandeur permet d'obtenir une valeur caractérisant la déviation au temps t de deux trajectoires proches l'une de l'autre initialement. Il faut alors calculer le taux d'expansion moyen qui est l'exposant de Lyapunov :

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \frac{\|D_x F(x_{t-1}) u_{t-1}\|}{\|u_{t-1}\|} \quad (14)$$

avec $u_{t+1} = D_x F(x_t) u_t$ et $\|u_0\| = 1$.

Le problème est que généralement seule la série chronologique de la variable étudiée est disponible, F est inconnue. Il faut donc pouvoir calculer les dérivées premières d'une fonction sans en connaître la forme structurelle. Les premiers à tenter de résoudre ce dilemme sont Wolf, Swift, Swinney et Vastano en 1985¹. Nous allons donc maintenant présenter l'algorithme qu'ils ont mis en place pour calculer le plus grand exposant de Lyapunov et celui de Kaashoek et Van Dijk (1991) basé sur l'utilisation des réseaux de neurones.

1. Les références seront faites à partir de maintenant à l'algorithme de Wolf.

Section 3. Deux algorithmes de calcul du plus grand exposant de Lyapunov

Le calcul du plus grand exposant de Lyapunov va dépendre de la connaissance de la matrice jacobienne $D_x F(\cdot)$ d'une fonction non linéaire complexe dont on ignore la forme structurale. Le premier algorithme (Wolf, 1985) calcule directement les dérivées $D_x F(\cdot)$ de la fonction. Il est le plus couramment utilisé en partie parce qu'il est le premier explicité mais également parce que l'algorithme est intégralement décrit dans l'article de Wolf et al. Kaashoek et Van Dijk (1991) ont décrit un algorithme alternatif qui estime la fonction $F(\cdot)$ à l'aide des réseaux de neurones avant d'en déduire les dérivées.

1. Algorithme de Wolf

Supposons que nous disposions des valeurs d'une série temporelle $\{x_t\}_{t=1}^T$ pour T périodes et que cela soit notre seule information. Sur la base de cette série, nous construisons des sous-séries x_t^m de taille m , ceci afin de plonger la série dans un espace de dimension m dans lequel le caractère fractal de l'attracteur pourra être perçu lors du calcul de l'exposant¹. De cette manière, l'exposant de Lyapunov peut se calculer pour différentes dimensions de l'espace des phases dans lequel la série est supposée a priori évoluer. Pour résoudre le problème de la dimension d'évolution de la série étudiée, Takens (1981) fournit un outil de reconstruction de la série. Posons :

$$x_t^M = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) \quad (15)$$

où M est la dimension de plongement.

L'application Ψ^M , définie de $\mathbb{R}^M$ dans $\mathbb{R}^M$, représente l'évolution du système :

$$\Psi^M(x_t^M) = x_{t+1}^M \quad (16)$$

Takens montre que pour $M \geq 2N + 1$ (N est la dimension du système déterministe dont x_t est une représentation univariée), les propriétés de la fonction Ψ^M sont identiques à celle de F qui est inconnue. Ainsi en reconstruisant la série dans différentes dimensions de plongement M , il est possible de connaître les propriétés de F . Par exemple, si F est chaotique alors Ψ^M traduit ce caractère chaotique et possède un exposant de Lyapunov positif.

L'algorithme de Wolf utilise une procédure itérative basée sur la comparaison entre le comportement de la série et celui d'une série possédant une condition initiale très proche. l'algorithme fonctionne comme suit.

1. Wolf et al. (1985, page 297) conseillent de choisir la dimension de plongement comme étant supérieure à 1 plus deux fois la dimension calculée de l'attracteur. Ceci afin d'éviter que le bruit statistique présent dans la série ne biaise le calcul (si m est trop grand) et qu'un problème important dans le choix du point de remplacement n'empêche le calcul (m trop petit).

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

1^{re} itération

Il faut calculer $d_1^{(1)} = \|x_1^m - x_1^m\|$ qui est la différence entre la première valeur du sous-échantillon et la valeur la plus proche. Il faut ensuite sélectionner un entier q et calculer $d_2^{(1)} = \|x_{t_1+q}^m - x_{t_1+q}^m\|$. Le paramètre q est choisi arbitrairement sachant que s'il est trop petit ou trop grand nous perdons la reconnaissance de l'attracteur dans l'espace des phases (Wolf et al., 1985, pages 298-299). Posons $g_1(q) = d_2^{(1)}/d_1^{(1)}$ qui va rendre compte de la manière dont deux trajectoires proches sur l'attracteur vont diverger.

2^e itération

Un nouveau sous-échantillon $x_{t_2}^m$ est choisi proche de $x_{t_1+q}^m$ et tel que l'angle $\theta(x_{t_2}^m - x_{t_1+q}^m, x_{t_1+q}^m - x_{t_1+q}^m)$ soit proche de zéro. Brock (1986) conseille de choisir t_2 tel qu'il minimise :

$$\|x_{t_2}^m - x_{t_1+q}^m\| + |\theta(x_{t_2}^m - x_{t_1+q}^m, x_{t_1+q}^m - x_{t_1+q}^m)| \pmod{\pi} \quad (17)$$

Il vient alors

$$d_1^{(2)} = \|x_{t_2}^m - x_{t_1+q}^m\| \quad d_2^{(2)} = \|x_{t_2+q}^m - x_{t_1+2q}^m\| \quad (18)$$

et $g_2(q) = d_2^{(2)}/d_1^{(2)}$ pour le taux de divergence des deux trajectoires :

k^e itération

De la même manière, le calcul se poursuit :

$$d_1^{(k)} = \|x_{t_k}^m - x_{t_1+(k-1)q}^m\| \quad d_2^{(k)} = \|x_{t_k+q}^m - x_{t_1+kq}^m\| \quad g_k(q) = d_2^{(k)}/d_1^{(k)} \quad (19)$$

Cette opération doit être itérée jusqu'à ce que $k = K = \max \{k / 1 + kq < Tm\}$ permettant alors le calcul du plus grand exposant de Lyapunov $\hat{\lambda}_q$

$$\hat{\lambda}_q = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\ln(g_k(q))}{q} \quad (20)$$

Une forme parfaite de l'algorithme de Wolf converge vers le plus grand exposant de Lyapunov. Le terme de « parfait » est employé car cet algorithme dépend énormément de q et du choix du nouveau sous-échantillon à chaque itération. Brock (1986) montre qu'une « version idéale de l'algorithme de Wolf » converge vers le plus grand exposant de Lyapunov lorsque celui-ci est positif. Mais comment s'assurer que nous utilisons cette version idéale ?

Pour cette raison, d'autres choix sont préférables pour l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov et en particulier l'utilisation des réseaux neuronaux qui nécessite la fixation arbitraire de moins de paramètres et semble plus robuste dans la détection du chaos.

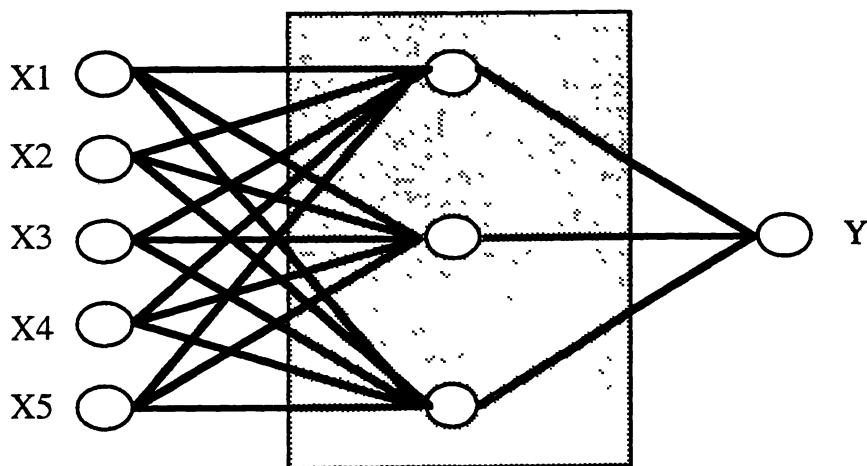
2. Algorithme de Kaashoek et Van Dijk

Un des problèmes majeurs inhérent à l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov est que la fonction $F(\cdot)$ est inconnue. Kaashoek et Van Dijk (1991) proposent l'utilisation des réseaux neuronaux qui permettent un apprentissage de la fonction $F(\cdot)$ sans avoir à spécifier a priori sa forme structurelle pour pouvoir ensuite déduire la matrice des dérivées premières qui nous intéresse pour calculer l'exposant de Lyapunov. Il fonctionne différemment de l'algorithme de Wolf qui travaille directement sur les dérivées de la fonction sans chercher à appréhender la fonction elle-même.

La méthode des réseaux de neurones consiste plus en un apprentissage qu'en une programmation. L'ordinateur va apprendre par associations d'inputs (entrées) et d'outputs (sorties). Le programme ne contraint pas l'ordinateur par une forme spécifique de la relation, mais lui laisse apprendre par la méthode dite de rétro-propagation du gradient. Le graphique suivant est un exemple d'architecture de réseaux de neurones comportant cinq entrées ($X_1, \dots, X_5$), une sortie (Y) et une boîte noire constituée de l'ensemble des neurones (ou cellules) faisant le lien entre les entrées et les sorties par les « connexions » (il y en a ici $5 \cdot 3 + 3 = 18$).

Graphique 4. Configuration d'un réseau de neurones.

Le réseau présenté ici comporte
5 inputs, 3 cellules cachées et un seul output.



Signalons que le réseau présenté ici est un réseau (5,3,1). Il est possible de construire une infinité de réseaux à partir d'un même échantillon en faisant varier le nombre d'entrées, de sorties et même la structure de la boîte noire (plusieurs colonnes de cellules et différents nombres de cellules par colonne). La méthode de la rétro-propagation par association fonctionne comme suit.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

L'ordinateur prend les entrées et les transmet aux cellules de la boîte noire à l'aide des quinze premières connexions et en les transformant à l'aide d'une fonction $g(\cdot)$ appelée fonction d'activation. Chaque cellule h de la boîte noire reçoit donc un signal d'une valeur de :

$$g \left(\sum_{i=1}^5 \{a_{hi} X_i + b_h\} \right) \quad (21)$$

où a_{hi} est le poids accordé à la connexion reliant l'entrée i à la cellule h de la boîte noire et b_h est le signal transmis par une cellule d'entrée pour laquelle le programmeur n'intervient pas.

Ce signal est alors transmis des cellules de la boîte noire à la cellule de sortie (que nous supposons unique ici) qui reçoit donc :

$$z_t = \text{output} = \sum_{h=1}^3 \left[c_h g \left(\sum_{i=1}^5 \{a_{hi} X_i + b_h\} \right) \right] \quad (22)$$

où c_h est le poids de la connexion reliant la cellule h de la boîte noire à l'output.

La sortie ainsi calculée est une estimation de la sortie réelle. Pour chaque élément t de l'échantillon, il est possible de déterminer une erreur d'estimation (signal d'apprentissage) :

$$e_t = z_t - y_t \quad (23)$$

où y_t est la vraie valeur de l'output issue de l'échantillon. La rétro-propagation est une procédure qui minimise la somme des carrés des erreurs par rapport aux connexions. La procédure consiste à remplacer itérativement les coefficients a_{hi} et c_h jusqu'à atteindre une valeur minimale de la somme des carrés des erreurs.

Il n'est donc pas besoin de définir une forme structurelle de la fonction $F(\cdot)$. Seule la fonction de transfert $g(\cdot)$, qui envoie les valeurs des inputs aux cellules cachées, est définie et permet d'introduire la non linéarité dans la relation entre les entrées et les sorties.

Dans le cas qui nous concerne, nous ne possédons comme information que la série univariée $\{x_t\}$ comme représentation temporelle d'un phénomène dont la forme de la fonction $F(\cdot)$ sous-jacente est ignorée. Le calcul de l'exposant de Lyapunov de cette fonction passe par la connaissance des dérivées premières. L'algorithme de Wolf travaille directement sur une estimation des dérivées de la fonction inconnue tandis qu'avec la méthode de Kaashoek et Van Dijk (1991) à l'aide des réseaux de neurones, on cherche d'abord à approcher la fonction $F(\cdot)$ afin de déduire ensuite les dérivées. Ainsi, ils n'obligent pas à spécifier la forme structurelle de $F(\cdot)$ a priori. C'est un avantage très important car dans le domaine de la non linéarité, il est très difficile, quasiment impossible même, de déterminer cette forme. Les réseaux de neurones dépassent cette difficulté et permettent un nouveau mode de détermination de l'exposant de Lyapunov.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Reprenons la méthode de reconstruction d'une série de Takens :

$$\begin{aligned} (x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+M}) &= x_{t+1_M} = \Psi^M(x_t^M) \\ &= \Psi^M(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) \end{aligned}$$

On peut écrire ce dernier terme sous une autre forme en posant :

$$\Psi^M(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+M-1}) = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_M) \quad (24)$$

Avec Ψ_m définie de $\mathbb{R}^M$ dans $\mathbb{R}$ qui est la m -ième coordonnée de Ψ^M .

On peut alors écrire

$$\Psi_m(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+m}, \dots, x_{t+M-1}) = x_{t+m} \quad m = 1, \dots, M-1 \quad (25)$$

La seule inconnue ici est la M -ième coordonnée Ψ_M . Avec M entrées qui sont $x_t, \dots, x_{t+M-1}$ et en prenant x_{t+M} comme sortie, les réseaux vont déterminer une relation de la forme :

$$\widehat{\psi_M}(x_t) = \widehat{x}_{t+M} = \sum_{h=1}^H \left[\widehat{c}_h g \left(\sum_{m=1}^M \{ \widehat{a}_{hm} x_{t+m-1} + \widehat{b}_h \} \right) \right] \quad (26)$$

Le calcul de l'exposant de Lyapunov implique la connaissance de la matrice jacobienne de la fonction $F(\cdot)$. Cette matrice s'écrit :

$$D_x \Psi^M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \dots & \dots & \alpha_{MM-1} & \alpha_{MM} \end{pmatrix} \quad (27)$$

où α_{Mk} est estimé par :

$$\widehat{\alpha_{Mk}} = \frac{\partial \widehat{\psi_M}}{\partial x_{t+k-1}}(x_t) \quad k = 1, \dots, M \quad (28)$$

Le cas le plus utilisé est celui où $g(\cdot)$ est la fonction sigmoïdale dont la forme générale est :

$$g(x) = \frac{e^{\kappa x}}{e^{\kappa x} + 1} \quad (29)$$

Posons $\kappa = 1$, les dérivées partielles de ψ_M s'écrivent alors :

$$\widehat{\alpha_{Mk}} = \frac{\partial \widehat{\psi_M}}{\partial x_{t+k-1}}(x_t) = \sum_{h=1}^H \left[\widehat{c}_h \widehat{a}_{hk} \frac{\exp^{X'A_h}}{(\exp^{X'A_h} + 1)^2} \right] \quad k = 1, \dots, M \quad (30)$$

avec

$$X'A_h = \sum_{m=1}^M \{ \widehat{a}_{hm} x_{t+m-1} + \widehat{b}_h \} \quad (31)$$

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

La formule du plus grand exposant de Lyapunov s'obtient à l'aide des formules suivantes :

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left\| D_x \Psi^M(x_{t-1}) \frac{u_{t-1}}{\|u_{t-1}\|} \right\| \quad (32)$$

$$u_t = D_x \Psi^M(x_{t-1}^M) u_{t-1} \quad \text{avec} \quad \|u_0\| = 1 \quad (33)$$

Le calcul va alors s'effectuer de la manière suivante :

- (1) Estimation des c_h , a_{hm} et b_h à l'aide des réseaux de neurones ;
- (2) Démarrage en $t = 0$, SOMME = 0 ;
- (3) Calcul de la matrice jacobienne au temps t en estimant les

$$\hat{\alpha}_{Mk} = \frac{\delta \hat{\psi}_M}{\delta x_{t+k-1}}(x_t);$$

- (4) Calcul de $u_{t+1} = D_x \Psi^M(x_t^M) u_t$;

$$(5) \text{ SOMME} := \text{SOMME} + \text{Log} \frac{\|u_{t+1}\|}{\|u_t\|};$$

$$(6) u_{t+1} = \frac{u_t}{\|u_t\|};$$

- (7) Si $t = T$ alors $\lambda(T) = \text{SOMME}/T$

sinon $t = t + 1$ et boucler au niveau (3) ;

$\lambda(T)$ est une estimation du plus grand exposant de Lyapunov.

Kaashoek et Van Dijk simulent cet algorithme et celui de Wolf sur différentes séries aléatoires ou chaotiques d'une taille de 200. L'algorithme de Wolf se révèle incapable de discerner entre un bruit blanc et un processus chaotique (la fonction logistique en l'occurrence) pour des dimensions de plongement allant de un à dix. En revanche, l'emploi des réseaux neuronaux permet d'obtenir des exposants de Lyapunov positifs pour des séries chaotiques et négatifs pour des séries aléatoires. Dans ce dernier cas, le réseau ne peut apprendre la structure sous-jacente à la série. Pour des processus ayant une composante aléatoire et une composante chaotique, les réseaux permettent de signaler cette dernière et donc le caractère en partie chaotique du processus. L'intérêt de l'emploi des réseaux de neurones dans le calcul de l'exposant de Lyapunov est qu'il pallie les insuffisances de l'algorithme de Wolf pour des petits échantillons qui sont courants en science économique et encore maintenant quelquefois en finance.

Les fondements de mesure empirique du plus grand exposant de Lyapunov sont plus heuristiques que théoriques, du fait notamment du nombre important de paramètres arbitrairement fixés dans l'élaboration des algorithmes notamment en ce qui concerne l'algorithme de Wolf. Une autre différence importante entre les deux algorithmes est le premier cherche à mesurer l'exposant de Lyapunov directement à partir

des différences finies, alors que l'algorithme de Kaashoek et Van Dijk travaille d'abord à partir du processus de génération de la série et en déduit les différences finies qui permettent le calcul de l'exposant. Le second algorithme utilisant les réseaux de neurones semble plus stable même sur des échantillons de taille réduite et aura notre préférence pour l'établissement des conclusions concernant la présence ou l'absence du chaos déterministe pour les séries financières étudiées. En effet notre étude porte sur des séries dont la taille est supérieure à 3 500 observations ce qui garantit a fortiori une bonne convergence des résultats. De plus Girerd-Potin et Taramasco (1994) montrent que l'algorithme de Wolf ne distingue pas toujours un processus chaotique d'un processus GARCH ou même bruit blanc que les auteurs ont simulé.

Section 4. Étude empirique sur les rentabilités quotidiennes des actions françaises

Les données utilisées pour effectuer cette étude sont issues de la banque de données Affi-Sbf et correspondent aux rentabilités quotidiennes d'actions cotées à la Bourse de Paris de Janvier 1977 à juin 1991. Ces rentabilités sont calculées après réintégration des dividendes et prise en compte des corrections causées par les modifications de capital. Nous disposons donc de séries de taille supérieure à 3 500 observations. Nous effectuons nos calculs sur cinq séries seulement (Accor, Cmb, Lafarge-Coppée, Peugeot et Valéo) car elles sont les seules que nous ayons trouvées parmi un ensemble d'actions appartenant au CAC 40 ne présentant pas de corrélation linéaire (Alexandre, 1994) après l'application des tests de corrélation de premier ordre et du test de Lo et Mackinlay¹ (1988). Nous pouvons donc appliquer le test BDS sans craindre que le rejet éventuel de l'hypothèse nulle de processus iid ne soit causée par une dépendance linéaire dans le processus de rentabilités.

1. Test BDS

Le tableau suivant donne les résultats du test BDS appliqué sur chacune des séries pour des dimensions de plongement N allant de 2 à 8 et pour r valant $0,75\sigma$ et $1,5\sigma$. La valeur critique de cette statistique distribuée selon une loi normale standard est 1,96 à 5 %. Chaque colonne de ce tableau représente le résultat du test BDS lorsque la série est plongée dans une dimension N .

Les résultats sont clairement en faveur du rejet de l'hypothèse nulle de processus iid, excepté pour $N = 2$ et 3 certaines fois. Pour des valeurs de N supérieures, le rejet est plus marqué. Les valeurs calculées de la statistique sont même étonnamment élevées. Toutes les études antérieures utilisant le test BDS aboutissent, pour des valeurs croissantes de N , à des valeurs croissantes et très élevées de la statistique

1. Ce test est fondé sur la propriété selon laquelle la variance des différences premières d'une variable suivant une marche au hasard est une fonction linéaire de l'intervalle retenu pour calculer ces différences.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

BDS. Nous présentons les résultats pour des valeurs de N allant jusqu'à 8 mais il apparaît que le rejet de l'hypothèse nulle est très marqué dès les dimensions 4, 5, 6 et 7.

Tableau 1. Test BDS.
Test effectué pour des dimensions de plongement allant de 2 à 8.

r/σ \ N	2	3	4	5	6	7	8
Accor							
0,75	0,70	1,72	3,51	9,92	30,49	82,07	161,21
1	0,84	1,77	4,39	9,89	23,33	58,84	115,37
1,25	1,09	2,05	4,17	8,33	17,39	38,13	77,24
C.M.B. Packaging							
0,75	0,56	2,24	4,51	9,06	18,94	42,15	98,11
1	0,82	2,09	3,78	6,85	12,89	25,52	52,32
1,25	1,00	2,05	3,46	5,96	10,64	19,81	38,18
Lafarge-Coppée							
0,75	0,41	1,87	3,72	7,05	13,82	27,87	57,97
1	0,78	1,97	3,53	6,25	11,45	21,65	42,21
1,25	1,01	2,02	3,39	5,74	10,09	18,35	34,34
Peugeot							
0,75	0,25	1,54	2,98	5,43	10,16	19,56	38,21
1	0,69	1,79	3,14	5,45	9,78	18,12	34,48
1,25	0,95	1,91	3,17	5,33	9,29	16,73	30,94
Valéo							
0,75	0,45	1,95	3,84	7,27	14,37	29,44	62,97
1	0,79	2,00	3,58	6,40	11,89	22,87	45,72
1,25	0,99	2,01	3,38	5,77	10,22	18,73	35,53

Le test BDS appliqué aux rentabilités quotidiennes de chacune des cinq sociétés conduit à des conclusions identiques quant à la présence d'une dépendance de type non linéaire. Nous sommes alors en mesure de conclure au rejet de l'hypothèse de processus iid. Ainsi, les séries étudiées présentent des propriétés particulières qu'il

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

reste à définir. En effet, nous savons maintenant que les rentabilités ne sont pas iid. La possibilité selon laquelle le rejet de l'hypothèse nulle par le test BDS est le fait du chaos déterministe va être vérifiée maintenant à l'aide du calcul du plus grand exposant de Lyapunov de chacune des séries. Cependant, avant de calculer l'exposant de Lyapunov qui dépend de l'attracteur de la série, il est nécessaire de connaître la dimension de cet attracteur.

2. Dimension de l'attracteur

Le calcul de la dimension de l'attracteur part de la mesure de la corrélation intégrale de la série. Si la série possède un attracteur, certains points de la série sont au voisinage de certains autres mais pas à périodicité régulière. L'algorithme de Grassberger-Procaccia (1983) calcule cette dimension en utilisant la corrélation intégrale qui permet de mesurer la proximité des points dans l'espace des phases de dimension N

$$C_N(r, T) = \frac{2}{(T_N(T_N - 1))} \sum_{i < s} H(r - |x_i^N - x_s^N|)$$

où H est la fonction de Heaviside qui vaut : 1 si $|x_i^N - x_s^N| < r$
0 sinon

T est la taille de la série univariée initiale

N est la dimension de plongement.

Il faut alors déterminer cette mesure pour plusieurs valeurs de r , afin de ne pas biaiser le calcul par une valeur trop petite ou trop grande de r . La pente obtenue avec ces points sur un graphique ayant $\text{Log}(r)$ comme abscisse et $\text{Log}(C(r))$ comme ordonnée, nous permet d'obtenir la dimension fractale de l'attracteur, c'est-à-dire une idée de la manière dont l'attracteur remplit l'espace. Comme la dimension de cet espace des phases dans lequel est situé l'attracteur est inconnue a priori, il faut répéter cette opération pour plusieurs dimensions (taille des vecteurs x_i et x_s) qu'on appelle dimension de plongement. Dans le tableau suivant figurent les pentes obtenues pour chacune des séries pour des dimensions de plongement de la série (dimension supposée de l'espace des phases) allant de 1 à 7.

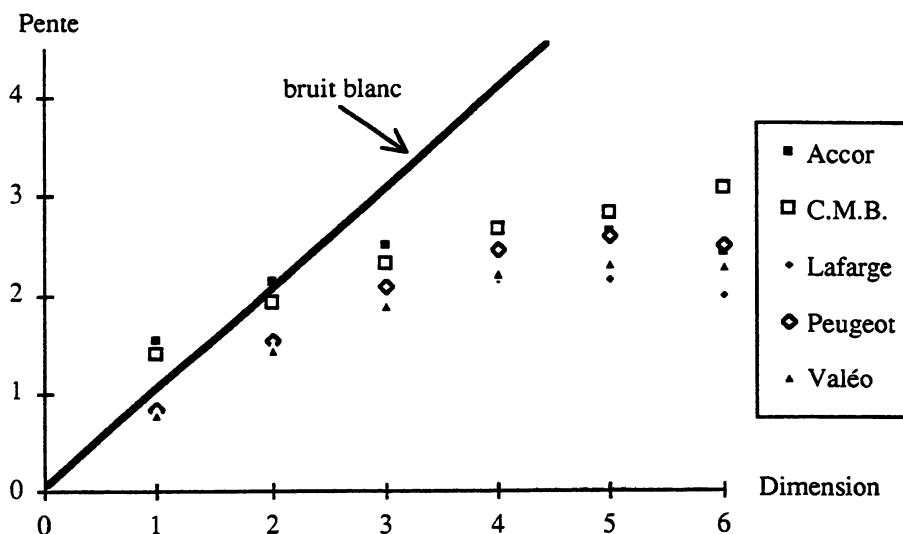
Tableau 2. Dimensions des attracteurs.
Calculées pour différentes dimensions de plongement.

	1	2	3	4	5	6
Accor	1,55	2,13	2,51	2,67	2,64	2,43
C.M.B.	1,41	1,93	2,33	2,67	2,83	3,08
Lafarge	0,80	1,45	1,92	2,15	2,16	2,00
Peugeot	0,82	1,53	2,09	2,46	2,60	2,51
Valéo	0,79	1,44	1,91	2,22	2,32	2,29

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Lorsque la dimension de l'espace croît mais que la pente calculée se stabilise, l'hypothèse d'une série aléatoire est rejetée. On peut alors conclure sur la valeur de la pente. Dans le graphique suivant, apparaissent les valeurs de ces pentes en fonction de la dimension de plongement. Nous avons représenté, outre les pentes calculées dans nos échantillons, l'évolution théorique des pentes dans le cas d'un bruit blanc. Dans ce dernier cas, la pente ne cesse de croître avec la dimension de plongement signalant l'inexistence d'un quelconque attracteur et donc le fait qu'il ne s'agit pas d'un système déterministe non linéaire, mais d'une série aléatoire.

Graphique 5. Dimensions de corrélation.



Dans le cas d'un bruit blanc, la pente croît à la même vitesse que la dimension. Un bruit blanc nécessite une infinité de degrés de liberté et donc un espace des phases de dimension infini rempli par l'attracteur. Pour les séries des rentabilités, les pentes se stabilisent rapidement pour des valeurs qui sont respectivement de 2,6 pour Accor, 3,1 pour Cmb, 2,1 pour Lafarge, 2,6 pour Peugeot et 2,3 pour Valéo.

Lorsque la dimension de plongement augmente, les pentes se stabilisent progressivement à une valeur qui est la dimension de l'attracteur. Ainsi, les séries semblent posséder un attracteur dont la dimension est non entière. Les seuls attracteurs dont la dimension est non entière sont les fractals, attracteurs de séries chaotiques déterministes selon Ruelle et Takens (1971). Cependant un premier écueil provient du fait qu'un attracteur fractal et chaos déterministe sont finalement deux notions indépendantes : Eckmann et Ruelle (1985) montrent, en effet, qu'un fractal peut être attracteur d'un système non chaotique (exemple l'attracteur de Feigenbaum) et qu'un système chaotique peut posséder un attracteur non fractal (exemple le chat de Arnold). La dimension ne nous fournit qu'un type d'information qui peut nous encourager à aller plus loin dans la recherche du chaos : en effet, les attracteurs de Lorenz et de Hénon

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

sont bien des attracteurs étranges car ils sont à la fois fractals et attracteurs d'un système chaotique. Nous avons tenté de reconstruire l'attracteur des séries de nombreuses façons. Mais nous n'avons jamais obtenu autre chose qu'un amas informe de points qui ne laisse aucunement penser à un attracteur étrange. Nous ne les faisons donc pas figurer dans ce travail pour le peu d'intérêt qu'ils présentent. Cette caractérisation des séries chaotiques est donc nettement insuffisante et nous devons recourir au calcul de l'exposant de Lyapunov de chacune des séries afin de pouvoir réellement conclure sur le caractère chaotique ou non des cinq séries de rentabilités quotidiennes.

3. Exposant de Lyapunov

Nous allons maintenant calculer les exposants de Lyapunov de nos séries en utilisant les deux méthodes différentes exposées précédemment qui sont l'algorithme de Wolf et la méthode des réseaux de neurones. Avant d'effectuer ces calculs nous devons reconstruire la série dans une dimension que Takens (1981) préconise comme devant être le premier entier supérieur à $2D + 1$, où D est la dimension fractale calculée précédemment. La reconstruction de la série consiste en la transformation des données univariées $\{x\}$ de taille T redispesées en une série $\{y\}$ de dimension N (premier entier supérieur à $2D + 1$).

Il est possible, à présent, d'appliquer à cette série reconstruite l'une des deux méthodes, afin de déterminer la valeur de l'exposant de Lyapunov. Nous présentons (Annexe 1a à 1e) la rapidité de convergence de l'exposant de Lyapunov à mesure que l'échantillon avance, pour chacune des deux méthodes.

3.1. Algorithme de Wolf

Dans le tableau suivant figurent les résultats obtenus par l'algorithme de Wolf. Ils sont donnés par actif avec la dimension de plongement qui a servi à la reconstruction de la série nécessaire à ce calcul.

Tableau 3. Exposants de Lyapunov
(algorithme de Wolf).

	$\hat{\lambda}_1$	$2D + 1$
Accor	0,050 5	7
C.M.B.	0,032 6	8
Lafarge	0,062 8	6
Peugeot	0,042 9	7
Valéo	0,064 8	6

Les exposants de Lyapunov calculés par l'algorithme de Wolf sont tous positifs. Il semble donc possible de conclure à l'hypothèse selon laquelle les séries sont générées de manière déterministe chaotique. L'étude de Girerd-Potin et Taramasco (1994) oblige à nuancer ce résultat.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

Ils expliquent, en effet, qu'après simulation, ils trouvent avec cet algorithme des exposants de Lyapunov de 0,02 à 0,03 pour un bruit blanc gaussien et un GARCH(1,1). Cependant nous trouvons des coefficients supérieurs à 0,06 pour deux séries. L'hypothèse du chaos ne peut pas être remise en cause, mais il est évident que le manque de fiabilité de l'algorithme employé doit nous rendre méfiant pour l'interprétation de nos résultats.

3.2. Méthode des réseaux de neurones

Il est possible de conforter le résultat précédent en calculant à nouveau les exposants de Lyapunov, mais à l'aide de l'algorithme de Kaashoek et Van Dijk en 1991. La dimension de plongement est la même que pour l'algorithme de Wolf. Le tableau suivant donne les exposants de Lyapunov obtenus à l'issue de l'utilisation de l'algorithme des réseaux de neurones.

Tableau 4. Exposants de Lyapunov.
(Algorithme de Kaashoek et Van Dijk.)

	$\hat{\lambda}_1$	Dimension de plongement
Accor	-0,040 8	7
C.M.B.	0,760 9	8
Lafarge	1,168 1	6
Peugeot	0,601 2	7
Valéo	0,423 8	6

Les résultats présentés ici semblent renforcer l'idée d'une évolution chaotique des rentabilités, excepté pour Accor dont la valeur négative de l'exposant de Lyapunov nous amène à rejeter l'éventualité du chaos. Les simulations effectuées par Kaashoek et Van Dijk sur des données aléatoires aboutissent à des résultats identiques. En ce qui concerne les quatre autres séries les valeurs trouvées sont importantes et signalent une très forte entropie. Pour référence, signalons que les plus grands exposants de Lyapunov sont de 0,603 et 2,16 respectivement pour les systèmes de Henon et de Lorenz. Dans le cas des rentabilités de la société Lafarge-Coppée, l'exposant de Lyapunov est de 1,168 1. Cet exposant peut s'interpréter comme l'inverse de la rapidité de perte de mémoire des conditions initiales¹. Pour Lafarge-Coppée cette valeur est de $1/1,168\ 1 = 0,856$ jour (1,314 jour pour Cmb, 1,663 pour Peugeot et 2,359 pour Valéo). Tout pouvoir prédictif serait donc détruit en moins d'une journée ou en à peine plus. Ceci conforterait l'intuition première, découlant de l'analyse des corrélations et concernant la disparition rapide de l'information. Nous sommes bien en présence de séries chaotiques déterministes, hormis Accor. Mais la rapidité de

1. Peters (1985) dénomme cela interprétation en « backward looking » de l'exposant de Lyapunov.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

perte de mémoire sur ces séries nous empêche de profiter de ce déterminisme. De plus, Girerd-Potin et Taramasco (1994) soulignent qu'avec un faible exposant de Lyapunov « la précision des données n'est pas un problème crucial pour la prévision ». Or les exposants que nous avons calculés sont très élevés et pour aussi précises que soient les données dont nous disposons, il est peu probable que la précision soit absolue. Cela réduit encore la possibilité de prévision qu'offre le caractère pourtant déterministe de la série. Ainsi, nous nous trouvons face à des séries déterministes chaotiques, mais dont l'importance de l'exposant de Lyapunov nous empêche de pouvoir profiter conformément aux propriétés de Sensibilité aux Conditions Initiales des séries chaotiques déterministes.

Nous avons montré dans cet article la difficulté de mesurer les exposants de Lyapunov d'une série. Cette difficulté a deux causes principales. Premièrement la nature même du phénomène étudié qui par définition est instable et deuxièmement la difficulté de mettre en place un algorithme fiable qui donne sans incertitude la valeur de l'exposant de Lyapunov : l'utilisation des réseaux de neurones permet une première avancée en offrant une fiabilité supérieure à l'algorithme de Wolf. L'état actuel de nos connaissances ne permet pas de déduire, à partir des données, la forme structurelle du système sous-jacent et limite alors l'utilisation du chaos en finance ; l'impossibilité de reconstruire l'attracteur doit d'ailleurs nous faire nous interroger sur la réelle présence d'un processus chaotique déterministe et ce malgré les résultats obtenus lors de l'étude empirique.

Néanmoins cela permet de modérer les conclusions apportées lors de l'utilisation des formalisations statistiques (ARCH...) qui, même si elles reprennent une bonne partie du phénomène, ne sont alors qu'une représentation et non une description de la réalité.

RÉFÉRENCES

- ALEXANDRE H. (1994) *L'efficiencia bruitee. Une analyse non linéaire du marché français des actions*, Thèse de doctorat en sciences de gestion, Université de Bourgogne, Dijon, 268 p.
- BERGÉ P., POMEAU Y., VIDAL C. (1988) *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann, 353 p.
- BLACK F. (1986) "Noise", *J. of Finance*, pp. 529-543.
- BLANK S.C. (1991) "Chaos in Futures Markets ? A Nonlinear Dynamical Analysis", *J. Futures Markets*, pp. 711-728.
- BROCK W.A. (1986) "Distinguished Random and Deterministic Systems", *J. Economic Theory*, pp. 168-195.
- BROCK W.A., DECHERT W., SCHEINKMAN J. (1987) *A Test for Independance Based on the Correlation Dimension*, Document non publié, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

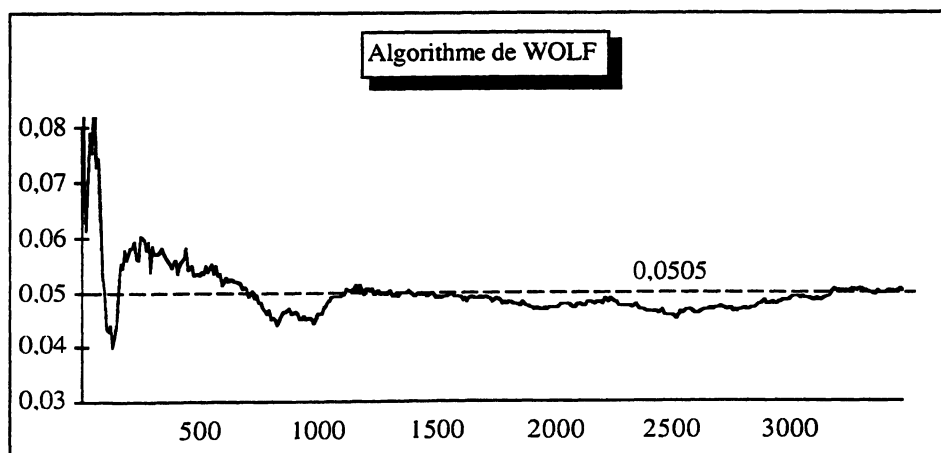
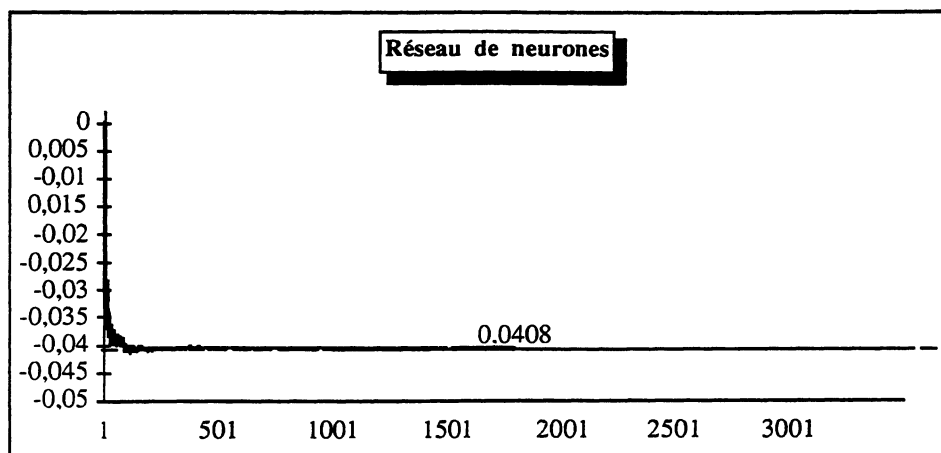
- BROCK W.A., MALLIARIS A.G. (1989) *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamics Economics*, North-Holland, Advanced Textbooks in Economics, 389 p.
- BRORSEN B.W., YANG S.R. (1993) "Nonlinear Dynamics of Daily Futures Prices : Conditional Heteroskedasticity or Chaos", *J. of Futures Markets*, pp. 175-191.
- CHUA L.O., PARKER T.S. (1989) *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 348 p.
- DECOSTER G.P., LABYS W.C., MITCHELL D.W. (1992) "Evidence of Chaos in Commodity Futures Prices", *J. Futures Markets*, pp. 291-305.
- DECHERT W. (1988) *A Characterization of Independence for a Gaussian Proces in Terms of the Correlation Dimension*, Working paper 8812, University of Wisconsin at Madison.
- ECKMANN J.-P., RUELLE D., (1985) "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *R. Modern Physics*, pp. 617-656.
- GIRERD-POTIN I., TARAMASCO O. (1994) "Les rentabilités à la bourse de Paris sont-elles chaotiques ?", *R. Economique*, pp. 215-238.
- GRASSBERGER P., PROCACCIA I. (1983) "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica 9D*, pp. 189-208.
- HSIEH D.A. (1989) "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates", *J. of Business*, pp. 339-368.
- HSIEH D.A. (1989) "Chaos and Nonlinear Dynamics : Application to Financial Markets", *J. of Finance*, pp. 1839-1877.
- HSIEH D.A., LEBARON D.A. (1988) *Finite Sample Properties of the BDS Statistic*, Manuscript non publié, University of Chicago et University of Wisconsin at Madison.
- KAASHOEK J.F., VAN DIJK H.K. (1991) *Evaluation and Application of Numerical Procedures to Calculate Lyapunov Exponents*, cahier 9173/A, Erasmus University, Rotterdam, p. 38.
- KYLE A.S. (1985) "Continuous Auctions and Insider Trading", *Econometrica*, pp. 1315-1335.
- LEBARON B. (1989) "Nonlinear Dynamics and Stock Returns", *J. of Business*, pp. 311-337.
- LO A., MACKINLAY C. (1988) "Stock Market Prices do not Follow Random Walk : Evidence from a Simple Specification Test", *R. of Financial Studies*, pp. 41-66.
- MANDELBROT B. (1975) *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, (3^e édition, 1989), Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion, 268 p.
- PETERS E.E. (1991) *Chaos and Order in the Capital Market. A new View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, J. Wiley, 240 p.
- POINCARÉ H. (1890) "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", *Acta Mathematica*, tome 13, pp. 1-270.
- RUELLE D., TAKENS F. (1971) "On the Nature of Turbulence", *Communications on Mathematical Physics*, pp. 167-192.
- TAKENS F. (1981) "Detecting Strange Attractors in Turbulence", in *Dynamical Systems and Turbulence*, D.A. Rand and L.S. Young, Springer-Verlag, Berlin.
- WOLF A., SWIFT J.B., SWINNEY H.L., VASTANO J.A. (1985) "Determining Lyapunov Exponents from a Time Serie", *Physica 16D*, pp. 285-317.

DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

ANNEXE 1a

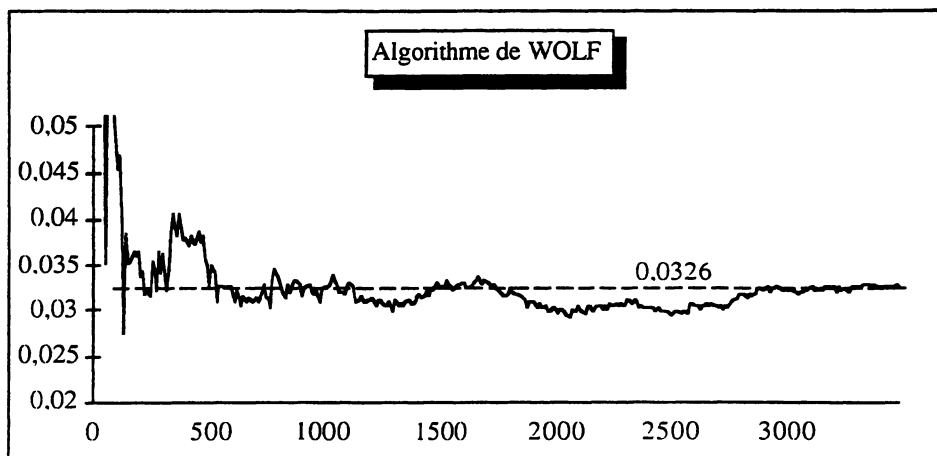
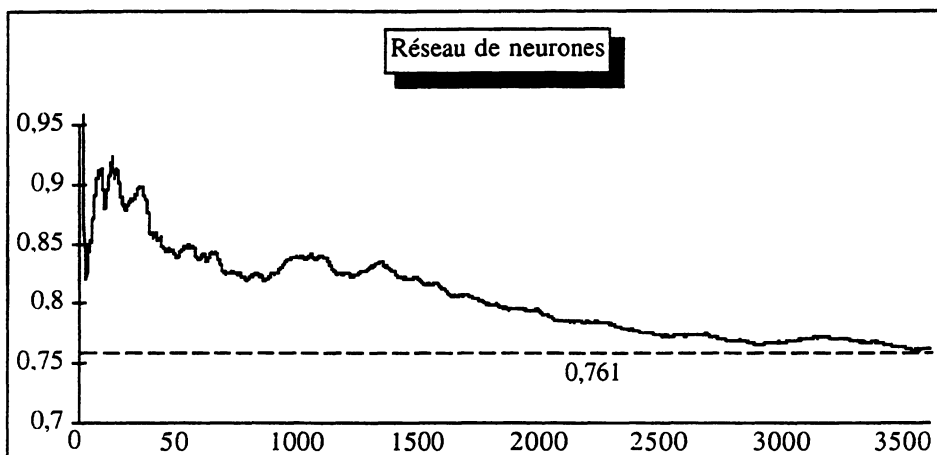
EXPOSANT DE LYAPUNOV

Accor



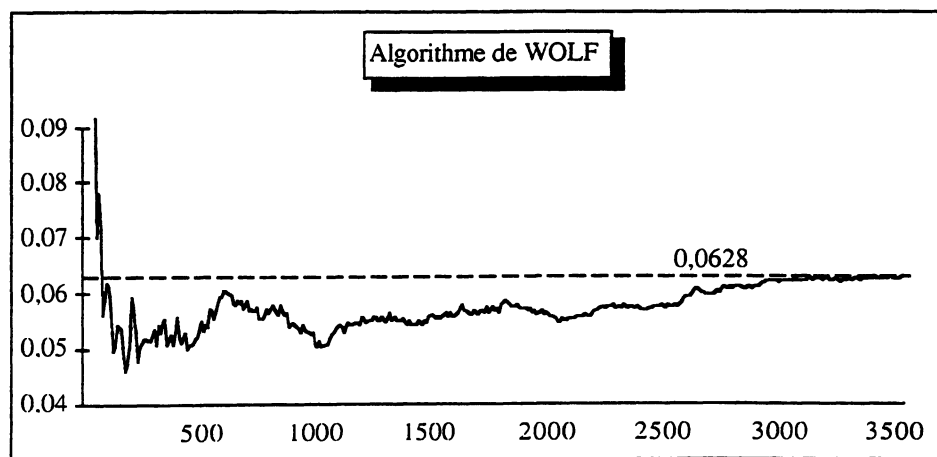
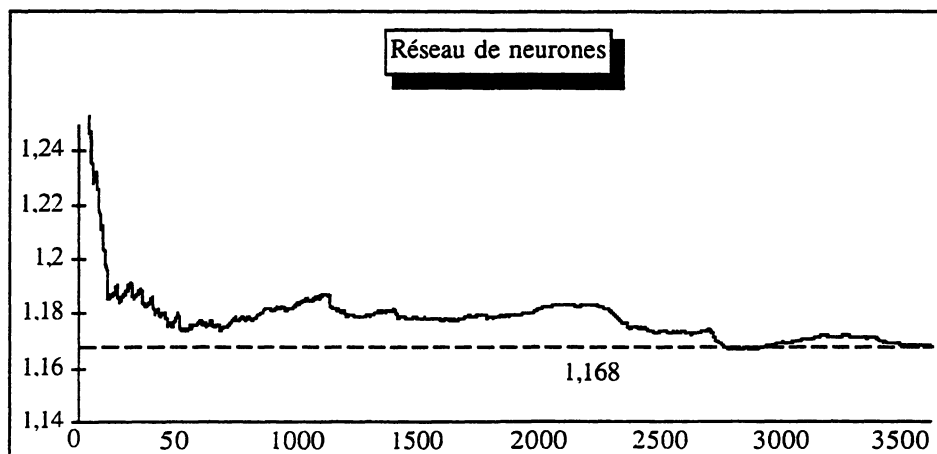
DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

ANNEXE 1b EXPOSANT DE LYAPUNOV Carnaud MetalBox



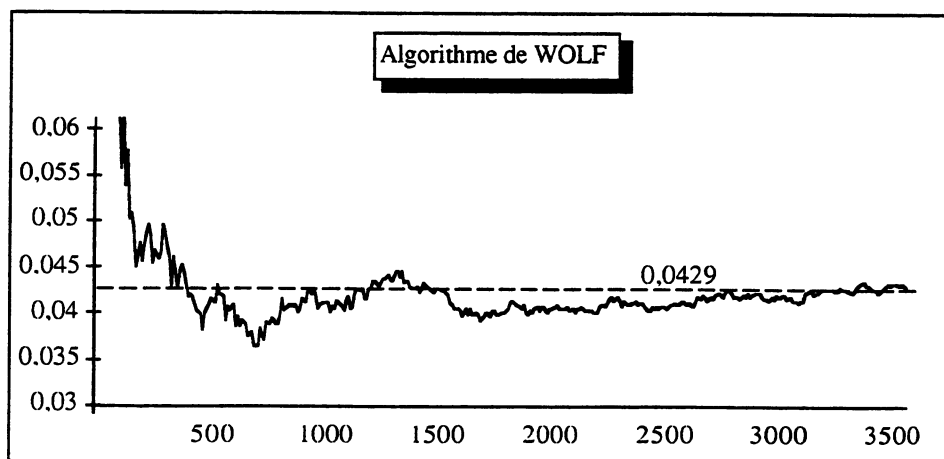
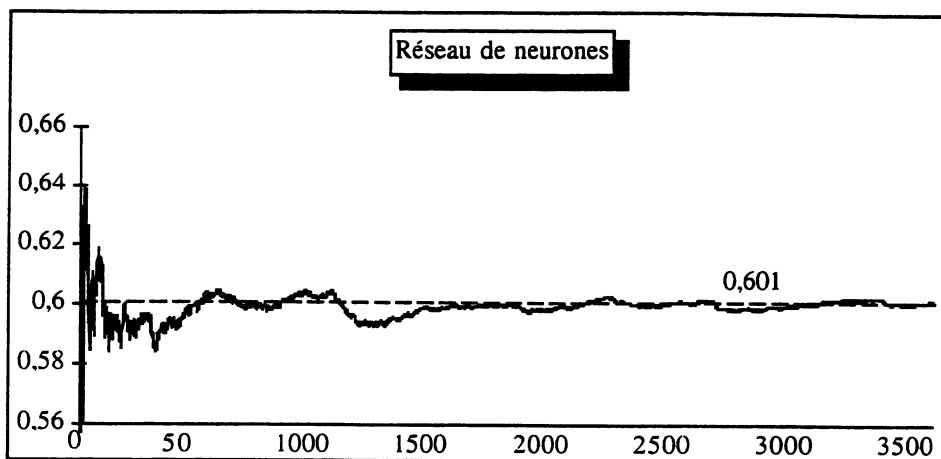
DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

ANNEXE 1c EXPOSANT DE LYAPUNOV Lafarge-Coppée



DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

ANNEXE 1d EXPOSANT DE LYAPUNOV Peugeot SA



DEUX MESURES DE L'EXPOSANT DE LYAPUNOV

ANNEXE 1e
EXPOSANT DE LYAPUNOV
Valéo

