

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J. C. GRANGÉ

Applications des transformations doublement logarithmiques des pourcentages cumulés

Journal de la société statistique de Paris, tome 110 (1969), p. 255-262

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1969__110__255_0

© Société de statistique de Paris, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DES TRANSFORMATIONS DOUBLEMENT LOGARITHMIQUES DES POURCENTAGES CUMULÉS

Les distributions statistiques doublement exponentielles se présentent assez souvent dans la pratique. Aussi est-il intéressant de posséder des outils permettant de les mettre en évidence rapidement. MM. Dufrénoy et Morice ont étudié ces problèmes dans de précédents articles (*J. S. S. P.*, 1967, nos 10-11-12 et 1968, nos 10-11-12). Voici quelques applications pratiques :

I — APPLICATION A LA FIABILITÉ — LOI DE WEIBULL

Rappelons que la loi de Weibull a pour fonction de densité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - t_0}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t - t_0}{\eta} \right)^\beta}$$

avec

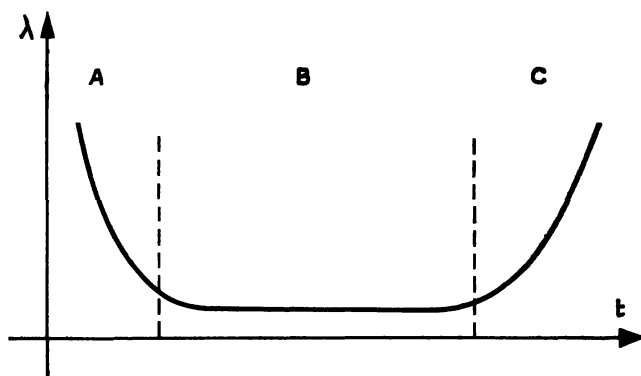
$$t > t_0 \quad \eta \text{ et } \beta > 0$$

et pour fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t - t_0}{\eta} \right)^\beta} = 1 - R(t)$$

Cette loi s'applique particulièrement aux tests de composants électroniques, car elle constitue un modèle mathématique très représentatif des dégradations dans les milieux physiques.

Lors de leur mise en service, des composants meurent après des temps de fonctionnement courts; c'est le cas où β est inférieur à 1, le taux de panne est décroissant. Une deuxième phase de fonctionnement correspond au cas où $\beta = 1$, le taux de panne est alors constant. Puis les composants s'usent, β devient supérieur à 1 et le taux de panne va croissant.



Phase A : Période de jeunesse.

Phase B : Période de fonctionnement.

Phase C : Période d'usure.

Fig. 1. — Variation du taux de panne

Application à la fiabilité

Si on suppose qu'à l'instant initial t_0 , il y a N objets soumis à des contraintes, à l'instant t , il y aura N_v objets vivants, remplissant leurs fonctions, et N_m objets morts ou défaillants.

A tout instant :

$$N = N_v + N_m$$

On appelle fiabilité, la probabilité qu'à un objet d'être en vie à un instant t .

$$R_{(t)} = \frac{N_v}{N}$$

$$R_{(t)} + F_{(t)} = 1 \quad \text{avec} \quad F_{(t)} = \frac{N_m}{N}$$

Le taux de panne s'écrit :

$$\lambda = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - t_0}{\eta} \right)^{\beta-1} = - \frac{1}{R_{(t)}} \frac{dR_{(t)}}{dt}$$

La densité de panne est égale à la fiabilité multipliée par le taux de panne.

$$f_{(t)} = R_{(t)} \times \lambda_{(t)}$$

Supposons un lot de semi-conducteurs travaillant au-delà de leurs conditions normales d'utilisation, et dans des ambiances sévères, afin d'accélérer leur vieillissement.

Au bout de 2 500 heures d'utilisation, 1 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 4 000 heures d'utilisation, 3 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 5 000 heures d'utilisation, 10 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 8 000 heures d'utilisation, 25 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 10 000 heures d'utilisation, 50 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 15 000 heures d'utilisation, 90 % des composants sont hors fonction.
 Au bout de 20 000 heures d'utilisation, 99 % des composants sont hors fonction.

Ces points reportés sur le graphique de la figure 2 s'alignent sur une droite. Les échelles se présentent de la manière suivante :

- en abscisse une échelle logarithmique de la variable;
- en ordonnée une échelle LOG . LOG des fréquences cumulées indiquées en pourcentages.

Sur le graphique le paramètre β , pente de la droite, est estimé égal à 3 et le paramètre η à 11 700 heures.

Une échelle de correspondances indique pour $\beta < 4$ la valeur du produit $\Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)$ ici égal à 0,8937.

L'espérance de vie est alors calculée

$$m = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 10\,200 \text{ heures}$$

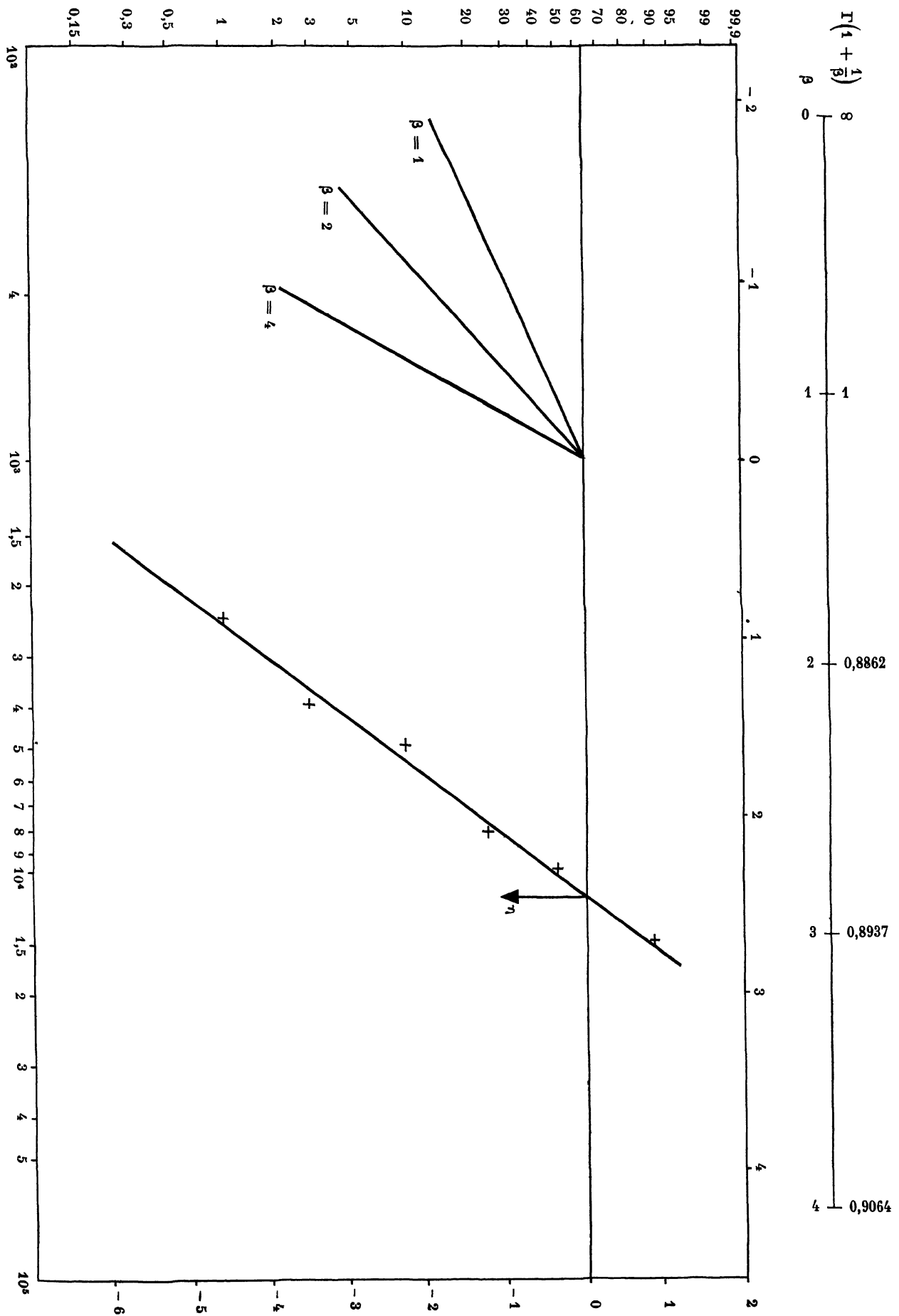


Fig. 2

L'équation de fiabilité s'écrit

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{11700}\right)^3}$$

La loi de Weibull est aussi utilisée dans l'étude et l'élaboration des plans de contrôle de qualité, pour l'étude de la résistance aux limites des matériaux...

II — TRANSFORMATION — LOG (— LOG Ø) .

Soit la distribution :

$$\varphi(x) = \alpha_m \exp [-y - e^{-y}]$$

et sa fonction de répartition

$$\varnothing(x) = \exp [-e^{-y}]$$

avec

$$y = \alpha_n (x - u_n)$$

Cette transformation se présente de la manière suivante :

- en abscisse, une échelle arithmétique de la variable;
- en ordonnée, une échelle —LOG (—LOG) des fréquences cumulées indiquées en pourcentages.

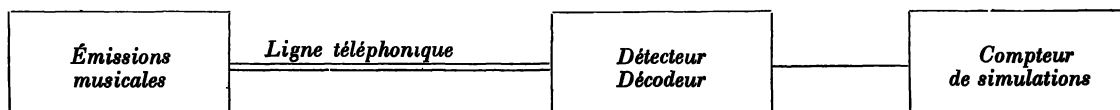
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de la fonction $y = -\text{LOG} (-\text{LOG } \varnothing)$ pour $\varnothing$ variant de 0,01 à 0,99.

Valeurs de $y = -\text{Log} (-\text{Log } \varnothing)$.

%	y	%	y	%	y	%	y
1	— 1,5271	26	— 0,2979	51	+ 0,3954	76	+ 1,2930
2	— 1,3640	27	— 0,2895	52	+ 0,4247	77	+ 1,3418
3	— 1,2546	28	— 0,2813	53	+ 0,4543	78	+ 1,3924
4	— 1,1690	29	— 0,2733	54	+ 0,4842	79	+ 1,4450
5	— 1,0971	30	— 0,2656	55	+ 0,5144	80	+ 1,4999
6	— 1,0343	31	— 0,2580	56	+ 0,5450	81	+ 1,5572
7	— 0,9780	32	— 0,2505	57	+ 0,5760	82	+ 1,6172
8	— 0,9265	33	— 0,2431	58	+ 0,6074	83	+ 1,6802
9	— 0,8787	34	— 0,2358	59	+ 0,6393	84	+ 1,7466
10	— 0,8340	35	— 0,2286	60	+ 0,6717	85	+ 1,8169
11	— 0,7917	36	— 0,2214	61	+ 0,7046	86	+ 1,8916
12	— 0,7515	37	+ 0,0057	62	+ 0,7380	87	+ 1,9713
13	— 0,7130	38	+ 0,0329	63	+ 0,7721	88	+ 2,0570
14	— 0,6760	39	+ 0,0601	64	+ 0,8067	89	+ 2,1495
15	— 0,6403	40	+ 0,0874	65	+ 0,8421	90	+ 2,2503
16	— 0,6057	41	+ 0,1147	66	+ 0,8782	91	+ 2,3611
17	— 0,5720	42	+ 0,1421	67	+ 0,9150	92	+ 2,4843
18	— 0,5392	43	+ 0,1696	68	+ 0,9527	93	+ 2,6231
19	— 0,5072	44	+ 0,1972	69	+ 0,9913	94	+ 2,7826
20	— 0,4758	45	+ 0,2250	70	+ 1,0309	95	+ 2,9701
21	— 0,4451	46	+ 0,2529	71	+ 1,0715	96	+ 3,1985
22	— 0,4148	47	+ 0,2810	72	+ 1,1132	97	+ 3,4913
23	— 0,3850	48	+ 0,3092	73	+ 1,1560	98	+ 3,9018
24	— 0,3556	49	+ 0,3377	74	+ 1,2002	99	+ 4,6000
25	— 0,3266	50	+ 0,3665	75	+ 1,2458	99,999	+ 13,8629

Application à la transmission de données

Grâce à l'intermédiaire d'un poste téléphonique à clavier il est possible d'envoyer des informations à un ordinateur. Les signaux électriques émis sont des combinaisons de deux signaux de fréquences différentes correspondant à un code que l'ordinateur détecte et analyse. Cette communication entre l'abonné et l'ordinateur peut se faire dans une ambiance de bruits, de musiques ou de paroles. Il existe une probabilité non nulle pour que ces sons créent, par l'intermédiaire du microphone du combiné téléphonique, un signal correspondant au code reconnu par l'ordinateur. Ce signal parasite est une cause d'erreur dans les messages transmis. Il est donc nécessaire de concevoir des circuits électroniques protégeant au maximum l'ordinateur d'un risque d'erreur dû à une simulation par l'ambiance sonore. Pour mieux définir ces circuits, des essais ont été effectués en laboratoire. Un récepteur radiophonique était connecté à l'entrée du détecteur décodeur de l'ordinateur. Un compteur totalisait toutes les trois heures le nombre de simulations provoquées.



La distribution des simulations pour une série de 26 expériences correspond à la distribution $y = -\text{LOG} (-\text{LOG } \varnothing)$. Les pourcentages cumulés des tests de trois heures pour obtenir n simulations s'alignent sensiblement sur une droite rapportée aux échelles proposées (fig. 3).

Application à la psychologie

Il est aussi possible de trouver un exemple de ce type de distribution en psychologie industrielle. Prenons l'étude d'une discussion lors d'un entretien d'évaluation entre un chef et son subordonné. Une méthode particulière d'entretien est celle appelée : « Juge et Vends. » Dans ce type d'entretien le supérieur hiérarchique poursuit deux buts : communiquer à son employé son évaluation puis lui faire accepter les voies de son perfectionnement. Cette méthode est utilisée vis-à-vis de jeunes ou de nouveaux employés.

L'étude d'une discussion de ce type révèle que le supérieur a pris la parole :

3 fois pour dire à chaque intervention de 0 à 25 mots
 4 fois pour dire à chaque intervention de 25 à 50 mots
 5 fois pour dire à chaque intervention de 50 à 75 mots
 3 fois pour dire à chaque intervention de 75 à 100 mots
 1 fois pour dire à chaque intervention de 100 à 125 mots
 3 fois pour dire à chaque intervention de 125 à 150 mots
 2 fois pour dire à chaque intervention de 150 à 175 mots
 1 fois pour dire à chaque intervention de 175 à 200 mots

Cependant le subordonné a pris la parole :

10 fois pour dire à chaque intervention de 0 à 25 mots
 7 fois pour dire à chaque intervention de 25 à 50 mots
 2 fois pour dire à chaque intervention de 50 à 75 mots
 1 fois pour dire à chaque intervention de 75 à 100 mots

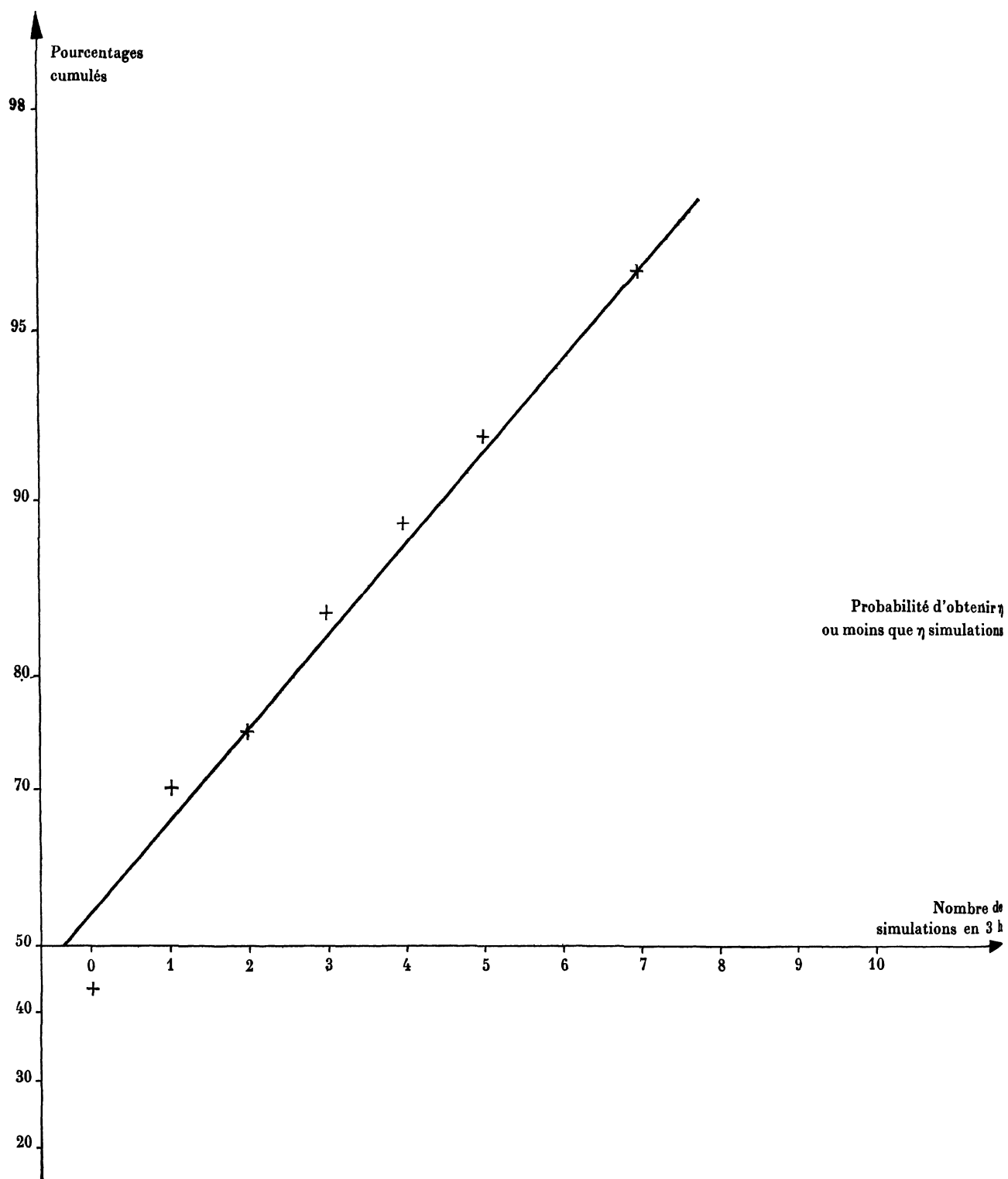


Fig. 3

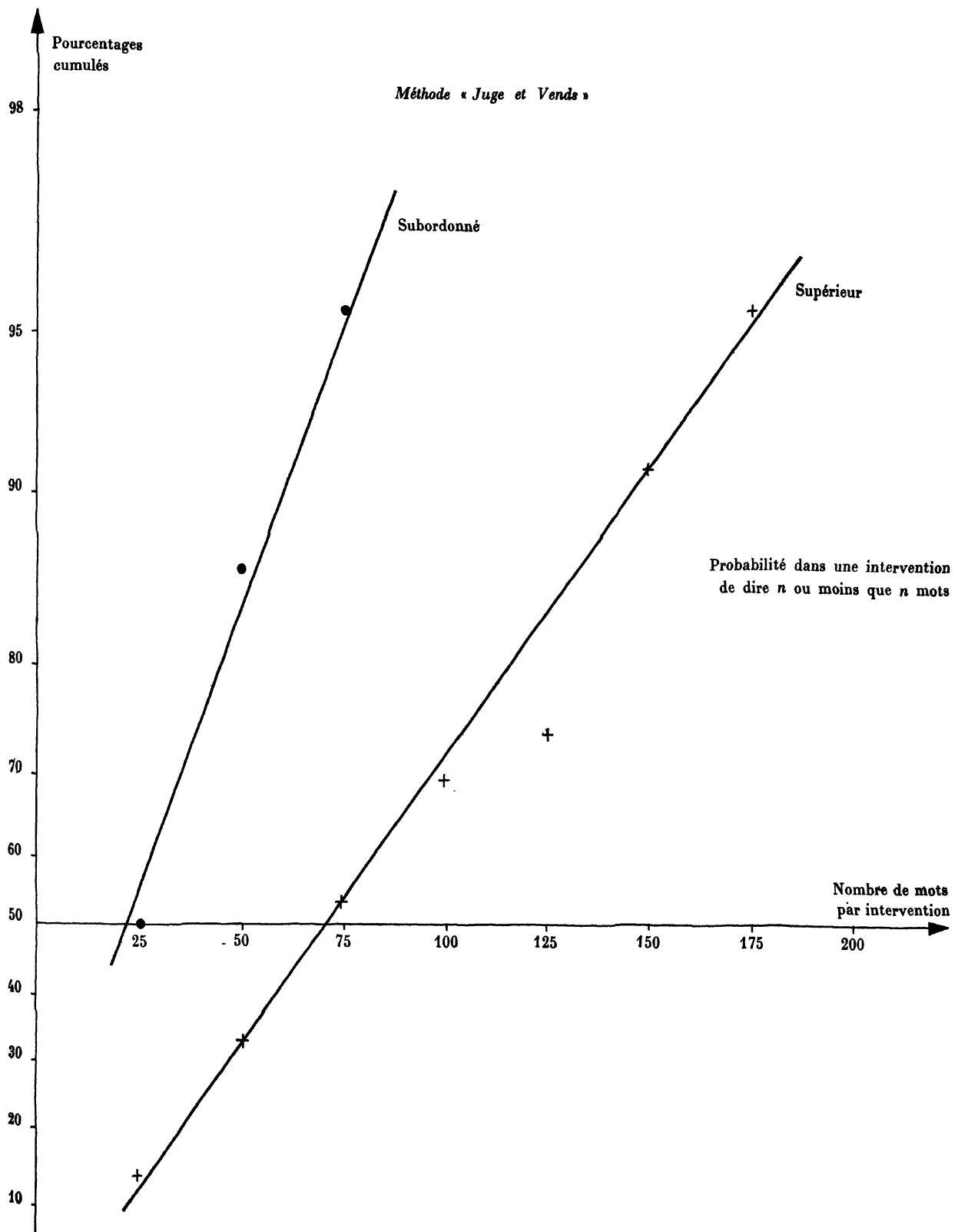


Fig. 4

Les pourcentages cumulés se présentent ainsi :

Nombre de mots	% des interventions	
	Supérieur	Subordonné
0 à 25	13,6	50
25 à 50	32	85
50 à 75	54,5	95
75 à 100	68	100
100 à 125	73	
125 à 150	91	
150 à 175	95,5	
175 à 200	100	

Ces pourcentages reportés sur le graphique indiqué s'alignent sur une droite (fig. 4).

Cette échelle fonctionnelle s'applique particulièrement aux distributions des phénomènes à faibles probabilités comme les événements météorologiques, la prévision des crues, la psychologie...

J.-C. GRANGÉ

BIBLIOGRAPHIE

GUMBEL. — Statistics of extremes.

PLAIT A. — The Weibull distribution with tables.

MORICE E. — Transformations doublement logarithmiques de pourcentages cumulés. *Journal de la Société de statistique de Paris* n° 10, 11, 12, 1968.

DUFRENOY J. — Méthode de prévision des crues de rivières. Académie d'agriculture, 1968.

FRENDENTAL. — The statistical aspect of fatigue of materials.

MORLEC E. — Étude et réalisation d'un système de réception de données codées en multifréquences, Mémoire C. N. A. M.

MAIER N. — L'entretien d'appréciation.

BARLOW R. et PROSCHAN F. — Mathematical theory of reliability.