

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

A. H. BAZIN

Quelques aspects économiques des contrôles effectués par méthodes statistiques

Journal de la société statistique de Paris, tome 103 (1962), p. 129-147

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1962__103__129_0

© Société de statistique de Paris, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VII

QUELQUES ASPECTS ÉCONOMIQUES DES CONTRÔLES EFFECTUÉS PAR MÉTHODES STATISTIQUES

Le recours aux méthodes statistiques permet d'introduire plus de réalisme dans la pratique des réceptions en rendant possible la détermination chiffrée;

- du niveau de qualité
- des risques courus dans l'évaluation de la qualité d'un lot.

Ces chiffres pourraient fournir une base d'entente objective entre client et fournisseur, après accord mutuel. Bien que cet idéal soit loin d'être universellement atteint, de tels accords existent et on peut espérer que cette politique ira en se généralisant chaque fois que c'est possible.

Le but de cet exposé est d'envisager les conséquences économiques du choix d'un niveau de qualité donné pour un contrôle de réception sur produits finis et ce, du point de vue du fournisseur seulement.

En effet, le contrôle réception ne crée pas la qualité, il la juge et joue le rôle d'un filtre « passe-bas ».

Son action corrective améliore la qualité moyenne livrée au client en éliminant les lots les moins bons, ce qui accroît les prix de revient et le choix d'un niveau de qualité trop sévère risque d'être paralysant ou ruineux.

Il y a donc un compromis à rechercher entre l'amélioration de qualité et l'accroissement du prix de revient pour une fabrication d'une qualité donnée.

Théoriquement, il suffirait de rechercher l'optimum défini comme la situation où le coût du contrôle et des rebuts équilibre le coût probable des réclamations du client, mais ce coût probable est, en général, très difficile à chiffrer (préjudice moral, perte de clients, etc...)

Il peut être plus commode d'utiliser un critère mathématique plus simple et c'est à ce but que répond l'étude actuelle qui se limite d'ailleurs à un cas simple, *celui où les lots soumis au contrôle ne peuvent être ni triés ni remaniés lorsqu'ils sont refusés.*

La généralisation de ces résultats au cas où les lots refusés peuvent être contrôlés à 100 % et où les éléments défectueux peuvent être éliminés, est parfaitement possible — mais le cas limite que nous envisageons est suffisamment fréquent dans l'industrie (cas du contrôle destructif, par exemple) pour constituer un bon exemple d'application.

POSITION DU PROBLÈME (Voir fig. 1)

1° Nous supposons une fabrication définie par une courbe de distribution indiquant la probabilité $Q(p)$ de produire $x\%$ d'éléments défectueux.

On présentera donc au contrôle avec une fréquence $Q(p) dp$ des lots ayant des % d'éléments défectueux compris entre p et $p + dp$

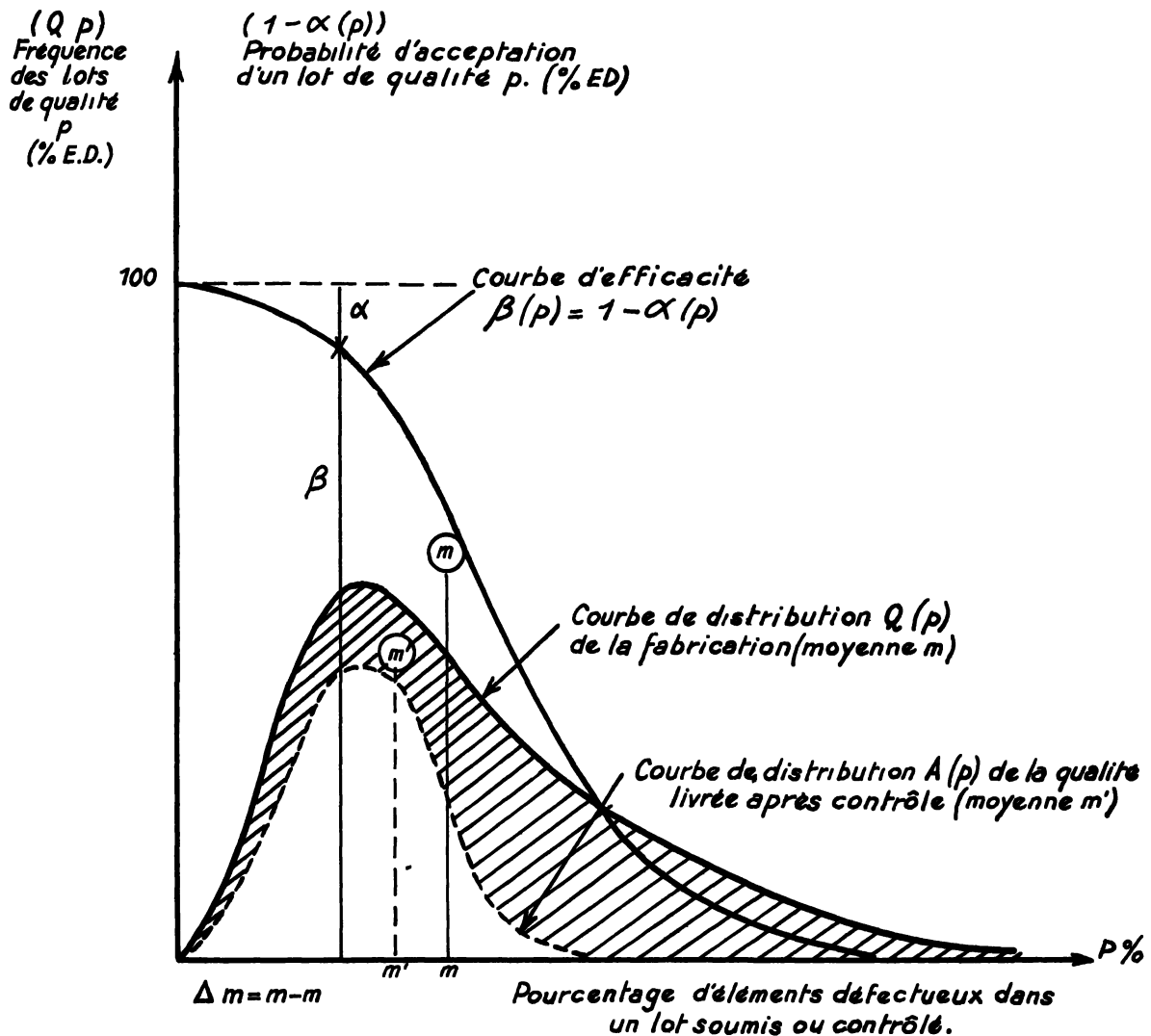


FIG. 1. — La zone hachurée matérialise les rebuts R. dus au contrôle.

2° Supposons un plan de contrôle défini par sa courbe d'efficacité donnant la probabilité $\alpha(p)$ de rebuter un lot contenant $p\%$ d'éléments défectueux.

Nous ajoutons une hypothèse supplémentaire, celle que les lots rebutés ne peuvent être ni triés, ni remaniés. Ils constituent donc un rebut net, irrécupérable.

La qualité finale moyenne sans contrôle serait :

$$m = \int_0^{\infty} p Q(p) dp \quad (1)$$

Les rebuts provoqués par la mise en application du plan de contrôle étant par définition

$$R = \int_0^{\infty} \alpha(p) Q(p) dp \quad (2)$$

Les livraisons seront réduites à une quantité :

$$A = \int_0^{\infty} Q(p) [1 - \alpha(p)] dp \quad (3)$$

et la qualité finale moyenne dans les livraisons

$$m' = \frac{1}{A} \int_0^{\infty} p \alpha(p) Q(p) dp \quad (4)$$

Nota :

La formule (4) cesserait d'être vraie si les lots rebutés étaient triés à 100 % et les éléments acceptables récupérés.

Les formules ci-dessus traduisent simplement le fait que si on rebute un nombre r du nombre de lots présentés N , le client recevra $A = N - r$ lots et que si d est le nombre des pièces défectueuses contenues dans les r lots éliminés D le nombre des pièces défectueuses contenues dans les N lots d'effectif unitaire n .

$$\left[m = 100 \frac{D}{Nn} \% \right]$$

le client recevra $D - d$ pièces défectueuses dans $A = N - r$ lots, soit un pourcentage :

$$m' = 100 \frac{(D - d)}{(N - R) n}$$

DÉFINITION DU RAPPORT D'ÉQUITÉ

L'amélioration relative de qualité aura pour expression $\frac{m' - m}{m}$ et cette amélioration coûtera un certain pourcentage de rebuts $R = \frac{r}{N}$ (pourcentage de lots rebutés).

Il est naturel de faire le rapport de ces deux quantités pour juger de l'intérêt de l'opération. Nous appellerons *Rapport d'Équité* le coefficient

$$E = \frac{\frac{m - m'}{m}}{\bar{R}} \quad (5)$$

Dans le cas présent, on peut l'exprimer en fonction de m , d , D , r , R , et n sous la forme :

$$E = \frac{1}{m(1 - R)} \left[\frac{d}{rn} - \frac{D}{Nn} \right] \quad (6)$$

$$E = \frac{\frac{pr}{m} - 1}{1 - R} \quad (7)$$

En appelant p_r le pourcentage de pièces défectueuses dans les lots rebutés

$$p_r = \frac{d}{rn}$$

Sous la forme 7 on voit instantanément que, lorsque $R \longrightarrow 1$ (rebut de la totalité de la fabrication) $E \longrightarrow 1$ également en effet $p_r \longrightarrow m$ par valeurs supérieures.

L'étude faite dans quelques cas particuliers a montré qu'en général $E \longrightarrow 1$ par valeurs inférieures, c'est-à-dire que p_r tendait vers m plus vite que R ne tendait vers 1.

Ces expressions ne présentent qu'un intérêt assez limité car d , r , et R dépendent des formes et des positions relatives des courbes $Q(p)$ et $\alpha(p)$.

Pour simplifier l'étude nous ajouterons l'hypothèse supplémentaire que la courbe $Q(p)$ est entièrement définie par sa moyenne m , et nous conviendrons de caractériser la courbe d'efficacité d'un plan d'échantillonnage par deux paramètres.

a) l'abscisse $p_{0,5}$ du point d'ordonnée $\alpha = 0,50$.

b) la pente de la tangente à la courbe en ce point ($p_{0,5} - 0,5$).

On peut alors juger du degré d'adaptation d'un plan de contrôle à une courbe de qualité d'une fabrication à l'aide du rapport :

$$\frac{p_{0,5}}{m}$$

Si ce rapport est élevé, on peut dire que le plan de contrôle est large, et qu'il est serré dans le cas contraire.

On peut alors chercher à étudier la variation de E en fonction de $p_{0,5}/m$ pour diverses valeurs de $p_{0,5}$ et en fonction de

$$\left(\frac{d\alpha}{dp}\right) p = p_{0,50}$$

L'étude mathématique complète pour les plans d'échantillonnages les plus usuels peut se faire sans grandes difficultés si l'on dispose d'un ordinateur.

N'ayant pu y faire appel, nous nous excusons de nous en tenir à des résultats sommaires et qui peuvent être entachés d'erreurs importantes, mais nous pensons que le travail effectué doit être considéré comme un exemple d'application d'une méthode de jugement et de sélection des plans de contrôle les plus rentables et les plus satisfaisants et non pas comme un travail définitif applicable à tous les cas possibles.

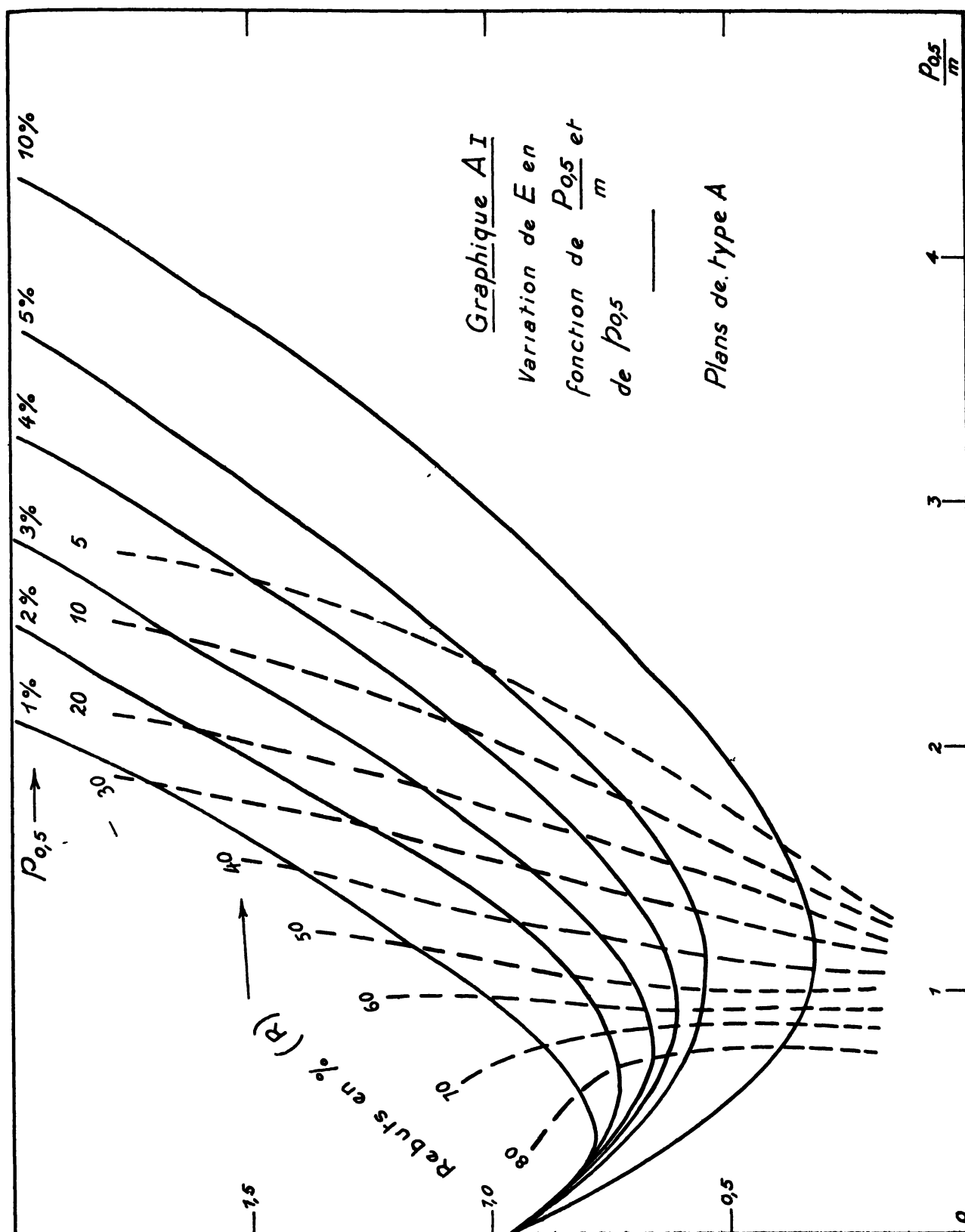
Les calculs d'intégration ayant été faits graphiquement, nous donnons les chiffres à titre d'exemple, mais sans garantie de précision.

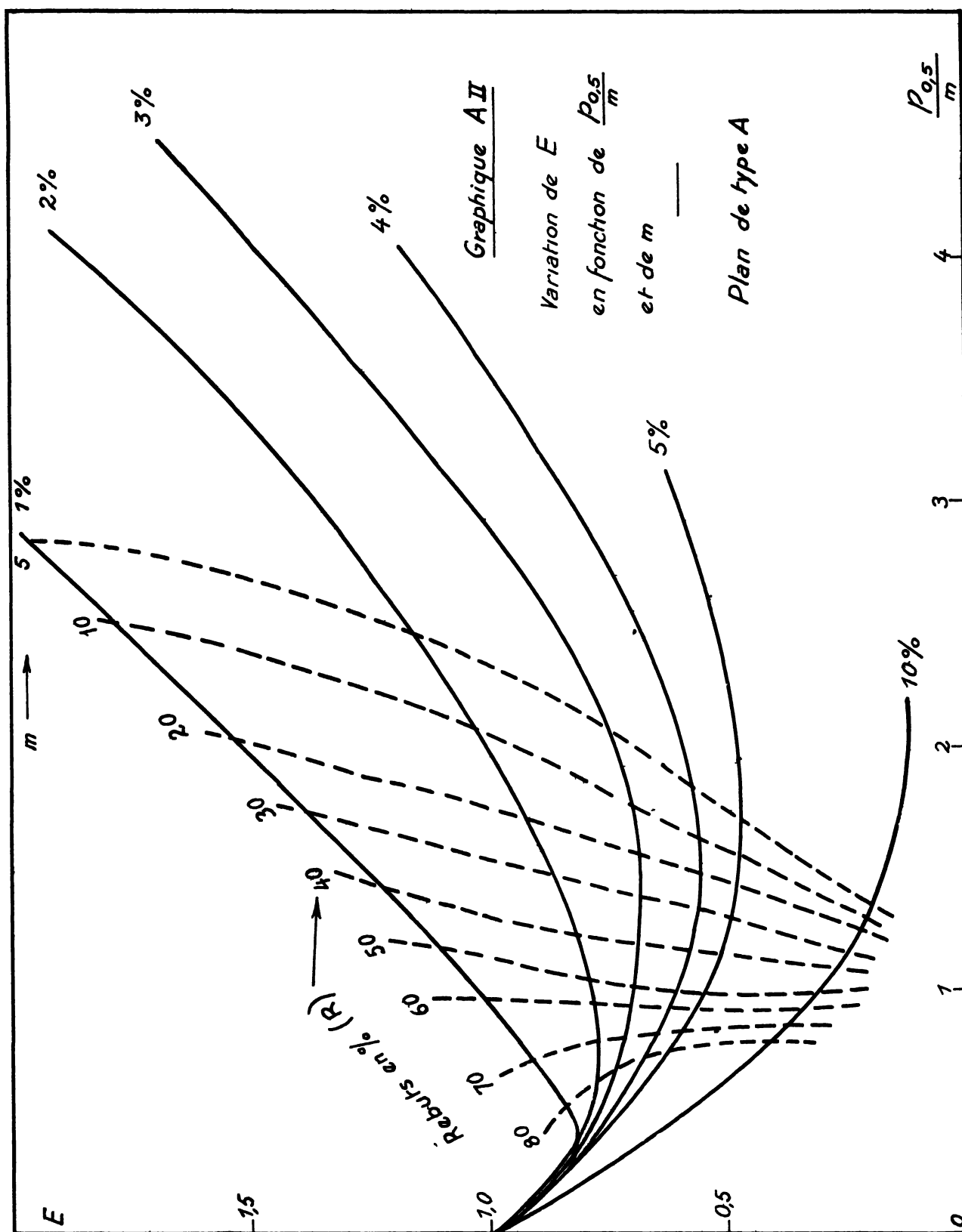
PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE IDÉALS

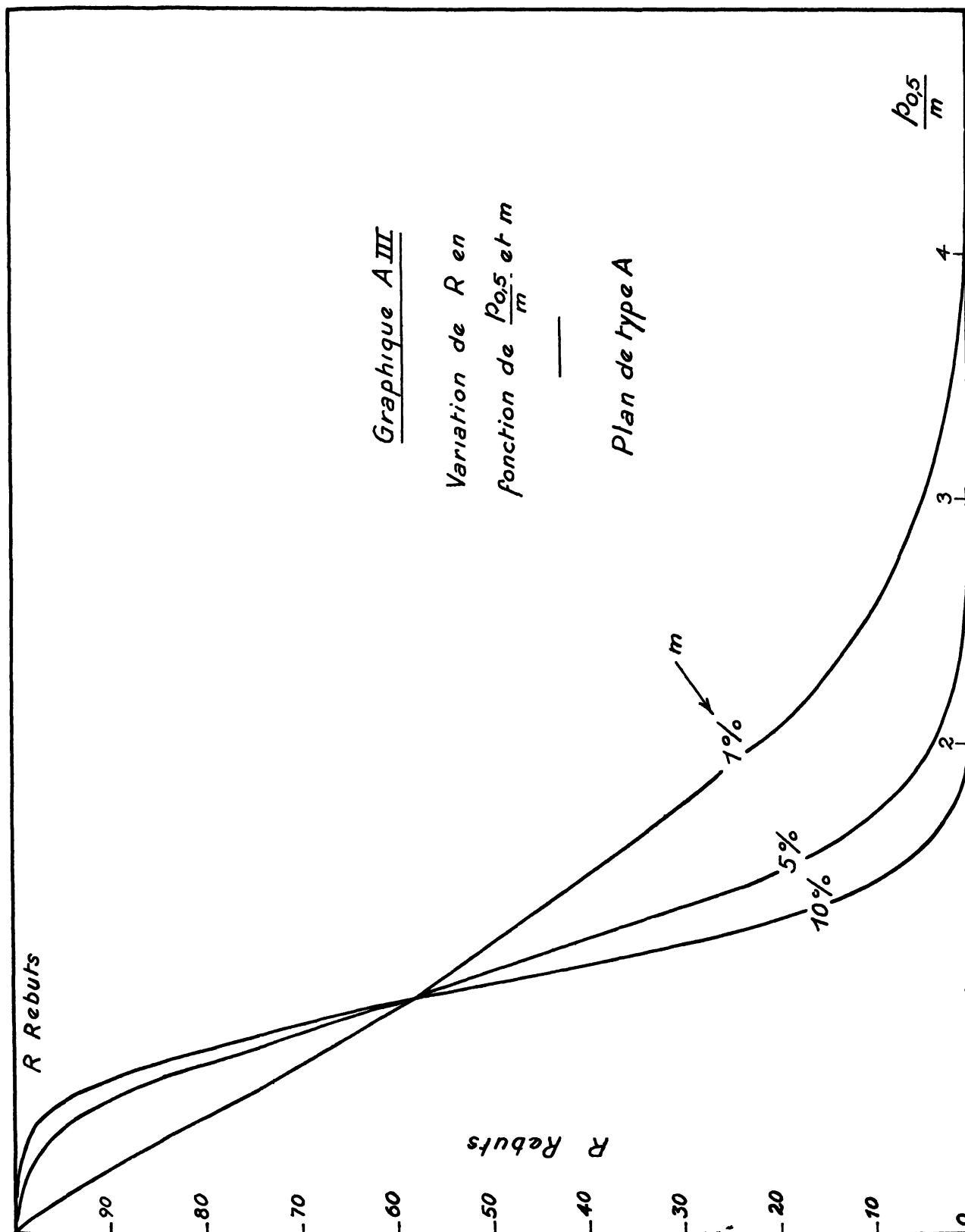
Courbes d'efficacité constituées de deux paliers réunis par une verticale au point d'abscisse $p_{0,5}$.

$$\left(\frac{d\alpha}{dp}\right)_{p=p_{0,5}} = \infty$$

Les graphiques AI, AII et AIII indiquent sommairement la variation de E et R (A I et A II) en fonction de $\frac{p_{0,5}}{m}$ pour diverses valeurs de $p_{0,5}$ (A I) ou de m (A II).







On a tracé également sur le graphique A II un deuxième réseau de courbes correspondant aux rebuts R.

Exemple :

Soit une fabrication présentant en moyenne $m = 0,5 \%$ d'éléments défectueux. Si l'on prend un plan de contrôle idéal pour lequel

$$\begin{array}{lll} p_{0,5} & = & 1,0 \% \\ \text{on aura} & P_{0,5}/m = 2 & \text{d'où} \\ E & = & 1,9 \end{array}$$

et on peut prévoir qu'on aura à rebuter 25 % des lots présentés au contrôle. L'amélioration relative de qualité sera de 48 %, c'est-à-dire que le client recevra 0,26 % de pièces défectueuses au lieu de 0,5 %.

Réciproquement, si l'on veut, avec une fabrication de qualité moyenne $m = 3,0 \%$ limiter les rebuts à 10 % en utilisant un plan d'échantillonnage idéal à courbe d'efficacité rectangulaire, on voit qu'il faut choisir :

$$\begin{array}{lll} \frac{p_{0,50}}{m} = 1,9 \% & \text{soit} & p_{0,5} = 5,7 \% \\ \text{on obtiendra alors} & & E = 0,73 \end{array}$$

L'amélioration relative de qualité sera de 7 %, c'est-à-dire que le client recevra 2,8 % de pièces défectueuses au lieu de 3,0 %.

B) Plans d'échantillonnages sévères et peu efficaces

Nous avons utilisé pour construire les courbes trois plans d'échantillonnage correspondant aux données suivantes :

N° du plan	Taille de l'échantillon	Nombre pour refus	Nombre pour acceptation	P 0,50 %
B ₁	50	1	0	1,5
B ₂	20	1	0	3,5
B ₃	10	1	0	7,0

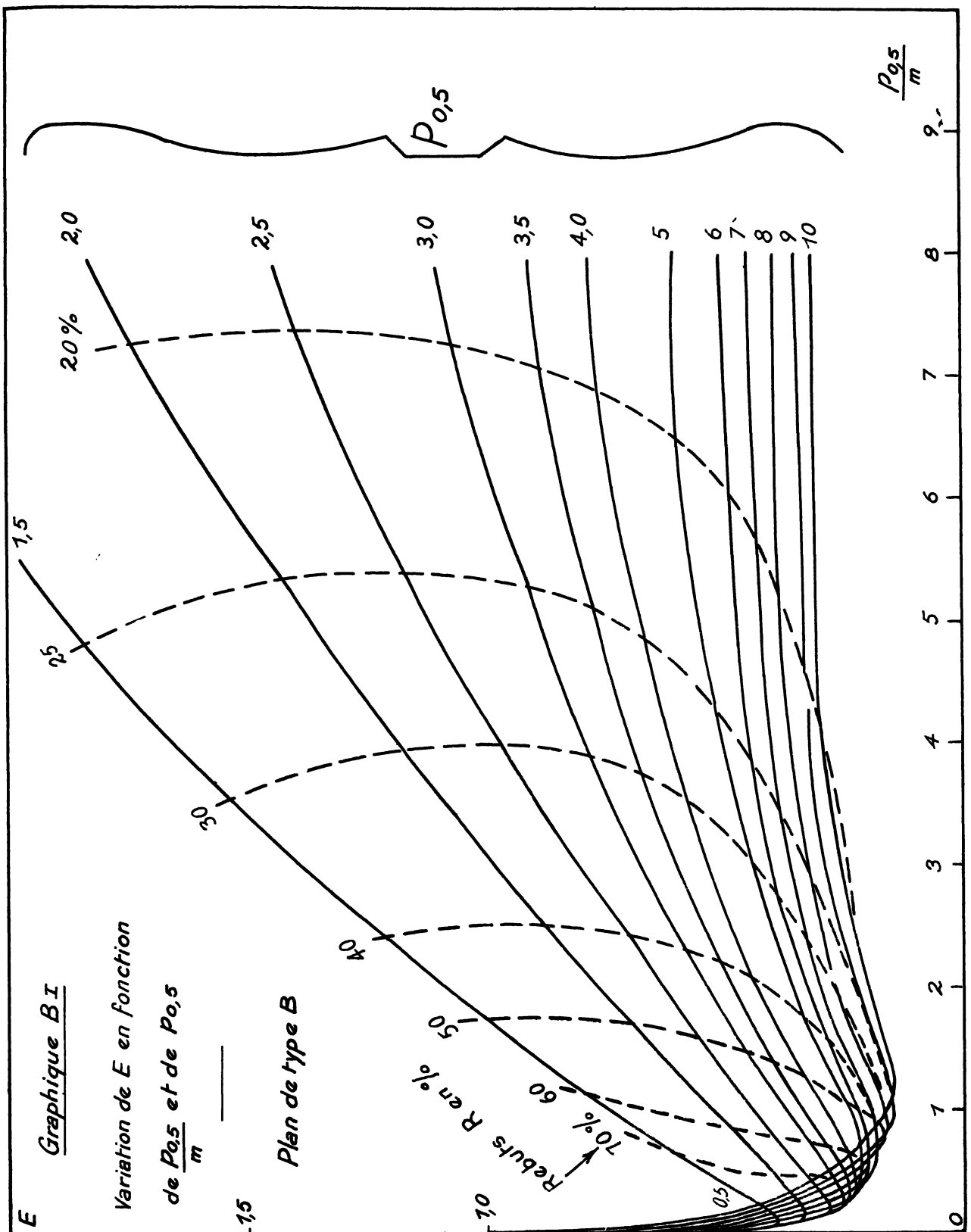
et appliquées successivement à des distributions de moyennes respectives 1,5 et 10 %.

Les graphiques B I et B II donnent les mêmes éléments que précédemment.

C) Plans d'échantillonnages

Nous avons utilisé pour construire les mêmes courbes trois plans d'échantillonnage correspondant aux données suivantes :

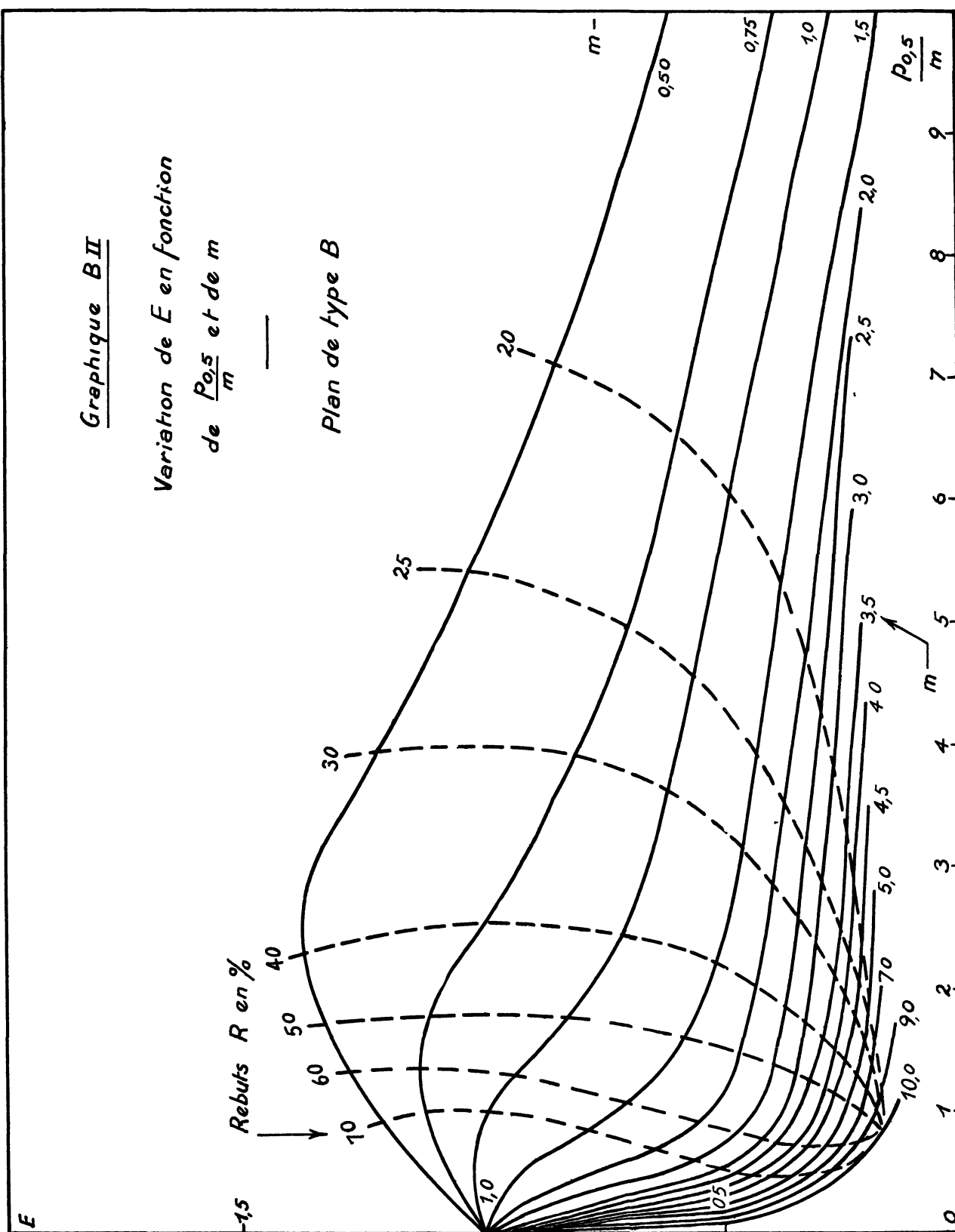
N° du plan	Taille de l'échantillon	Nombre pour refus	Nombre pour acceptation	P 0,50 (%)
C ₁	75	1	0	1,0
C ₂	75	4	3	5,0
C ₃	75	8	7	10,0

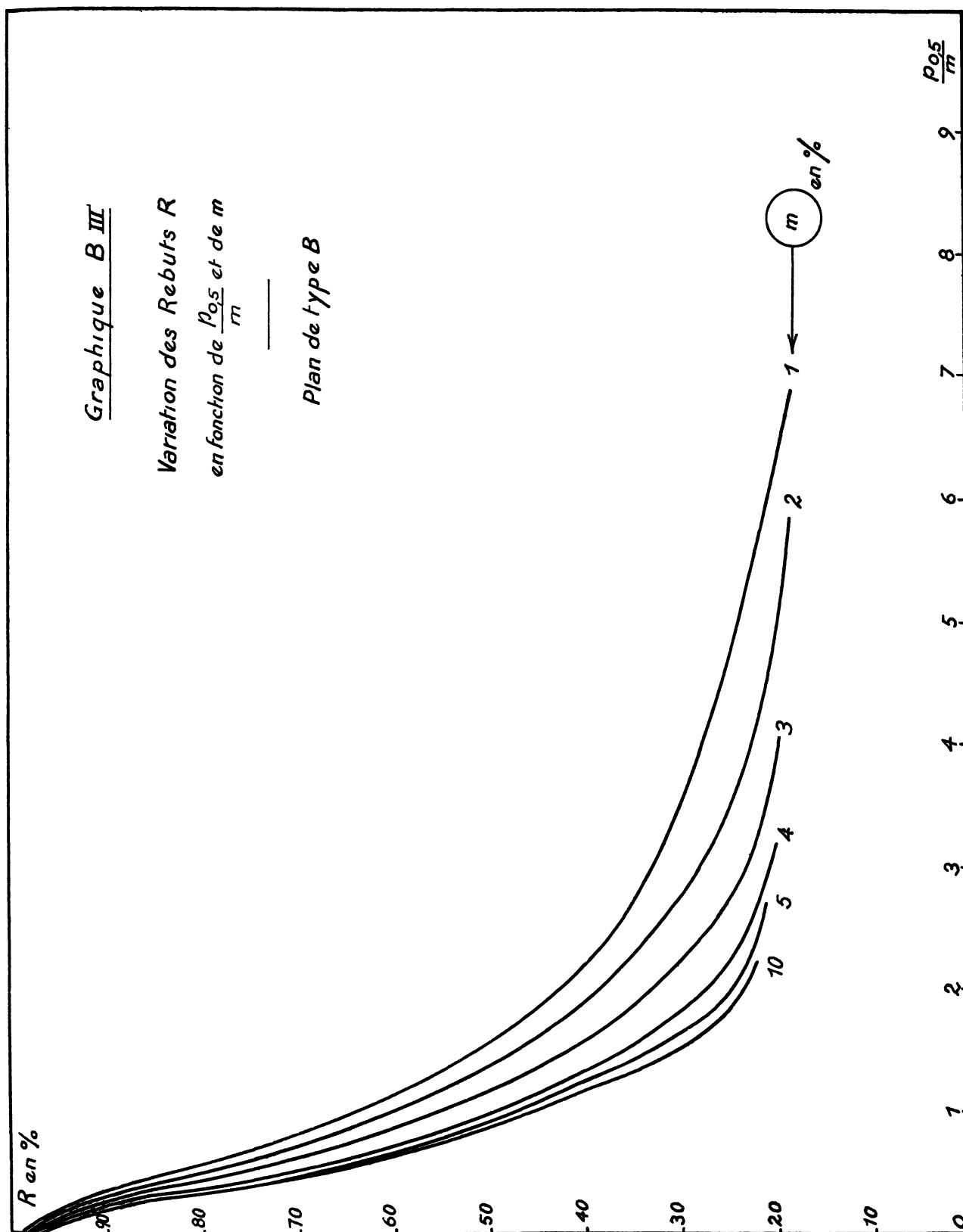


Graphique BII

Variation de E en fonction
de $\frac{P_{0,5}}{m}$ et de m

Plan de type B





et appliqués successivement à des courbes de distribution identiques aux précédentes. (Courbes C. I — C. II — C. III).

COMPARAISON DES TYPES DE PLANS ESSAYÉS

Il suffit de reprendre les mêmes exemples pour les trois plans pour faire ressortir instantanément les inconvénients des plans du type B.

Ces résultats sont rassemblés dans les tableaux I, II, III qui font ressortir les éléments suivants.

1) Comparaison des plans des types B, et C

Dans tous les cas correspondant à des conditions de travail réalistes (rebuts inférieurs à 60 %) les plans du type B ont un rapport d'équité supérieur à ceux du type C avec des rebuts moindres et des améliorations relatives de qualité assez comparable, souvent meilleure.

Les plans du type B devraient donc être proscrits absolument comme des absurdités mathématiques nuisibles au fournisseur et sans avantage particulier pour le client.

Ils correspondent malheureusement à la plupart des types d'échantillonnage adoptés dans les cahiers des charges traditionnels.

Leurs inconvénients sont d'autant plus graves que la taille des lots est plus importante.

Il est bien évident qu'un plan du type B. 10, appliqué à une fabrication de qualité moyenne $m = 3\%$ d'E. D., et qui amène un fournisseur à rebuter 23 % de sa production pour livrer au client $m' = 2,81\%$ d'E. D. est désastreux comparé à un plan du type C. 10 qui, dans les mêmes conditions, permet de ne livrer au client que 2,93 % d'E. D., tout en ne rebutant que 3 % des lots présentés.

Le plan du type C. équivalent au plan B. 10 du point de vue amélioration de qualité, serait un plan de caractéristiques suivantes :

$$P_{0,5} = 2,7 \text{ m} = 8,1 \%$$

donnant $E = 0,72$ et $R = 10\%$, soit une amélioration relative de qualité $E \times R = 7,2\%$ (contre 7,6 % pour C. 5).

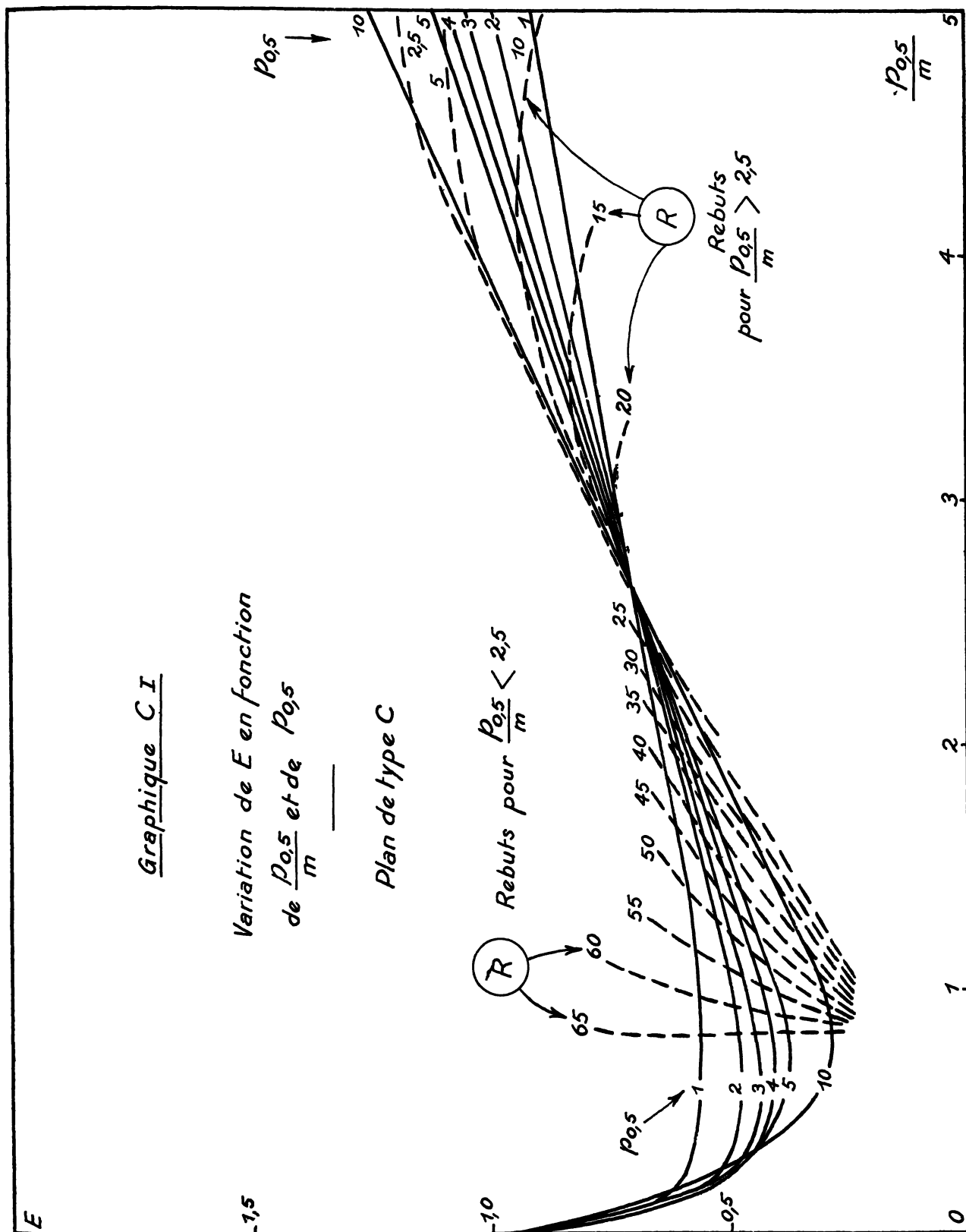
Les rebuts ($R = 10\%$) resteraient encore nettement inférieurs à ceux causés par l'application du plan B. 10.

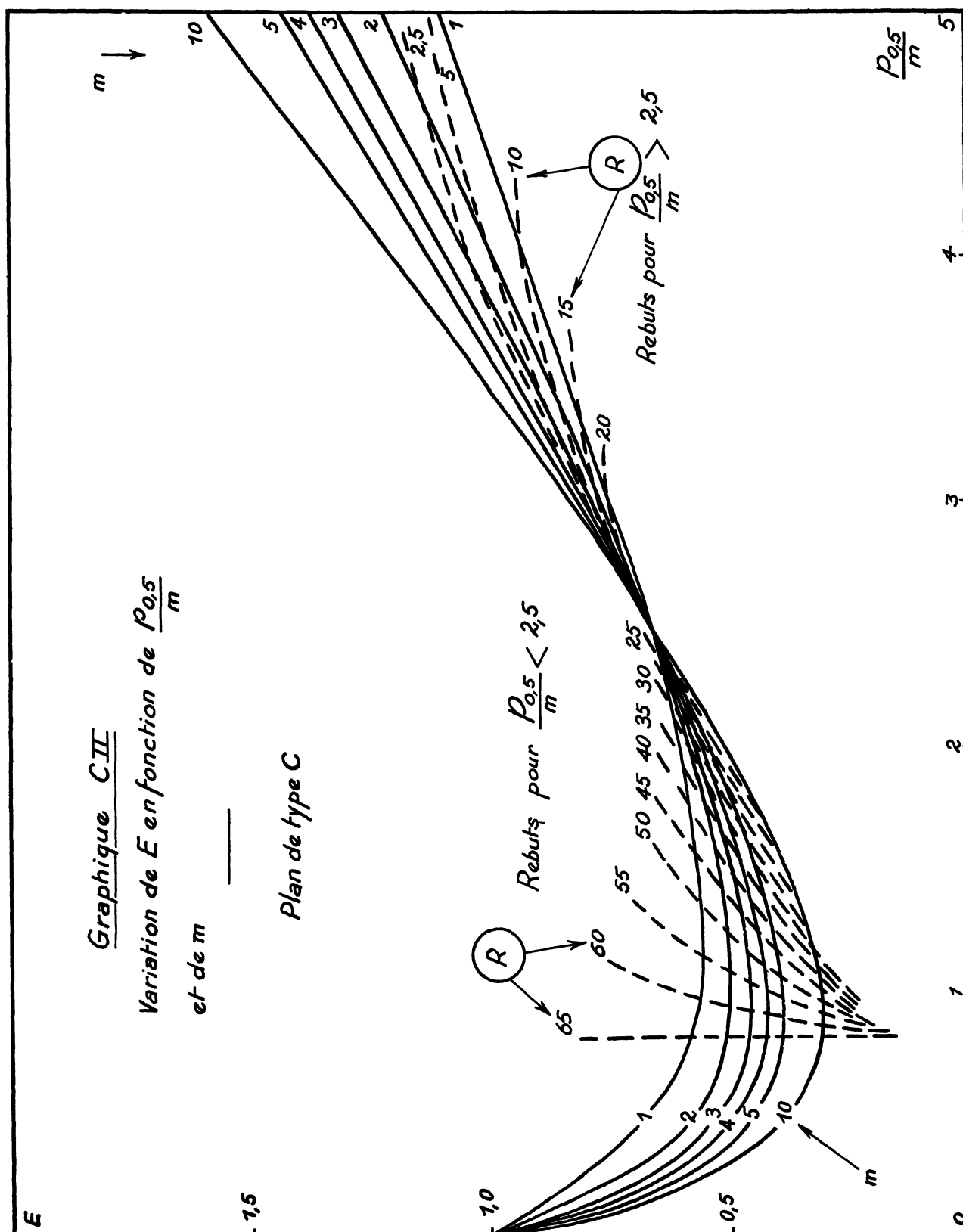
2) Aspect général des courbes $E = f \frac{P^{0,5}}{m}$

a) Les plans du type B. ont encore un avantage sur les autres, c'est que la variation du rapport d'équité est relativement peu influencée par la valeur absolue de m ou de $P_{0,5}$.

Ceci garantit une bonne stabilité des résultats lorsque la qualité de la fabrication varie (l'augmentation des rebuts suffit par ailleurs à donner l'alerte).

b) Présence d'un minimum sur les courbes correspondant à des plans des types A. et B.





Graphique CIII

Variation des Rebuts R en
fonction de $\frac{P_{0.5}}{m}$ et de m

Plans de type C

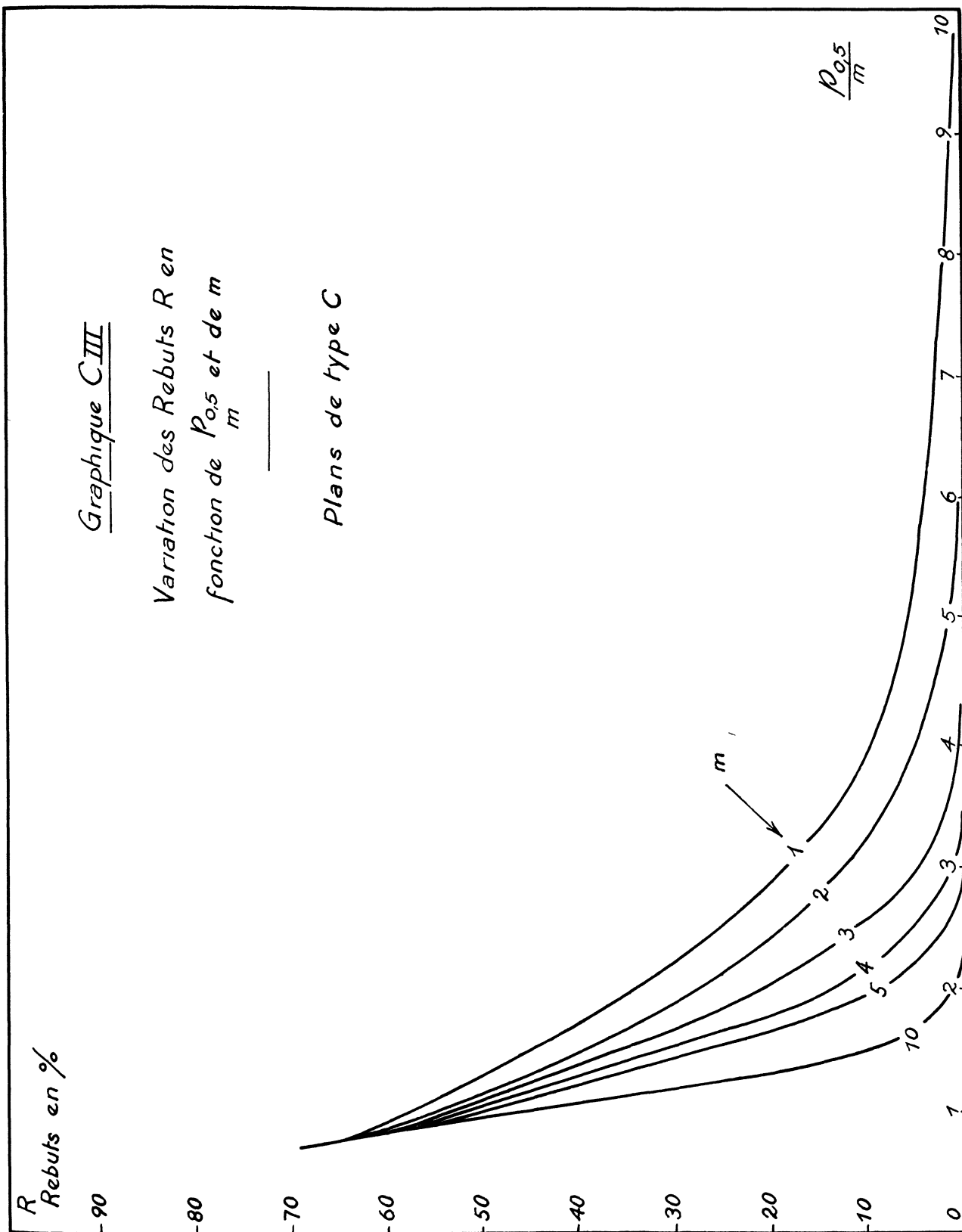


Tableau I — *Qualité moyenne de la fabrication* $m = 1 \%$

Type des plans	P 0,5 %	R %	E	$\frac{\Delta m}{m}$ %	$\Delta m - m' - m$ %	Qualité finale m' %
A ₁	1,0	57,5	1,05	60,5	0,61	0,39
B ₁	1,0	65,0	1,00	65,0	0,65	0,35
C ₁	1,0	64,0	0,58	57,0	0,57	0,43
A ₅	5,0	< 1,0	> 2,0	—	—	1,00
B ₅	5,0	24,0	0,55	13,2	0,13	0,87
C ₅	5,0	5,5	1,11	6,1	0,06	0,94
A ₁₀	10,0	< 1,0	> 2,0	—	—	1,00
B ₁₀	10,0	12,0	0,27	3,2	0,03	0,97
C ₁₀	10,0	< 1,0	1,40	—	—	0,99

Tableau II — *Qualité moyenne de la fabrication* $m = 3 \%$

Type des plans	P 0,5 %	R %	E	$\frac{\Delta m}{m}$ %	$\Delta m - m' - m$ %	Qualité finale m' %
A ₁	1,0	90,0	0,84	75,5	2,26	0,74
B ₁	1,0	92,0	0,73	66,0	1,98	1,02
C ₁	1,0	90,0	0,62	56,0	1,68	1,32
A ₅	5,0	15,0	0,70	10,5	0,81	2,69
B ₅	5,0	40,0	0,33	18,2	0,39	2,61
C ₅	5,0	32,5	0,51	16,6	0,50	2,50
A ₁₀	10,0	2,0	1,19	2,4	0,07	2,98
B ₁₀	10,0	23,0	0,28	6,4	0,19	2,81
C ₁₀	10,0	3,0	0,87	2,6	0,07	2,98

Tableau III — *Qualité moyenne de la fabrication* $m = 5 \%$

Type des plans	P 0,5 %	R %	E	$\frac{\Delta m}{m}$ %	$\Delta m - m' - m$ %	Qualité finale m' %
A ₁	1,0	99,0	0,87	86,0	4,30	0,70
B ₁	1,0	83,0	0,40	33,2	1,66	3,34
C ₁	1,0	98,0	0,64	59,5	2,98	2,02
A ₅	5,0	56,0	0,56	31,4	1,57	3,43
B ₅	5,0	49,0	0,25	12,3	0,61	4,39
C ₅	5,0	53,0	0,40	21,2	1,06	3,94
A ₁₀	10,0	3,5	0,50	1,75	0,09	4,91
B ₁₀	10,0	25,0	0,19	4,75	0,24	4,76
C ₁₀	10,0	10,0	0,56	5,6	0,28	4,72

La présence de ces minima rend désavantageux l'usage de ces plans tant que

$$\frac{P_{0,5}}{m} < 2$$

Il est donc à conseiller d'utiliser toujours des plans de contrôle pour lesquels $P_{0,5}$ soit au moins le double de m , si possible le triple.

Ceci impose, si l'on veut rester réaliste, de ne recourir au contrôle par échantillonnage que si la qualité est raisonnable. En effet, une fabrication de qualité moyenne $m = 15\%$ devrait d'après le critère précédent, être soumise à un plan de contrôle $p_{0,5} = 30$ à 45% .

Des plans de ce type n'apporteraient qu'une faible garantie puisqu'ils donnent à des lots contenant 50 à 70 % d'éléments défectueux une chance sur 10 d'être acceptés si l'on utilise des plans du type B et plus d'une chance sur 4 d'être acceptés si l'on utilise des plans du type C.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les considérations exposées ci-dessus doivent être comprises comme des conseils de prudence.

1) Le contrôle par échantillonnage est une arme à double tranchant qui peut causer de graves préjudices au fournisseur, hors de proportions avec les économies qu'il représente.

2) On doit rechercher la plus grande efficacité possible pour l'échantillonnage (c'est-à-dire, prélever le plus grand nombre d'éléments possible, un accroissement de l'efficacité se traduisant presque toujours par une augmentation du rapport d'équité, dans les conditions usuelles de travail

$$\left(\frac{p_{0,5}}{m} \text{ compris entre } 1 \text{ et } 4, m < 5\%\right).$$

3) Les considérations ci-dessus font comprendre le rôle d'un contrôle par échantillonnage, dans les conditions étudiées.

Ce contrôle doit viser à s'assurer de la constance de la qualité moyenne m de la fabrication en garantissant au client un niveau m' légèrement inférieur à m , au prix d'un pourcentage de rebuts raisonnable. Il donne l'alerte

1°) si m augmente anormalement en provoquant un accroissement rapide et considérable des rebuts et

2°) lorsque les lots soumis sont nettement plus mauvais que la moyenne.

Le contrôle joue ainsi son rôle de régulateur et de limiteur bien adapté aux possibilités du fabricant.

4) Il faut considérer les plans de contrôle du type B. (c'est-à-dire ceux correspondant à un prélèvement de n échantillons avec refus si un seul de ces n échantillons est défectueux) comme des aberrations regrettables, qui ne se justifient que si on leur soumet en permanence une qualité absolument parfaite ou du moins telle que

$$\frac{p_{0,5}}{m} > 10.$$

Ils deviennent désavantageux pour le client ($E < 1$) pour des valeurs de m supérieures à 2 ou 3 % tout en causant des rebuts élevés au fournisseur, ce qui traduit simplement le fait qu'ils conduisent à rebuter à tort des lots relativement bons.

L'application de tels plans dans ces conditions, conduit à des rebuts onéreux et, du point de vue qualité, résultats à peu près équivalents à ceux qu'on obtiendrait sans contrôle.

Leur efficacité est limitée uniquement à leur effet psychologique (dans la mesure où la crainte du gendarme peut avoir de l'influence sur la qualité des produits livrés, ce qui n'est pas toujours le cas).

COMPLÉMENT

UTILISATION DE LA MÉTHODE CI-DESSUS POUR L'ÉTUDE DES APPAREILS DE CONTRÔLE NON DESTRUCTIFS

La méthode précédemment décrite est absolument générale. Elle a été appliquée à des *lots* soumis à un jugement sur échantillonnage, donc entaché d'incertitude. Elle peut être appliquée tout aussi bien à des *pièces* soumises à l'appréciation d'un appareil (ou même d'un inspecteur) lorsque cette appréciation comporte une part d'incertitude, ce qui est le cas de presque tous les appareils ou contrôles chargés de détecter des défauts et d'accepter ou de refuser le produit suivant l'importance de ces derniers.

Tout défaut peut donc être, suivant son importance, affecté d'une probabilité d'acceptation et d'une probabilité (complémentaire) de refus.

Or, la plupart des appareils de contrôle non destructifs permettent de chiffrer l'importance d'un défaut donné en le caractérisant par la déviation d'un appareil de mesure (par exemple, un stylet sur un graphique, l'aiguille d'un ampèremètre, la hauteur d'un signal sur l'écran d'un oscillographe, etc...).

Ces appareils possèdent, en général, un « seuil d'alerte » réglable c'est-à-dire un dispositif permettant d'éliminer les produits présentant des défauts d'une importance supérieure à un « seuil » donné s .

On peut donc définir leur courbe d'efficacité, courbe donnant la probabilité d'acceptation d'un produit en fonction de l'importance du défaut présenté, de même qu'on peut définir la courbe de distribution des défauts dans la fabrication (courbe donnant la fréquence de ces derniers en fonction de leur importance).

On se trouve ramené au problème précédent; déterminer l'amélioration moyenne de qualité et les rebuts concomitants lorsqu'on applique à une fabrication définie par une courbe de distribution D , un plan de contrôle défini par une courbe d'efficacité (forme A, B ou C).

m et m' représentent alors respectivement l'importance du défaut moyen avant et après application du plan de contrôle.

$p_{0,5}$ représente le « seuil d'alerte » dans le cas d'un appareil d'une fidélité parfaite (plans de contrôle, type A). Il représente l'importance du défaut ayant une chance sur 2 d'être éliminé dans le cas d'un appareil imparfait (plans de contrôle, type B ou C).

Les courbes en question sont tout à fait simples à construire.

Il suffit de faire passer dans l'appareil un certain nombre de pièces et de pointer la fréquence des déviations pour obtenir la courbe D .

Pour obtenir les courbes B et C il suffit de repasser les mêmes pièces plusieurs fois de suite dans l'appareil et de noter la fréquence des refus et des acceptations pour chaque pièce, en conservant identiques la sensibilité de l'appareil et le « seuil d'alerte ».

Suivant les formes des courbes en question on peut avoir des rebuts plus ou moins importants.

Dans la majorité des cas, la nécessité d'avoir un appareil sensible oblige à travailler avec $\frac{p_{0,5}}{m}$ compris entre 1 et 2, donc faible.

De tels dispositifs risquent de causer des rebuts élevés, d'autant plus élevés que leur fidélité est plus incertaine, d'autant plus élevés que leur seuil d'alerte est plus voisin de l'importance moyenne m des défauts affectant les produits et d'autant plus élevés que cette importance moyenne est plus faible (pour une valeur donnée de $\frac{p_{0,5}}{m}$).

Ces inconvénients sont une conséquence mathématique inéluctable de la conjonction des deux courbes (distribution des produits et efficacité du plan de contrôle), bien plus qu'une preuve d'insuffisance des appareils.

Les utilisateurs d'appareils de contrôle non destructifs sont parfaitement conscients de ces difficultés. Aussi les voit-on reprendre les rebuts de ces appareils et les faire examiner ou réparer avec le plus grand soin, au besoin en les vérifiant sur un autre appareil de principe différent.

Ce contrôle en tandem s'est révélé économique et sûr.

A. H. BAZIN

Chef du Service Méthodes, Mathématiques appliquées.
C^{ie} de Pont-à-Mousson.

DISCUSSION

M. DUMAS approuve vivement la proposition de considérer spécialement les courbes d'efficacité au voisinage de la valeur commune 0,50 des risques du client et du producteur; ce choix avait déjà retenu son attention au congrès de l'I.S.I. — 1949 : *Somes Notes on Lot-by-Lot Inspection by Attributes*, par H. C. HAMAKER; il remarque que de toute façon, pour deux courbes d'efficacité passant par un même point, il y en a une qui — aux termes du mémoire « sur une interprétation des conditions de recette » par M. DUMAS — 1925 — est plus « avantageuse » que l'autre; le processus indiqué par M. BAZIN paraît bien convenir pour la déceler; l'étude montre que la solution « avantageuse » est sans doute, toujours, celle qui conduit à essayer le plus grand nombre d'engins, de sorte que l'adoption de ladite solution présente parfois des difficultés pratiques.